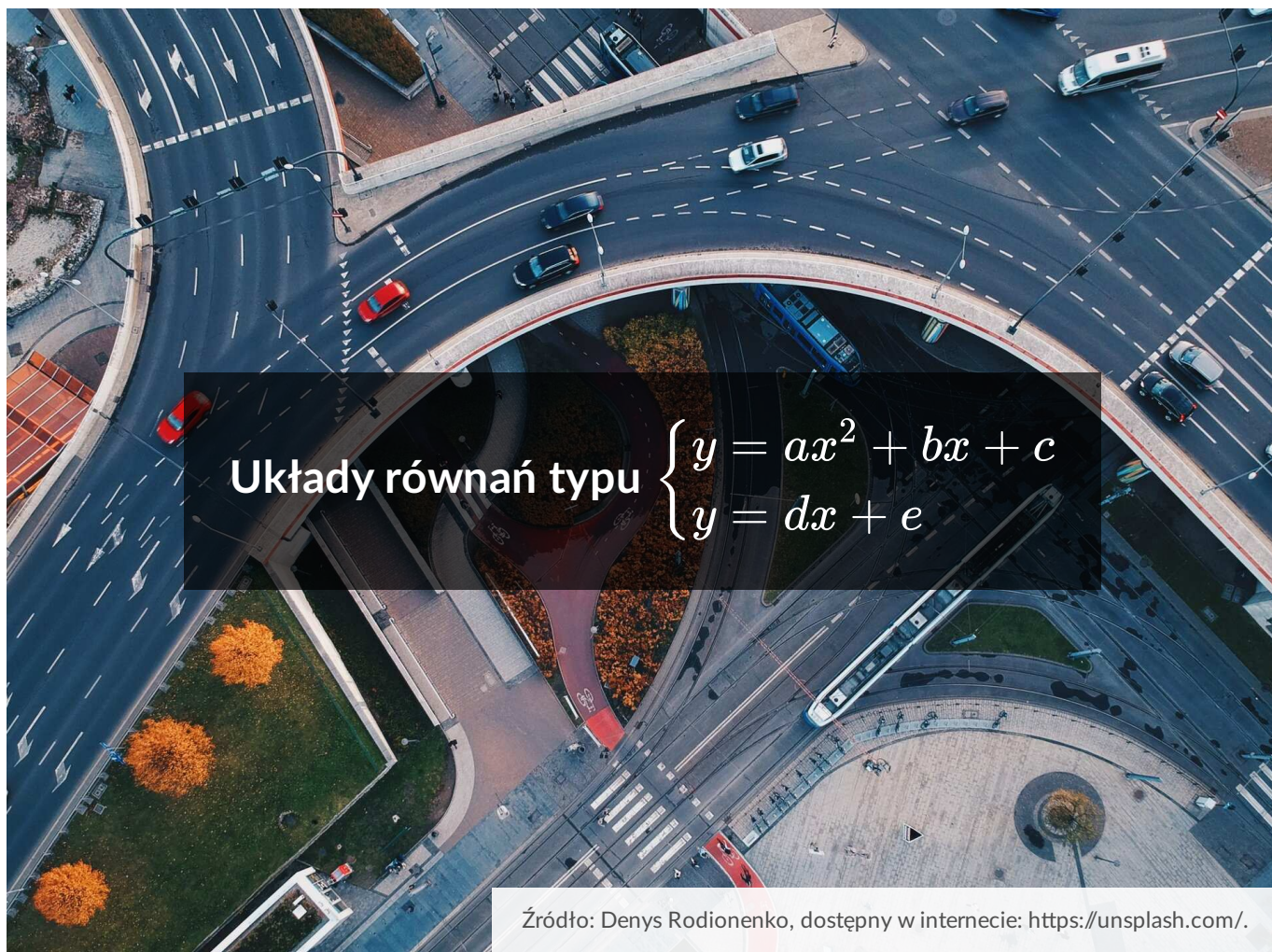




Układy równań typu $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Układy równań typu $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$

Źródło: Denys Rodionenko, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Układ równań to koniunkcja co najmniej dwóch równań. Rozwiązanie układu równań z dwiema niewiadomymi polega na znalezieniu wszystkich par liczb spełniających taki układ lub wykazaniu, że takie pary nie istnieją. Będziemy rozważać takie układy równań, w których jedno z równań jest drugiego stopnia, a drugie pierwszego stopnia. Najczęściej takie układy rozwiązujemy wykorzystując metodę podstawiania.

