



Wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90°

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Prezentacja multimedialna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

An aerial photograph of a dense, green forest. A paved road winds through the trees, forming a large, smooth curve. The sunlight filters through the canopy, creating a dappled light effect. A semi-transparent black box with white text is overlaid on the center of the image.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90°

Źródło: Kelly Lacy, dostępny w internecie: <https://pexels.com/>.

Znamy obiekty takie jak kąt prosty, kąt półpełny, kąt pełny. Wspólną cechą tych kątów jest fakt, że ich miara jest całkowitą wielokrotnością kąta 90° . Umiemy też wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych dowolnych kątów. W tym temacie przyjrzymy się wartościom funkcji trygonometrycznych kątów, które są całkowitymi wielokrotnościami kąta 90° .

Twoje cele

- Poznasz wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90° .
- Wykorzystasz znajomość wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90° w zadaniach.

Przeczytaj

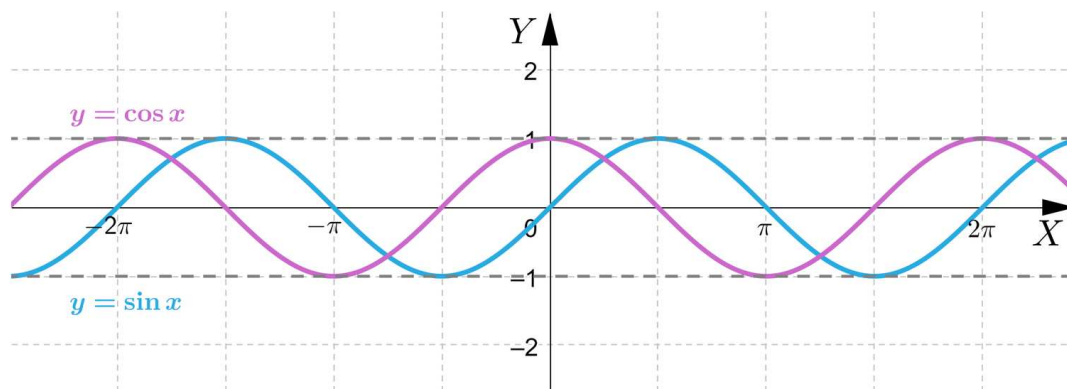
Zacznijmy od przeanalizowania poniższej tabeli.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych wielokrotności kąta 90°

Wartości kąta α wyrażone w stopniach	Wartości kąta α wyrażone w radianach	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	0	1	0
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	nie istnieje
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	nie istnieje
360°	2π	0	1	0
-90°	$-\frac{\pi}{2}$	-1	0	nie istnieje
-180°	$-\pi$	0	-1	0
-270°	$-\frac{3\pi}{2}$	1	0	nie istnieje

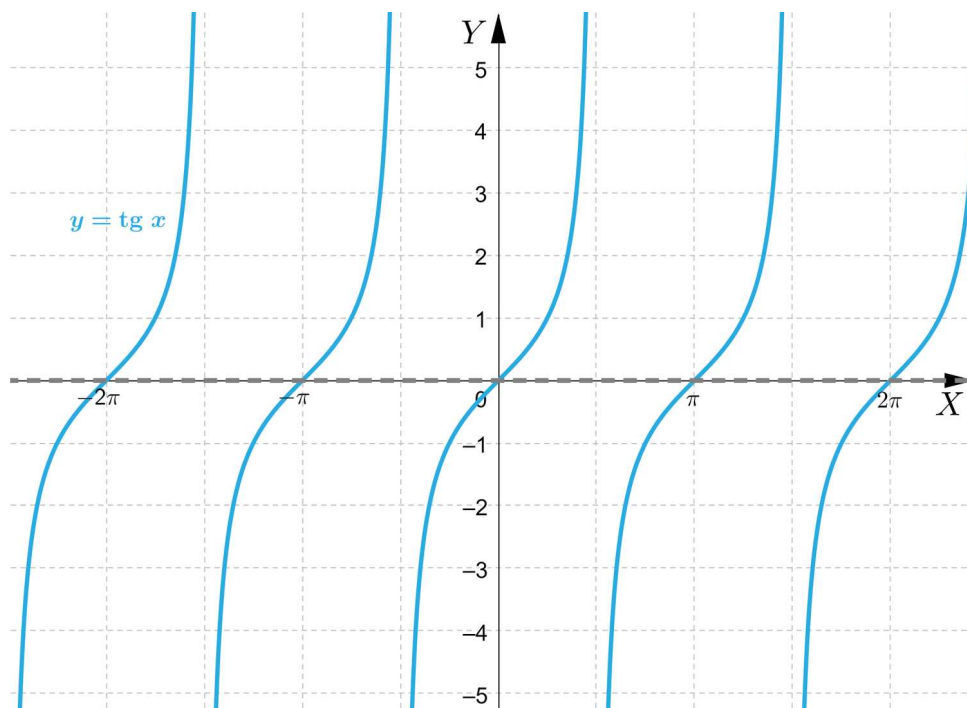
Już pobieżna obserwacja wartości funkcji trygonometrycznych opisywanych w tej tabeli pozwala wywnioskować istnienie pewnych zależności między nimi, a także pewnej **regułarności** w przyjmowanych wartościach. Oczywiście jest ona efektem **okresowości** każdej z tych funkcji – wartości przyjmowane przez każdą z tych funkcji powtarzają się, gdy zwiększymy argument o wielokrotność okresu. Dla sinusa i cosinusa okres ten wynosi 360° , zaś dla tangensa 180° . Dzięki temu znając wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90° z przedziału $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$, jesteśmy w stanie ustalić ich wartość dla dowolnej całkowitych wielokrotności kąta 90° .

