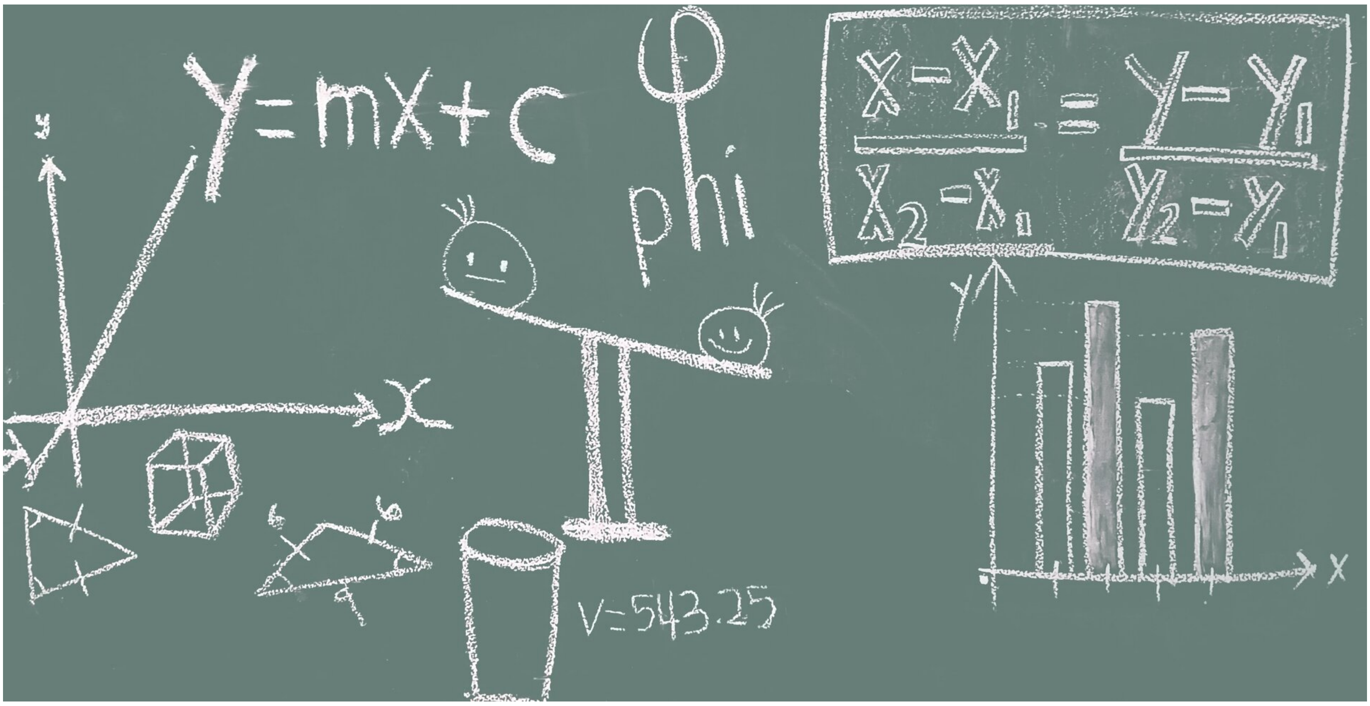