W tym materiale zajmiemy się układami równań postaci $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$.

Twoje cele

- Utrwalisz metody rozwiązywania równań kwadratowych.
- Utrwalisz zasady określania liczby rozwiązań równania kwadratowego.
- Rozwiążesz układ równań z dwiema niewiadomymi, w którym jedno z równań jest postaci $y = ax^2 + bx + c$, a drugie postaci $y = dx + e$.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicje i twierdzenia, z których będziemy korzystać podczas

rozwiązywania układów równań postaci $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$.

Definicja: Układ równań

Układem równań nazywamy koniunkcję co najmniej dwóch równań.

Aby rozwiązać układ równań należy znaleźć wszystkie układy liczb spełniające jednocześnie wszystkie równania składowe danego układu równań.

Definicja: Rozwiązanie układu równań

Rozwiązaniem układu równań nazywamy każdą parę liczb spełniających jednocześnie każde równanie danego układu równań.

Definicja: Równanie kwadratowe z jedną niewiadomą

Równaniem kwadratowym z jedną niewiadomą x , nazywamy równanie postaci

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie:

a, b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$.

Definicja: Wyróżnik trójmianu kwadratowego („delta”)

Wyróżnikiem trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ nazywamy wyrażenie postaci

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

W zależności od wartości trójmianu kwadratowego, **równanie kwadratowe** może mieć dwa lub jeden pierwiastek. Może też nie posiadać rozwiązania.

Twierdzenie: Liczba rozwiązań równania kwadratowego

Równanie kwadratowe postaci $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$:

- nie posiada rozwiązania, jeśli $\Delta < 0$;
- posiada jedno rozwiązanie $x_0 = \frac{-b}{2a}$, jeśli $\Delta = 0$;
- posiada dwa rozwiązania $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, jeśli $\Delta > 0$.

Definicja: Układy równań drugiego stopnia

Układem równań drugiego stopnia, nazywamy takie układy, w których jedno równanie jest drugiego stopnia, a stopień drugiego nie jest większy niż dwa.

Rozwiążemy teraz kilka układów równań postaci $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$.

Przykład 1

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} y = 5x^2 - 3x - 8 \\ y = 2 - 8x \end{cases}$.

Podstawiamy wyrażenie wyznaczone w równaniu liniowym, do równania kwadratowego w miejsce niewiadomej y .

$$\begin{cases} 2 - 8x = 5x^2 - 3x - 8 \\ y = 2 - 8x \end{cases}$$

Porządkujemy otrzymane równanie kwadratowe.

$$5x^2 + 5x - 10 = 0 \quad | : 5$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Następnie rozwiązujemy je, obliczając na [wyróżnik trójmianu kwadratowego](#) równania $ax^2 + bx + c = 0$ oraz jego pierwiastki.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 9 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ lub } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ lub } x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Podstawiamy otrzymane wartości niewiadomej x do równania liniowego i obliczymy niewiadomą y .

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 - 8x \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 8x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 18 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \end{cases}$$

A zatem rozwiązaniem tego układu równań są dwie pary liczb $\begin{cases} x = -2 \\ y = 18 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = 1 \\ y = -6 \end{cases}$.

Przykład 2

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} -2(2 - 2\sqrt{2})x + y = 10 + x^2 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$.

Doprowadzamy równania występujące w układzie do najprostszej postaci i wyznaczamy w równaniach niewiadomą y .

$$\begin{cases} y = x^2 + 2(2 - 2\sqrt{2})x + 10 \\ -y = -4x - 2 \mid : (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 2(2 - 2\sqrt{2})x + 10 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

Wyznaczoną w równaniu liniowym wartość y , **podstawiamy** do równania kwadratowego.

$$\begin{cases} 4x + 2 = x^2 + 2(2 - 2\sqrt{2})x + 10 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

W pierwszym równaniu otrzymaliśmy równanie kwadratowe – porządkujemy je.

$$x^2 + 2(2 - 2\sqrt{2})x - 4x - 2 + 10 = 0$$

$$x^2 + 4x - 4\sqrt{2}x - 4x - 2 + 10 = 0$$

$$x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (4\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$$

$$\Delta = 32 - 32$$

$$\Delta = 0$$

A wtedy

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$x_0 = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$x_0 = 2\sqrt{2}$$

Podstawiamy otrzymaną wartość niewiadomej x do równania liniowego i obliczmy niewiadomą y .

