



Ciąg geometryczny w zadaniach z historii matematyki

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Ciąg geometryczny w zadaniach z historii matematyki

Źródło: Johannes Plenio, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>, domena publiczna.

Matematyka, jak przystało na królową nauk, jest dyscypliną dość trudną. Wymaga bowiem umiejętności abstrakcyjnego i logicznego myślenia. Dlatego dość łatwo zaimponować znajomym, rozwiązując z pozoru bardzo trudne zagadki matematyczne. Wiedziały o tym już osiemnastowieczne damy, zabawiając matematycznymi historyjkami gości, którzy zjawili się na popołudniową herbatkę.



W altanie

1882 Muzeum Narodowe w Warszawie

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

W tym materiale przedstawimy kilka takich zadań, znanych z historii matematyki, związanych z ciągiem geometrycznym. Być może i Tobie uda się wykorzystać pozyskane wiadomości, zaskakując przyjaciół znajomością łatwych rozwiązań skomplikowanych problemów.

Twoje cele

- Rozwiążesz zadania znane z historii matematyki, korzystając z własności ciągu geometrycznego.
- Rozwiążesz graficznie zadania z ciągiem geometrycznym.
- Dobierzesz odpowiedni model matematyczny do analizy i rozwiązania zadania z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

Ciąg to wydawałoby się pojęcie abstrakcyjne, wymyślone tylko po to, aby laik, słysząc rozmowę matematyków, nie wiedział o co chodzi. A jednak tak nie jest. Wykorzystanie własności ciągów geometrycznych pozwala na rozwiązanie wielu problemów z otaczającej nas rzeczywistości.

A wszystko ponoć zaczęło się wtedy, gdy władca Indii zapytał wynalazcę szachów jakiego wynagrodzenia sobie życzy. Wtedy sprytny wynalazca poprosił, aby władca ofiarował mu ziarna pszenicy – tyle ziaren, ile zmieści się na polach szachownicy. Ziarna mają być układane według prostej zasady – na pierwszym polu jedno ziarno, na drugim dwa, na trzecim cztery, i tak dalej – na każdym następnym polu dwa razy więcej niż na poprzednim. Władca bardzo chętnie zgodził się na to życzenie, ale niestety później bardzo tego żałował.

Liczby ziaren na poszczególnych polach tworzyły ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = 2$. Szachownica ma 64 pola. Korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, obliczymy ile ziaren powinien otrzymać sprytny wynalazca.



Sam s soboju, ili Igra w szachmaty

Autor: Grigorij Miasojedow, 1907 r.

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Nim to zrobimy – przypomnienie odpowiedniego twierdzenia.

Twierdzenie: Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

- $S_n = n \cdot a_1$, gdy $q = 1$
- $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, gdy $q \neq 1$

Teraz już możemy obliczyć potrzebną sumę.

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 \approx 18\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

Przyjmując, że tysiąc ziaren pszenicy waży 50 g, obliczymy ile ważyłaby pszenica, którą miał dostać twórca szachów.

$$18 \cdot 10^{18} \cdot 50 = 9 \cdot 10^{20} \text{ [g]}$$

$$1 \text{ t} = 10^6 \text{ g}$$

$$9 \cdot 10^{20} \text{ g} = 9 \cdot 10^{14} \text{ t}$$

Okazuje się, że taka ilość pszenicy znacznie przekracza roczne zbiory z całej planety!

Jeszcze jeden podobny problem, związany z ciągiem geometrycznym o ilorazie 2, stanowiący wdzięczny temat do popisania się wiedzą matematyczną.

Rozwiązując to zadanie, podobnie jak poprzednie, należy zwrócić uwagę, jak szybko rosną wyrazy ciągu geometrycznego o ilorazie $q > 1$.

Przykład 1

W osiemnastowiecznym rosyjskim podręczniku do matematyki L. Magnickiego można znaleźć takie oto zadanie:

Pewien handlarz sprzedał konia za 156 rubli. Ale wieśniak nabywca wkrótce po tej sprzedaży rozmyślił się i począł molestować handlarza, żeby wziął konia z powrotem, a jemu oddał pieniądze, gdyż koń nie jest wart tak wielkiej sumy. Handlarz wówczas zaproponował mu inną transakcję.