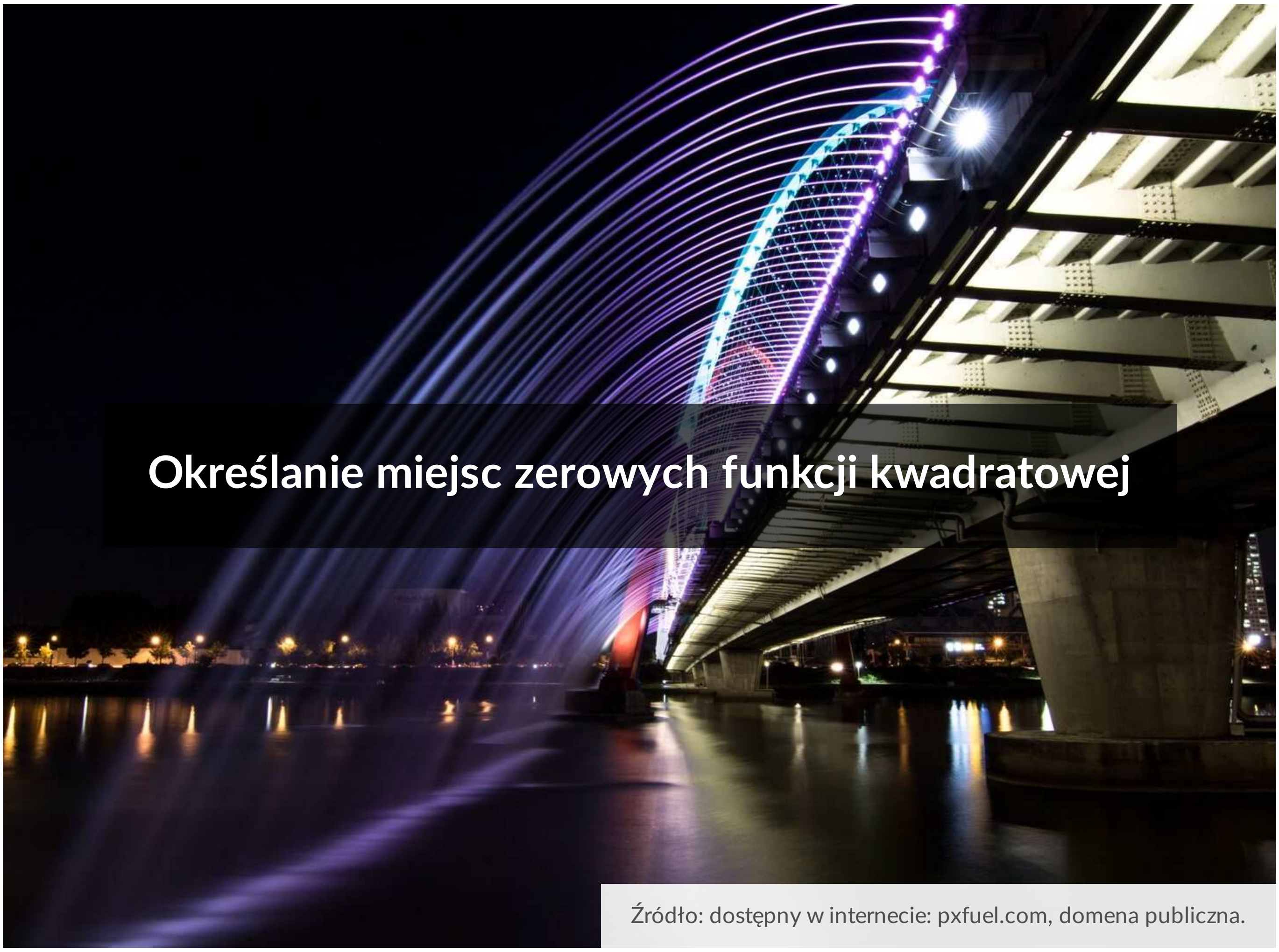


Określanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej

Określanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej



Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Wiele czynności życiowych wykonujemy zgodnie z określonym schematem postępowania, czyli algorytmem. Podobnie jest z obliczaniem miejsc zerowych funkcji kwadratowej. Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej ma istotne znaczenie do odkrywania ciekawych własności funkcji kwadratowej. Mając daną postać funkcji kwadratowej, możemy na kilka różnych sposobów wyznaczyć punkty przecięcia z osią X, o ile istnieją. Kolejne kroki w wyznaczaniu miejsc zerowych funkcji kwadratowej można połączyć z tworzeniem schematów blokowych na lekcji informatyki.

Twoje cele

- Ustalisz algorytm obliczania miejsc zerowych funkcji kwadratowej.
- Wyznaczysz miejsca zerowe funkcji kwadratowej z użyciem wyróżnika trójmianu kwadratowego.
- Obliczysz miejsca zerowe trójmianu kwadratowego różnymi metodami.
- Sprawdzisz istnienie miejsc zerowych funkcji kwadratowej w zadaniach z parametrami.

Przeczytaj

Miejsce zerowe funkcji kwadratowej będziemy określać na różne sposoby:

- poprzez odczytywanie z wykresu funkcji kwadratowej,
- z wykorzystaniem definicji miejsca zerowego,
- z zastosowaniem wzorów na miejsca zerowe, w zależności od wartości wyróżnika funkcji kwadratowej.

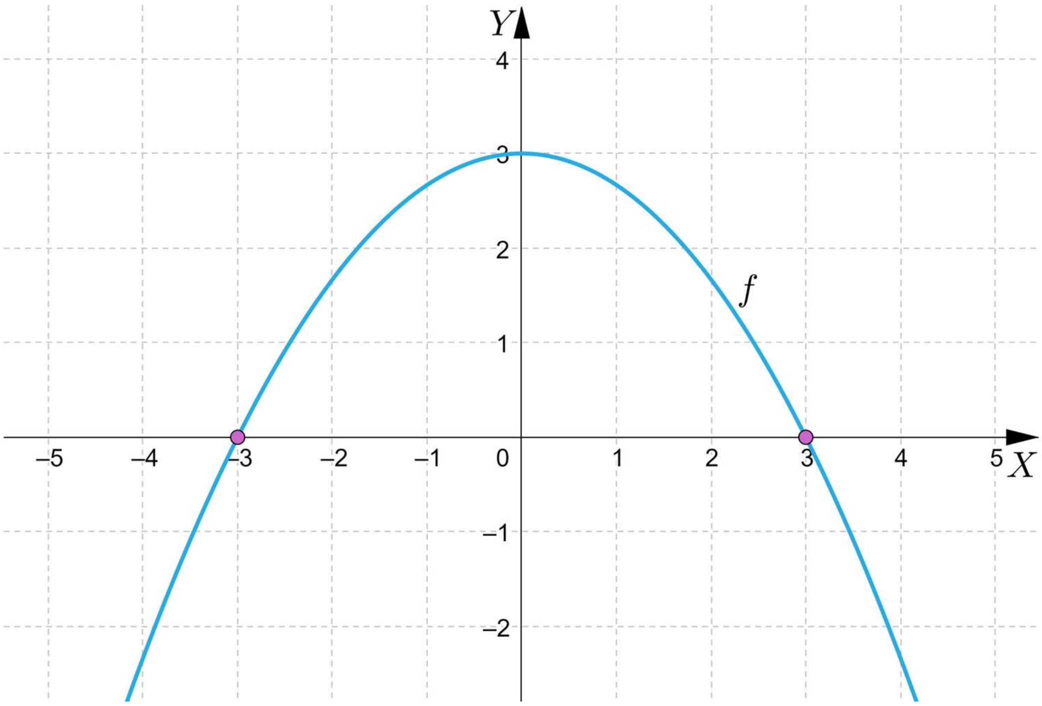
Już wiesz

Miejscem zerowym funkcji nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji wynosi 0.

Graficznie miejsce zerowe funkcji określamy jako pierwszą współrzędną punktu przecięcia wykresu funkcji z poziomą osią X.

Przykład 1

Odczytamy wartości miejsc zerowych z wykresu funkcji kwadratowej f, której wykres przedstawiono na poniższym rysunku.



Rozwiązanie:

Z wykresu odczytujemy, że miejscami zerowymi funkcji f są liczby (-3) oraz 3.

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej możemy wyznaczyć korzystając z równości $f(x) = 0$.

Przykład 2

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji f określonej wzorem:

a) $f(x) = x^2 + 4x$

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy równanie $x^2 + 4x = 0$, które zapisujemy w postaci $x(x + 4) = 0$, zatem $x = 0$ lub $x = -4$.