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 4 \cdot 2\sqrt{2} + 2 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest jedna para liczb $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 2 + 8\sqrt{2} \end{cases}$.

Przykład 3

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 4(x - x^2) - 15 = 10 - y \\ 15x - y = 5 \end{cases}$.

Doprowadzamy równania występujące w układzie do najprostszej postaci i wyznaczamy w równaniach niewiadomą y .

$$\begin{cases} 4x - 4x^2 - 15 = 10 - y \\ 15x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 4x + 15 + 10 \\ -y = 5 - 15x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4x^2 - 4x + 25 \\ y = 15x - 5 \end{cases}$$

Wyznaczoną w równaniu liniowym wartość y , podstawiamy do równania kwadratowego, które następnie porządkujemy.

$$\begin{cases} 15x - 5 = 4x^2 - 4x + 25 \\ y = 15x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 15x + 5 + 25 = 0 \\ y = 15x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 19x + 30 = 0 \\ y = 15x - 5 \end{cases}$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe.

Obliczamy wartość wyróżnika trójmianu kwadratowego.

$$\Delta = 19^2 - 4 \cdot 4 \cdot 30 = -119 < 0$$

$\Delta < 0$, a więc równanie kwadratowe $4x^2 - 19x + 30 = 0$ nie posiada rozwiązania.

Zatem układ równań $\begin{cases} 4(x - x^2) - 15 = 10 - y \\ 15x - y = 5 \end{cases}$ jest sprzeczny.

Liczba rozwiązań układu równań $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$ jest taka sama, jak liczba rozwiązań otrzymanego z porównania prawych stron równań składowych tego układu, równania kwadratowego.

Przykład 4

Określmy liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} 3x^2 + x + m = y - 2m \\ y - mx = 5m + 2 \end{cases}$ z niewiadomą x , w zależności od wartości parametru m .

W równaniach wyznaczamy zmienną y .

$$\begin{cases} y = 3x^2 + x + m + 2m \\ y = mx + 5m + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x^2 + x + 3m \\ y = mx + 5m + 2 \end{cases}$$

Podstawiamy do równania kwadratowego wyrażenie, otrzymane w równaniu liniowym.

$$\begin{cases} mx + 5m + 2 = 3x^2 + x + 3m \\ y = mx + 5m + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + x - mx + 3m - 5m - 2 = 0 \\ y = mx + 5m + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + (1 - m)x - 2(m + 1) = 0 \\ y = mx + 5m + 2 \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe z niewiadomą x i parametrem m .

$$3x^2 + (1 - m)x - 2(m + 1) = 0$$

Wyznaczamy wartość wyróżnika trójmianu kwadratowego.

$$\Delta = (1 - m)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2(m + 1))$$

$$\Delta = m^2 - 2m + 1 + 24m + 24$$

$$\Delta = m^2 + 22m + 25$$

Zgodnie z przypomnianym na początku materiału twierdzeniem, liczba pierwiastków równania kwadratowego jest zależna od wartości wyróżnika kwadratowego (delty).

Sprawdźmy zatem, dla jakich wartości parametru m , delta przyjmuje wartości dodatnie, a dla jakich ujemne.