Skupmy się początkowo na funkcjach sinus i cosinus. Wartości przyjmowane przez każdą z nich dla wymienionych w tabeli kątów należą do trójelementowego zbioru $\{-1, 0, 1\}$. Przypomnijmy wykresy tych dwóch funkcji.



Wykresy funkcji sinus i cosinus. Dla czytelności przerywanymi liniami narysowano proste $y = 1$ i $y = -1$.

Funkcja tangens znacznie się różni od poprzednich dwóch funkcji trygonometrycznych. Z tabeli możemy odczytać, że dla parzystych wielokrotności kąta 90° przyjmuje wartość 0 , zaś dla nieparzystych wielokrotności kąta 90° nie istnieje. Te same wnioski można wyciągnąć z wykresu funkcji tangens.



Wykres funkcji tangens. Dla czytelności przerywaną linią zaznaczono prostą $y = 0$.

Spróbujmy teraz sformułować zaobserwowane własności w postaci wzorów na wartości funkcji trygonometrycznych całkowitych wielokrotności kąta 90° . Dla dowolnej liczby

całkowitej k mamy:

- $\sin k\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \operatorname{tg} k\pi = 0$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \cos 2k\pi = 1$;
- $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = \cos(2k + 1)\pi = -1$;
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ – nie istnieje.

Postaramy się zastosować owe wzory w zadaniach. Zaczniemy od bezpośredniego wykorzystania uzyskanych wzorów.

Przykład 1

Spróbujemy wyznaczyć następujące wartości funkcji trygonometrycznych:

- $\sin 540^\circ$;
- $\cos 270^\circ$;
- $\operatorname{tg}(-90^\circ)$.

Rozwiązanie:

Zaczynając od pierwszego z obliczanych wyrażeń:

$$\sin 540^\circ = \sin(3 \cdot 180^\circ) = 0$$

W drugim przypadku jesteśmy w stanie wyczytać wartość funkcji z omawianej uprzednio tabelki.

$$\cos 270^\circ = \cos \frac{3\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 0$$

Podobnie jest w ostatnim przypadku, z tą różnicą, że szukana przez nas wartość $\operatorname{tg}(-90^\circ) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)$ nie istnieje.

Czasami zmuszeni jesteśmy wykorzystywać znajomość wartości funkcji trygonometrycznych wielokrotności kąta prostego.

Przykład 2

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin 1350^\circ \cdot \sin 8730^\circ}{\cos 11340^\circ}$.

Rozwiązanie:

$$\frac{\sin 1350^\circ \cdot \sin 8730^\circ}{\cos 11340^\circ} = \frac{\sin \frac{15\pi}{2} \cdot \sin \frac{97\pi}{2}}{\cos 63\pi} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 6\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 48\pi\right)}{\cos 63\pi} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Przejdźmy do zadań, które wymagają od nas mniej bezpośredniego wykorzystania poznanych wartości.

Przykład 3

Wyznamy wszystkie wartości kąta α , dla których spełnione jest równanie $\sin \alpha + \sin(\alpha + 90^\circ) \cdot \sin \alpha = 0$.