- Jeśli uważasz, że koń jest za drogi, to ci go daję darmo, a ty kup tylko ode mnie hufnale w jego podkowach. Zapłacisz mi tanio: za pierwszy hufnal połuszkę, za drugi hufnal – 2 połuszki, za trzeci – kopiejkę itd.

Wieśniak kombinując sobie, że nie może wypaść chyba za wszystkie hufnale razem więcej niż jakie 10 rubli, chętnie zgodził się na taką propozycję. Czy wieśniak ten oszukał się i na ile rubli?

Nim rozwiążemy zadanie, kilka przydatnych informacji:

- Hufnal to duży gwóźdź służący do przybijania podków koniom.
- Koń ma cztery podkowy. W każdej podkowie jest sześć hufnali.
- Połuszka to rosyjska moneta warta $\frac{1}{4}$ kopiejki.
- Rubel to 100 kopiejek, czyli 400 połuszek.

Wiemy już, że koń ma cztery podkowy, a w każdej jest sześć hufnali, zatem wieśniak za hufnale powinien zapłacić kolejno:

1, 2, 2^2 , 2^3 , ..., 2^{23} połuszek.

Aby określić kwotę, jaką powinien zapłacić wieśniak, należy obliczyć sumę 24-wyrazowego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = 2$.

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{22} + 2^{23} = 1 \cdot \frac{1-2^{24}}{1-2}$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{22} + 2^{23} = 2^{24} - 1$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{22} + 2^{23} = 16777215$$

Kwotę wyrażoną w połuszkach zamieniamy na kwotę wyrażoną w rublach – wynik zaokrąglimy do całości.

$$16777215 : 400 \approx 41943$$

Odpowiedź:

Wieśniak powinien zapłacić ponad 41943 ruble, a więc dużo więcej niż 10 rubli.

Teraz przykłady klasycznych zadań, zainspirowanych ciągami o ilorazie $\frac{1}{2}$.

Przypomnijmy najpierw wzór na [wyraz ogólny ciągu geometrycznego](#), który wykorzystamy w obliczeniach.

Twierdzenie: Wyraz ogólny ciągu geometrycznego

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q , to n -ty wyraz tego ciągu określony jest wzorem:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Przykład 2

Na przyjęciu nudzący się gość zaczął składać serwetkę na pół, następnie znowu na pół, raz jeszcze na pół, itd. Serwetka ma grubość zaledwie $\frac{1}{16}$ mm. Gdyby udało mu się złożyć w ten sposób serwetkę 50 razy, to jak myślisz jaką grubość miałby powstały w ten sposób „stosik”?

Zauważmy, że początkowa grubość serwetki oraz grubości „stosiku” po kolejnych złożeniach, tworzą ciąg geometryczny. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy $a_1 = \frac{1}{16}$, a iloraz $q = 2$.

Obliczamy grubość „stosiku” po 50 złożeniu, czyli pięćdziesiąty pierwszy wyraz tego ciągu.

$$a_{51} = \frac{1}{16} \cdot 2^{50} = 2^{46} \text{ [mm]}$$

$$2^{46} = 70368744177664$$

$$1 \text{ km} = 1000000 \text{ mm}$$

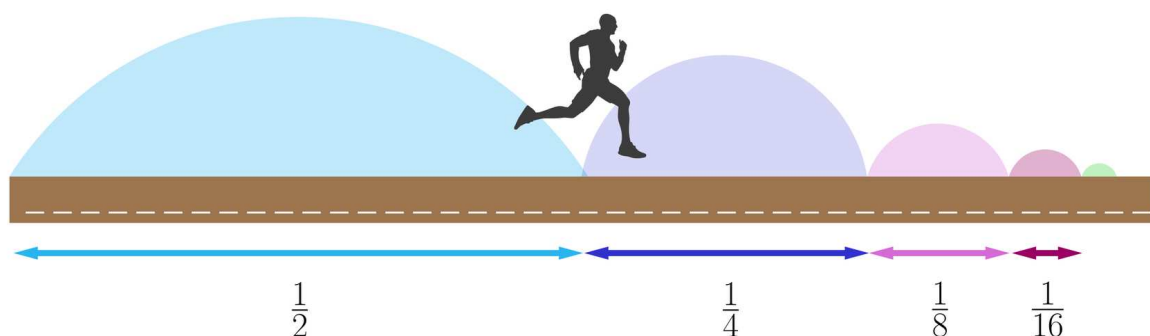
$$\text{Zatem } 2^{46} \text{ mm} \approx 70000000 \text{ km}$$