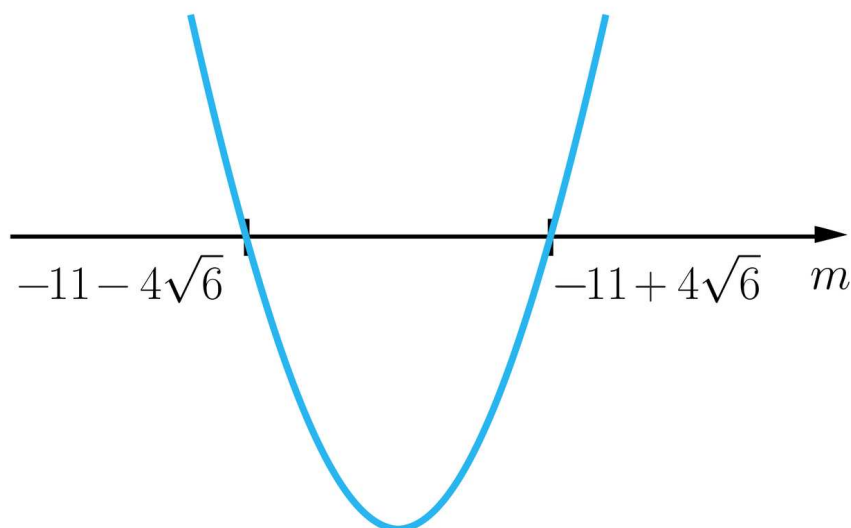
$$\Delta_m = 22^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25$$

$$\Delta_m = 384$$

$$\sqrt{\Delta_m} = 8\sqrt{6}$$

$$m_1 = \frac{-22-8\sqrt{6}}{2} = -11 - 4\sqrt{6}$$

$$m_2 = \frac{-22+8\sqrt{6}}{2} = -11 + 4\sqrt{6}$$



Mamy więc:

- jeden pierwiastek $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m \in \{-11 - 4\sqrt{6}, -11 + 4\sqrt{6}\}$;
- dwa pierwiastki $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -11 - 4\sqrt{6}) \cup (-11 + 4\sqrt{6}, \infty)$;
- brak pierwiastków $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (-11 - 4\sqrt{6}, -11 + 4\sqrt{6})$.

Liczba rozwiązań układu równań $\begin{cases} 3x^2 + x + m = y - 2m \\ y - mx = 5m + 2 \end{cases}$ jest taka sama, jak liczba pierwiastków równania

$$3x^2 + (1 - m)x - 2(m + 1) = 0$$

A zatem:

- dla $m \in (-\infty, -11 - 4\sqrt{6}) \cup (-11 + 4\sqrt{6}, \infty)$ rozwiązaniem układu równań
$$\begin{cases} 3x^2 + x + m = y - 2m \\ y - mx = 5m + 2 \end{cases}$$
 są dwie pary liczb;
- dla $m \in \{-11 - 4\sqrt{6}, -11 + 4\sqrt{6}\}$ rozwiązaniem układu równań
$$\begin{cases} 3x^2 + x + m = y - 2m \\ y - mx = 5m + 2 \end{cases}$$
 jest jedna para liczb;
- dla $m \in (-11 - 4\sqrt{6}, -11 + 4\sqrt{6})$ układ równań
$$\begin{cases} 3x^2 + x + m = y - 2m \\ y - mx = 5m + 2 \end{cases}$$
 nie posiada rozwiązań.

Przykład 5

Określmy, dla jakiego parametru $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = x^2(1 + m) + mx - 1 \\ y = -m(1 + x) \end{cases}$$
 są dwie pary liczb.

Wyznaczone w równaniu liniowym wyrażenie podstawiamy do równania kwadratowego w miejsce niewiadomej y .

$$\begin{cases} y = x^2(1 + m) + mx - 1 \\ y = -m(1 + x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m(1 + x) = x^2(1 + m) + mx - 1 \\ y = -m(1 + x) \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y = x^2(1 + m) + mx - 1 \\ y = -m(1 + x) \end{cases}$ będą dokładnie dwie pary liczb, wtedy, gdy równanie $-m(1 + x) = x^2(1 + m) + mx - 1$ będzie miało dwa różne pierwiastki.

Porządkujemy je i obliczamy wartość wyróżnika trójmianu kwadratowego.

$$-m(1 + x) = x^2(1 + m) + mx - 1$$

$$-m - mx = x^2 + mx^2 + mx - 1$$

$$(1 + m)x^2 + mx + mx + m - 1 = 0$$

$$(1 + m)x^2 + 2mx + (m - 1) = 0$$

$$\Delta = (2m)^2 - 4 \cdot (m + 1)(m - 1)$$

$$\Delta = 4m^2 - 4m^2 + 4$$

$$\Delta = 4$$

A zatem równanie kwadratowe $(1+m)x^2 + 2mx + (m-1) = 0$ posiada dwa różne rozwiązania dla każdego $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Stąd wynika, że dla każdego $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ rozwiązaniem układu równań

$$\begin{cases} y = x^2(1+m) + mx - 1 \\ y = -m(1+x) \end{cases} \text{ są dwie pary liczb.}$$