Rozwiązanie:

Wyłączając przed nawias wyrażenie $\sin \alpha$ uzyskujemy:

$$(1 + \sin(\alpha + 90^\circ)) \cdot \sin \alpha = 0$$

Mamy więc do czynienia z sytuacją, gdzie iloczyn dwóch liczb rzeczywistych jest równy zero. Oznacza to, że co najmniej jeden z czynników jest zerem. Tak więc:

$$1 + \sin(\alpha + 90^\circ) = 0 \vee \sin \alpha = 0$$

Pierwsza równość z powyższej alternatywy po przekształceniu daje się zapisać jako:

$$\sin(\alpha + 90^\circ) = -1$$

Zauważmy, że podstawiając $x = \alpha + 90^\circ$ uzyskujemy, że $\sin x = -1$. Wiemy, że dla całkowitych wartości k zachodzi $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$. Zatem:

$$x = \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ skąd } \alpha = (2k + 1)\pi.$$

Rozważmy drugą z możliwości, tj. $\sin \alpha = 0$. Wiemy, że sinus dowolnej całkowitej wielokrotności kąta π wynosi 0, tak więc z drugiej składowej alternatywy mamy $\alpha = k\pi$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą.

Ostatecznie, dochodzimy do wniosku że $\alpha \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ (jako że zbiór rozwiązań drugiego równania obejmuje wszystkie rozwiązania z pierwszego).

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $\frac{1 - \cos 4x}{\sin x} = 0$.

Rozwiązanie:

Zacznijmy od wyznaczenia dziedziny.

Oczywiście $\sin x \neq 0$, więc $x \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przyrównując licznik do zera otrzymujemy równanie:

$$1 - \cos 4x = 0, \text{ więc}$$

$$4x = 2k\pi, \text{ czyli } x = \frac{1}{2}k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Uwzględniając założenia otrzymujemy rozwiązania:

$$x = \frac{2k+1}{2}\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 5

Rozwiążemy równanie: $\sin^2(2\alpha + \frac{\pi}{2}) + \sin(2\alpha + \frac{\pi}{2}) = 0$

Rozwiązanie:

Wylączając $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2})$ przed nawias otrzymujemy równanie:

$$\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2})(\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2}) + 1) = 0.$$

Zatem $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2}) = 0$ lub $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2}) = -1$, więc

$$2\alpha + \frac{\pi}{2} = k\pi \text{ lub } 2\alpha + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Mamy zatem:

$$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ lub } 2\alpha = -\pi + 2k\pi.$$

Ostatecznie dostajemy dwie serie rozwiązań:

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi \text{ lub } \alpha = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Zauważmy, że w powyższym rozumowaniu wykorzystaliśmy obserwację niejako odwrotną do rozumowania stosowanego w poprzednich przykładach. Tym razem z faktu, że $\sin \alpha = 0$ wywnioskowaliśmy, że α jest wielokrotnością kąta 180° . Warto mieć na uwadze, że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć wartości tego kąta w sposób jednoznaczny bez dodatkowych informacji, gdyż funkcje trygonometryczne nie są **różnowartościowe**.

Słownik

funkcja okresowa

funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy okresową, jeżeli istnieje taka liczba $T > 0$ (nazywana okresem funkcji), że $f(x + T) = f(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Funkcje trygonometryczne są przykładami funkcji okresowych

funkcja różnowartościowa

funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy różnowartościową, gdy dla różnych argumentów przyjmuje różne wartości, tzn. dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $x \neq y$ zachodzi $f(x) \neq f(y)$.

Przykładem funkcji różnowartościowej jest funkcja identycznościowa $f(x) = x$

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Wartości funkcji trygonometrycznych dla wielokrotności kąta prostego możemy wyznaczyć odwołując się do wykresu tych funkcji. Możemy też skorzystać z definicji funkcji trygonometrycznych dla dowolnego kąta, wykorzystujących okrąg jednostkowy. Zapoznaj się z poniższą prezentacją multimedialną, która ilustruje w jaki sposób możemy wyznaczać owe wartości. Następnie rozwiąż polecenia związane z przedstawianymi w prezentacji treściami.

Polecenie 2

Opierając się na rozumowaniu z prezentacji, uzupełnij poniższą tabelę, wpisując poprawne liczby.