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe 0 oraz (-4).

b) $f(x) = x^2 - 9$

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy równanie $x^2 - 9 = 0$, które zapisujemy w postaci $x^2 = 9$, zatem $x = -3$ lub $x = 3$.

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe (-3) oraz 3.

c) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy równanie $x^2 - 6x + 9 = 0$, które przekształcamy do postaci $(x - 3)^2 = 0$, zatem $x - 3 = 0$, czyli $x = 3$.

Funkcja f ma jedno miejsce zerowe 3.

d) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

Rozwiązanie:

Rozwiązujemy równanie $x^2 + 4x + 3 = 0$, które przekształcamy do postaci $x^2 + 4x + 4 - 1 = 0$.

Zatem $(x + 2)^2 = 1$, czyli $x + 2 = 1$ lub $x + 2 = -1$.

Obliczamy, że $x = -1$ lub $x = -3$

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe (-1) oraz (-3).

Jeżeli funkcja kwadratowa f jest określona wzorem w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, to miejsca zerowe obliczamy w następujących krokach:

- wypisujemy wartości współczynników a, b, c,
- obliczamy Δ,
- wybieramy jedną z trzech poniższych możliwości.

Jeżeli:

- $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$, to funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe: $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych.

Przykład 3

Obliczymy miejsca zerowe funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -x^2 + x + 12$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49 > 0$, zatem funkcja f ma dwa miejsca zerowe.

Wyznaczamy

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{49}}{2\cdot(-1)} = \frac{-1-7}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{49}}{2\cdot(-1)} = \frac{-1+7}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby 4 oraz (-3).

Przykład 4

Obliczymy miejsca zerowe funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = (x-2)^2 - 4$.

Rozwiązanie:

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji f rozwiązujemy równanie:

$(x-2)^2 - 4 = 0$

Równanie po przekształceniu zapisujemy w postaci $(x-2)^2 = 4$.

Równanie to jest równoważne równaniom: $x - 2 = 2$ lub $x - 2 = -2$.

Funkcja f ma dwa miejsca zerowe 0 oraz 4.

Przykład 5

Wyznaczymy, dla jakiej wartości parametru m funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = -3x^2 + (m-2)x - 2$ ma miejsce zerowe równe 1.

Rozwiązanie:

Ponieważ liczba 1 jest miejscem zerowym funkcji f, więc $f(1) = 0$.

Po podstawieniu $x = 1$, otrzymujemy równanie: $0 = -3 + (m-2) - 2$, z czego wynika że $m = 7$.

Przykład 6

Wyznaczymy, dla jakiej wartości parametru m funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = 2x^2 + x + (m-4)$ ma dwa miejsca zerowe.

Rozwiązanie:

Jeżeli $\Delta > 0$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe.

Obliczamy $\Delta = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (m-4) = 1 - 8 \cdot (m-4) = 1 - 8m + 32 = -8m + 33$.

Zapisujemy warunek: $\Delta > 0$, stąd $-8m + 33 > 0$.

Z tej nierówności wynika, że $m < \frac{33}{8}$.

Przykład 7

Wyznaczymy, dla jakiej wartości parametru m funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = mx^2 + 2x + m$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

Rozwiązanie:

Jeżeli $\Delta = 0$ i $m \neq 0$, to funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe. Drugi z warunków musi być spełniony, bo z treści zadania wiemy, że funkcja ma być kwadratowa.

Zapisujemy warunek: $\Delta = 0$, stąd $4 - 4m^2 = 0$. Z tego równania wynika, że $m = 1$ lub $m = -1$. Obie liczby są różne od zera, zatem spełniają warunki zadania.

Jeżeli wzór funkcji kwadratowej możemy zapisać za pomocą iloczynu czynników liniowych, to miejscami zerowymi funkcji f określonej wzorem $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ są liczby x_1 oraz x_2.