Wyznaczymy te rozwiązania.

$$x_1 = \frac{-2m-2}{2(m+1)} = \frac{-2(m+1)}{2(m+1)} = -1 \text{ lub } x_2 = \frac{-2m+2}{2(m+1)} = \frac{-2(m-1)}{2(m+1)} = \frac{1-m}{m+1}$$

Podstawiamy otrzymane wartości x do układu równań i wyznaczamy niewiadomą y .

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -m(1+x) \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{-1(m-1)}{m+1} \\ y = -m(1+x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{-1(m-1)}{m+1} \\ y = \frac{-m(2-0)}{m+1} \end{cases}$$

A zatem dla dowolnego $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ układ równań $\begin{cases} y = x^2(1+m) + mx - 1 \\ y = -m(1+x) \end{cases}$ posiada

dwa rozwiązania postaci $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = \frac{1-m}{m+1} \\ y = \frac{-2m}{m+1} \end{cases}$.

Słownik

układ równań

koniunkcja co najmniej dwóch równań

równanie kwadratowe z jedną niewiadomą

równanie z niewiadomą x postaci

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

gdzie:

a, b i c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a \neq 0$

metoda podstawiania

metoda polegająca na wyznaczeniu dowolnej niewiadomej z dowolnego równania i podstawieniu tak uzyskanego wyrażenia do drugiego z równań w miejsce wyznaczonej

niewiadomej

wyróżnik trójmianu kwadratowego

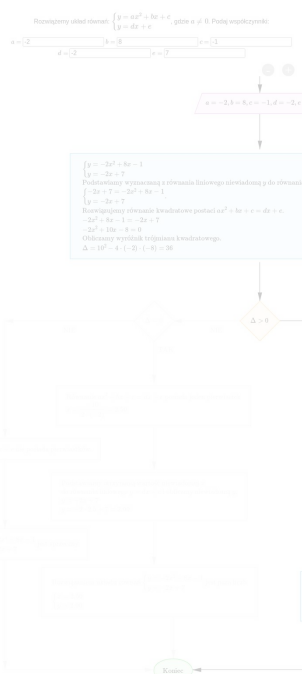
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Przeanalizuj schemat interaktywny, przedstawiający metodę rozwiązywania układów równań typu $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$. Następnie rozwiąż samodzielnie układy równań podane w Poleceniu 2.

Uwaga - schemat podaje rozwiązania z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D5xC1dgPv>

Polecenie 2

Korzystając ze schematu z Polecenia 1, rozwiąż układy równań.

$$\text{a) } \begin{cases} y = -10x^2 + 27x + 7 \\ y = -10x + 14 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} y = 16x^2 - 20x + 5 \\ y = 20x - 20 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} y = -12x^2 + 7x - 5 \\ y = -21x + 27 \end{cases}$$

Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm przedstawiający metodę rozwiązywania układów

równań typu $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Wyznacz liczbę rozwiązań poniższych układów równań. Wpisz odpowiednie liczby w pustych komórkach tabeli.

Układ równań	Liczba rozwiązań układu równań
$\begin{cases} x + y = x^2 + 2 \\ y = 3x - 8 \end{cases}$	
$\begin{cases} x = y + 2x^2 - 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$	
$\begin{cases} 9x^2 - y = 10x - 2 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$	
$\begin{cases} y - x^2 = 3 - 2x \\ x - y = 2 \end{cases}$	

Ćwiczenie 2



Uzupełnij współczynnik a tak, aby rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y = 4x^2 + ax + 14 \\ y = 5 - 3x \end{cases}$ była para liczb $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 9

☐ -15

☐ 15

☐ -9

Ćwiczenie 3



Przeciągnij w wyznaczone miejsca liczbę, tak aby poniższe układy równań były sprzeczne.