Miejmy nadzieję, że znudzonemu gościowi nie udało się złożyć aż 50 razy serwetki, bo utworzony w ten sposób „stosik” byłby ponad 180 razy wyższy niż odległość z Ziemi do Księżyca!

Przykład 3

Biegacz ma do pokonania długą drogę. W czasie pierwszej godziny biegu pokonał aż połowę całej trasy. Jednak z upływem czasu był coraz bardziej zmęczony i w ciągu drugiej godziny pokonał $\frac{1}{4}$ trasy, w ciągu trzeciej godziny $\frac{1}{8}$ całej trasy, w ciągu czwartej godziny $\frac{1}{16}$ trasy, itd.

Jaka część drogi została mu jeszcze do pokonania po sześciu godzinach biegu?



Obliczymy najpierw, jaką część całej trasy pokonał biegacz w ciągu sześciu godzin. Należy obliczyć:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}.$$

Zauważmy, że składniki sumy to kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$.

Obliczamy sumę 6 kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego.

$$S_6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

Obliczamy, jaka część trasy została jeszcze do pokonania.

$$1 - \frac{63}{64} = \frac{1}{64}$$

Odpowiedź:

Biegaczowi pozostało do pokonania $\frac{1}{64}$ całej trasy.

Jeśli przyjmiemy za Galileuszem, że matematyka jest alfabetem, za pomocą którego Bóg opisał wszechświat, to jednym z ważnych elementów tego alfabetu jest nieskończoność. Kolejna zagadka, którą w osiemnastym wieku damy zadawały kawalerom, dotyczy właśnie ciągu geometrycznego nieskończonego. I nie będziemy tu posługiwać się skomplikowanymi wzorami (wszak damy nie były złośliwe i nie chciały konfundować kawalerów z powodu nieznamomości matematyki wyższej).

Wykorzystamy trik geometryczny, oparty na rozważaniach starożytnych uczonych.

Przykład 4

Ile to jest $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \dots$?

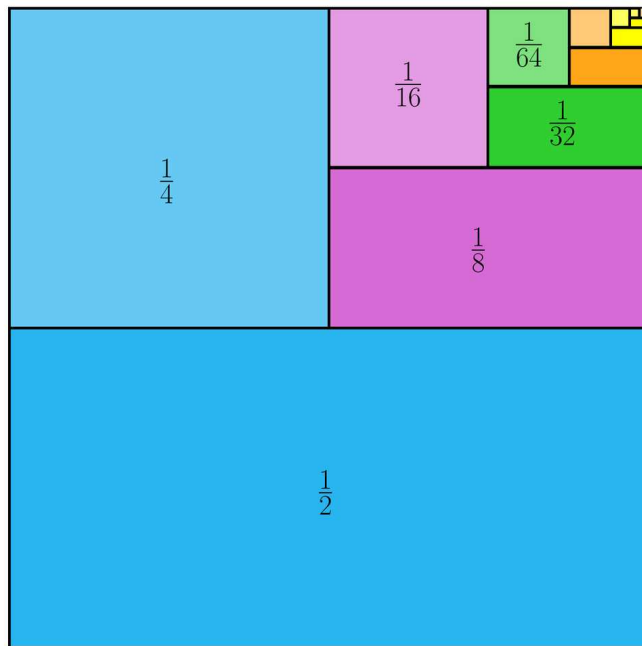
Dla efektu można wypisać jeszcze więcej składników. Wtedy wydaje się, że liczba którą otrzymamy będzie bardzo duża, albo wręcz przeciwnie – bardzo mała. A jak jest naprawdę?