α	-90°	-180°	-270°
x			
y			
$\sin \alpha$			
$\cos \alpha$			
$\operatorname{tg} \alpha$	nie istnieje		nie istnieje

Polecenie 3

Wykorzystując uzupełnioną tabelę z Polecenia 2, oblicz wartość stałej L zadanej wzorem:

$$L = -\frac{4 \cdot \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)} + 17 \cos(-\pi) \cdot \operatorname{tg}(-\pi) + 3 \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3}{2} \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Przeciągnij odpowiednie wyrażenia w puste miejsca w tekście:

Wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta prostego są łatwe do zapamiętania. W wielokrotnościach kąta funkcje i tangens przyjmują wartość . Podobnie w przypadku wielokrotności kąta 90° i funkcji . Wartość 1 jest przyjmowana przez funkcję cosinus w argumentach postaci , natomiast przez sinus w argumentach, które można zapisać jako , gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

nieparzystych

(-1)

$k \cdot 180^\circ$

$180^\circ + k \cdot 360^\circ$

prostego

pełnego

półpełnego

tangens

cosinus

$270^\circ + k \cdot 360^\circ$

0

$90^\circ + k \cdot 180^\circ$

sinus

$90^\circ + k \cdot 360^\circ$

$k \cdot 360^\circ$

Ćwiczenie 2



Wskaż wartość kąta α , dla którego spełnione jest poniższe równanie:

$$\sin \alpha + \cos(\alpha + 90^\circ) + \cos \alpha = 0$$

☐ 6930°

☐ 6300°

☐ 4320°

☐ 15300°

Ćwiczenie 3



Wskaż wartość kąta α , dla którego spełniony jest poniższy układ równań, jeśli wiadomo, że

$$\begin{cases} 5 \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \sin 4\alpha = 0 \\ \operatorname{tg} \alpha = 0 \end{cases}$$

☐ π

☐ $\frac{\pi}{4}$

☐ $\frac{3\pi}{2}$

☐ żadna z powyższych

☐ $\frac{\pi}{2}$

Ćwiczenie 4



Wskaż wszystkie wartości kąta α , dla którego spełnione jest poniższe równanie:

$$\frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{2} + \frac{\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{2} - \log_{\sqrt{3}} 19 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

☐ 270°

☐ 0°

☐ 90°

☐ 180°

Ćwiczenie 5



Podaj miarę kąta α , dla którego spełnione jest poniższe równanie, jeśli wiadomo, że jest on wielokrotnością kąta prostego należącą do przedziału $(9560^\circ, 9900^\circ)$.

$$\sqrt{\frac{1-\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1$$

Rozwiązanie: °

Ćwiczenie 6



Połącz w pary te wartości funkcji, które są sobie równe:

$\sin 22770^\circ$

$-\operatorname{tg} 16980^\circ$

$\operatorname{tg} 495^\circ$

$-\cos(-540^\circ)$

$\operatorname{tg} 4860^\circ$

$\cos 2610^\circ$

$\operatorname{tg}(-4200^\circ)$

$\operatorname{tg}(-8010^\circ)$

Ćwiczenie 7



Dla jakiej wartości kąta α równanie $x^2 + 18x - 289 \sin \alpha = 0$ ma dwa rozwiązania, które różnią się od siebie o co najmniej 35.

☐ $\alpha = 90^\circ$

☐ $\alpha = 45^\circ$

☐ $\alpha = 270^\circ$

☐ $\alpha = 180^\circ$

☐ $\alpha = 30^\circ$

Ćwiczenie 8



Wśród podanych miar kątów α wskaż wszystkie te, dla których równanie

$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) \cdot x^2 + \sin \alpha \cdot 8\sqrt{3}x + 42 = 0$ ma dwa różne pierwiastki spełniające warunki:

$x_1 \cdot x_2 = 14\sqrt{3}$ oraz $x_1 + x_2 = -8$.

☐ 990°

☐ -360°

☐ 810°

☐ 1530°

☐ 540°

Dla nauczyciela

Autor: Filip Turoboś

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90°

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulator;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- określa wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90° ,
- wykorzystuje znajomość wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90° w zadaniach.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- telefony z dostępem do internetu.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat lekcji oraz cele, wybrany uczeń formułuje kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 90°

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi uczniów, aby zapoznali się z treścią materiału w sekcji „Prezentacja multimedialna”. Następnie na forum klasy wspólnie wyjaśniają ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel przypomina temat zajęć: „Wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90° ” i podsumowuje przebieg zajęć. Wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Prezentacja multimedialna” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta 90° ”.