- $y = 3x^2 + 3x - 6$

- $y = -3x +$

-92-2-10

Ćwiczenie 4



Rozwiąż układy równań i przyciągnij do układu, pary liczb, które są jego rozwiązaniem.

$$\begin{cases} y = 3x^2 + 3\frac{1}{2}x - 1 \\ y = -3\frac{3}{4}x + 1 \end{cases}:$$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{17}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = 11 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{16} \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -3x^2 + 6x + 3 \\ y = -2x + 7 \end{cases}:$$

Ćwiczenie 5



Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Układ równań $\begin{cases} 2x^2 + 3x = 5 - y \\ x - 1 = y \end{cases}$ jest sprzeczny.

☐ Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = -x^2 + 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ są dwie pary liczb, z których jedna jest parą liczb ujemnych.

☐ Układ równań $\begin{cases} x + y = x^2 + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

☐ Układ równań $\begin{cases} y = 4x - 2 - x^2 \\ y = -5x - 3 \end{cases}$ ma dwa rozwiązania.

☐ Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y = 25x^2 + 14x - 2 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$ jest para liczb wymiernych.

Ćwiczenie 6



Przeciągnij właściwe zbiory w odpowiednie miejsca.

ma dokładnie dwa rozwiązania dla, ma dokładnie jedno rozwiązanie dla, jest sprzeczny dla

Układ równań	,, $\begin{cases} y = 3x^2 + 4x + m \\ y = 2x + 1 \end{cases}$,,	
ma dokładnie dwa rozwiązania dla		
ma dokładnie jedno rozwiązanie dla		
jest sprzeczny dla		

Ćwiczenie 7



Rozwiąż układy równań

$$\begin{cases} y = 3(x-2)^2 - 15 \\ y = 18 - 9x \end{cases} \text{ oraz } \begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 7 \\ y = x - 11 \end{cases}.$$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

	Prawda	Fałsz
Para liczb spełniająca jednocześnie oba układy równań to $\begin{cases} x = -2 \\ y = -9 \end{cases}.$	☐	☐
Nie istnieje para liczb spełniająca jednocześnie oba układy równań.	☐	☐
Para liczb spełniająca jednocześnie oba układy równań to $\begin{cases} x = 1 \\ y = -10 \end{cases}.$	☐	☐
Para liczb spełniająca jednocześnie oba układy równań to $\begin{cases} x = 2 \\ y = -9 \end{cases}.$	☐	☐
Para liczb spełniająca jednocześnie oba układy równań to $\begin{cases} x = -1 \\ y = 18 \end{cases}.$	☐	☐

Ćwiczenie 8



Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} y = 1 - x - \frac{1}{4}x^2 \\ y = 2|x-1| - 4 \end{cases}.$$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Układy równań typu $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III. Równania i nierówności. Zakres podstawowy.

Uczeń:

4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

IV. Układy równań. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;

3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases} ax + by = e \\ x^2 + y^2 + cx + dy = f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax + by = e \\ y = cx^2 + dx + f \end{cases}$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny
- rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą
- określa liczbę rozwiązań równania kwadratowego
- rozwiązuje układy równań liniowo – kwadratowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania
- tworzy i wykorzystuje algorytmy rozwiązywania układów równań

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona lekcja
- dyskusja
- konkurs zadaniowy

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

- Uczniowie będą pracować metodą odwróconej klasy. W domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj” oraz schematem interaktywnym.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel dzieli klasę na grupy zadaniowe.
3. Uczniowie w utworzonych grupach wspólnie analizują przygotowane w domu informacje i omawiają schemat interaktywny.

Faza realizacyjna:

1. Przedstawiciele grup omawiają poszczególne problemy na forum klasy. Uczniowie wspólnie wyjaśniają wątpliwości, konsultując je w razie potrzeby z nauczycielem.
2. Uczniowie pracują indywidualnie metodą konkursu zadaniowego. Rozwiązują ćwiczenia interaktywne. Rozwiązania zadań uczniowie zapisują w zeszycie, sprawdzając w materiale ich poprawność. Osoby, które rozwiążą zadania bezbłędnie, otrzymują oceny z aktywności.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne, których nie zdążyli wykonać na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Równanie kwadratowe](#)
- [Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej](#)

Wskazówki metodyczne:

Schemat interaktywny może być wykorzystany przez uczniów do przygotowania wiadomości na lekcję oraz utrwalenia nabytych umiejętności. Może być też wykorzystany przy rozwiązywaniu zadań tekstowych na układy równań liniowo - kwadratowych.