Składniki to kolejne wyrazy nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie $q = \frac{1}{2}$ i pierwszym wyrazie równym $a_1 = \frac{1}{2}$. Sumę tę możemy obliczyć z odpowiedniego wzoru (którego kawalerowie na pewno nie znali):

$$S = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Albo też posłużyć się sprytnie wykonanym rysunkiem kwadratu o boku 1.



I wtedy nie potrzebujemy niezrozumiałych dla laika wzorów, aby zadziwić znajomych. Od razu widać, że suma jest równa 1.

W ostatnim przykładzie uwalniamy się od ciągów o ilorazie 2 lub $\frac{1}{2}$ i przytaczamy równie znane zadanie o piłce.

Przykład 5

Piłkę rzucono z wysokości 270 cm. Piłka odbijając się, za każdym razem osiąga $\frac{2}{3}$ wysokości osiągniętej przy poprzednim odbiciu. Obliczymy, jaką łącznie długość ma droga (w pionie), którą przebyła piłka do piątego odbicia.

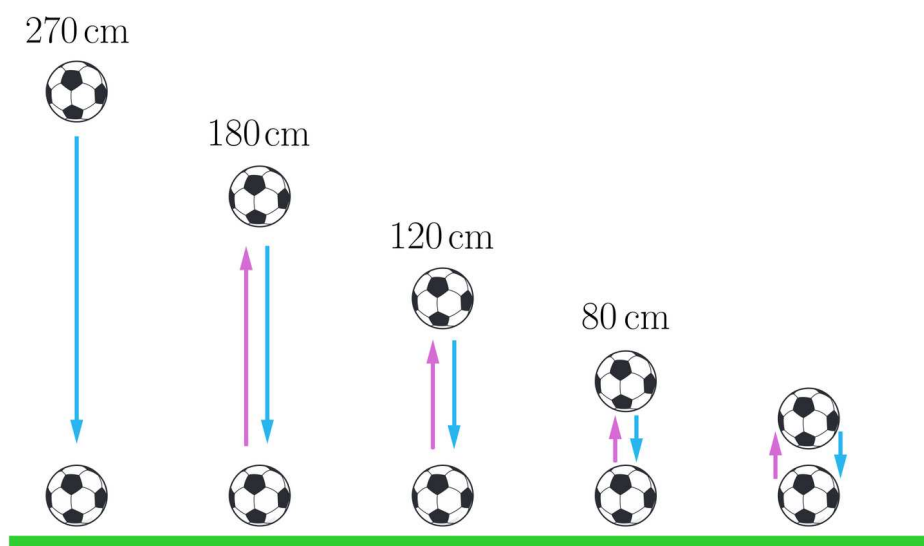
- Do pierwszego odbicia piłka przebyła drogę długości 270 cm.
- Następnie piłka poszybowała w górę na wysokość $270 \cdot \frac{2}{3} = 180$ centymetrów. I spadła z tej wysokości.
- Teraz piłka odbija się na wysokość $180 \cdot \frac{2}{3} = 120$ centymetrów i z tej wysokości spada.
- I kolejne odbicie – tym razem na wysokość $120 \cdot \frac{2}{3} = 80$ centymetrów.
- ...

Zauważmy, że wyznaczone liczby

270, 180, 120, 80, ...

tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{2}{3}$ i pierwszym wyrazie 270.

Aby obliczyć łączną długość drogi, musimy uwzględnić ruch piłki w górę i w dół.



Obliczamy długość drogi s przebytej przez piłkę – skorzystamy ze wzoru na [sumę \$n\$ początkowych wyrazów ciągu geometrycznego](#).

$$s = 270 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 270 \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^4}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$s = 270 + \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot 270 \cdot \left(1 - \frac{16}{81}\right)$$

$$s = 270 + 1080 \cdot \frac{65}{81} = 270 + 866\frac{2}{3}$$

$$s = 1136\frac{2}{3} \text{ cm}$$

Odpowiedź:

Piłka przebyła drogę długości $1136\frac{2}{3}$ cm.