Przykład 8

Wyznaczymy miejsca zerowe funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = -3(x+8)(x-2)$.

Rozwiązanie:

> Miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f są liczby $x_1 = -8$ oraz $x_2 = 2$.

Jeżeli liczby x_1 oraz x_2 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, wówczas wartość współrzędnej p wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f możemy obliczyć ze wzoru:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

> **Przykład 9**
>
> Wiadomo, że funkcja kwadratowa f ma dwa miejsca zerowe. Obliczymy wartość drugiego miejsca zerowego, jeżeli jednym z miejsc zerowych funkcji f jest liczba (-2), zaś pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji f wynosi $p = 4$.
>
> **Rozwiązanie:**
>
> Wprowadźmy oznaczenie: x_2 – drugie miejsce zerowe funkcji kwadratowej f.
>
> W celu wyznaczenia wartości tego miejsca zerowego, rozwiązujemy równanie:
>
> $4 = \frac{-2 + x_2}{2}$
>
> Zatem $x_2 = 10$.

Słownik

> **miejsce zerowe**
>
> argument, dla którego wartość funkcji wynosi 0, pierwsza współrzędna punktu przecięcia wykresu funkcji z osią X

> **funkcja kwadratowa**
>
> funkcja określona za pomocą wzoru $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Poniżej przedstawiono schemat interaktywny dotyczący określania miejsc zerowych funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru. Przeanalizuj działanie schematu, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DkTcRU5Al

Polecenie 2

Oblicz miejsca zerowe funkcji kwadratowej f określonej wzorem:

a) $f(x) = 2x^2 - 1$

b) $f(x) = x^2 - 6x$

c) $f(x) = x^2 + 10x + 25$

d) $f(x) = x^2 - x - 12$

Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm określający miejsca zerowe funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Określanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres podstawowy i rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy. Uczeń:
4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- ustala algorytm obliczania miejsc zerowych funkcji kwadratowej;
- wyznacza miejsca zerowe funkcji kwadratowej z użyciem wyróżnika trójmianu kwadratowego (delty);
- oblicza miejsca zerowe funkcji kwadratowej różnymi metodami;
- sprawdza istnienie miejsc zerowych funkcji kwadratowej w zadaniach z parametrami.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;

- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Określanie miejsc zerowych funkcji kwadratowej" oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie podzieleni na 4-osobowe grupy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj". Przed rozwiązaniem przykładów budują schematy blokowe, przedstawiające algorytm znajdowania miejsc zerowych funkcji kwadratowej, w zależności od wartości wyróżnika. Uczniowie wymieniają się swoimi schematami i testują ich poprawność.
2. Uczniowie rozwiązują przykłady z sekcji „Przeczytaj". Samodzielnie wykonują notatki, nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
3. Uczniowie zapoznają się ze schematem interaktywnym. Na jego podstawie wykonują polecenie 2. Po zaznajomieniu się z treściami nauczyciel komentuje, i w razie potrzeby wyjaśnia najważniejsze etapy realizacji polecenia.
4. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 1-4. Po każdym zakończonym zadaniu wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania przed całą klasą.

5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 5-6, a następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.
6. Uczniowie wspólnie z nauczycielem wykonują ćwiczenia 7-8. Omawiają rozwiązania i zgłaszają propozycje rozwiązań.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie podsumowują lekcję odwołując się do celów zawartych w sekcji „Wprowadzenie”. Zwaracają uwagę na nabyte umiejętności oraz osiągnięte cele.

Praca domowa:

1. Nauczyciel prosi uczniów o przygotowanie w parach 2 ćwiczeń analogicznych do wybranych ćwiczeń zawartych w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można wykorzystać jako powtórzenie w omawianym temacie.
- Uczniowie mogą wykonywać schematy blokowe za pomocą komputera.
- Schamat może być pomocny w tematach związanych z rozwiązywaniem równań kwadratowych.