Słownik

suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o ilorazie q wyraża się wzorem:

- $S_n = n \cdot a_1$, gdy $q = 1$
- $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ gdy $q \neq 1$

wyraz ogólny ciągu geometrycznego

jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q , to n -ty wyraz tego ciągu określony jest wzorem:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Animacja

Polecenie 1

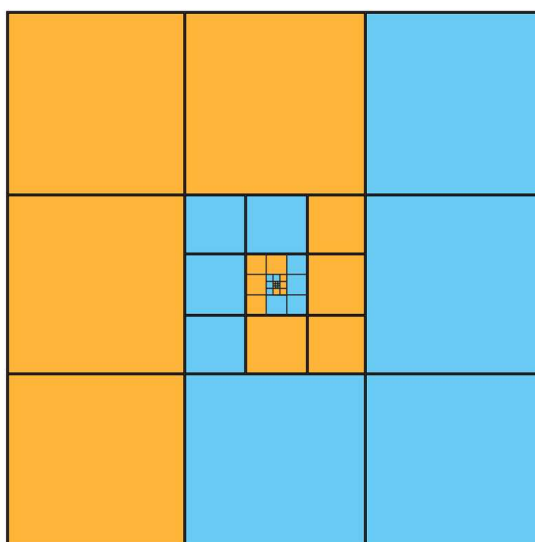
Znamy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Ale wiemy też, że ciąg geometryczny nie zawsze jest skończony. Czy można zatem określić sumę jego wszystkich wyrazów, nie korzystając z odpowiednich wzorów? Okazuje się, że przy określaniu tej sumy w niektórych przypadkach można skorzystać z odpowiednich rysunków, opartych na pomysłach sprzed tysięcy lat. Zapoznaj się z przykładem takiej sytuacji przedstawionym w animacji. Staraj się odgadnąć i uzasadnić wynik, a następnie porównaj z prezentowanym rozwiązaniem.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D2B1tEX8q>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej ciągu geometrycznego.

Polecenie 2

Na diagramie przedstawiono ilustrację graficzną sumy pewnego nieskończonego ciągu geometrycznego. Zapisz pierwszych pięć składników tej sumy i podaj jej wynik.



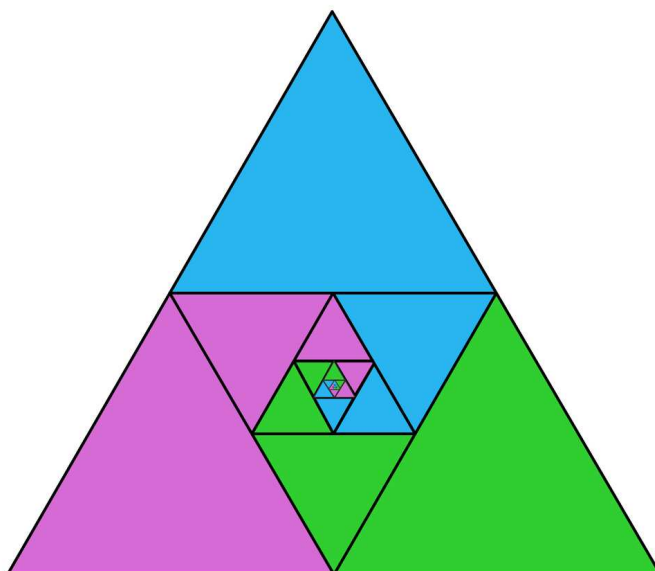
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Rysujemy trójkąt równoboczny o polu równym 1. Następnie dzielimy go na cztery przystające trójkąty równoboczne. Jeden z tych trójkątów zamalowujemy na zielono, a drugi na niebiesko. Wybieramy jeden trójkąt pomalowany na inny kolor, dzielimy go na cztery przystające trójkąty i zamalowujemy jeden na niebiesko i jeden na zielono. Postępujemy tak w nieskończoność. Otrzymujemy dwie spirale (jedną niebieską, drugą zieloną) takie, jak na rysunku poniżej.



Zaznacz poprawną odpowiedź. Suma pól zamalowanych trójkątów na zielono i trójkątów zamalowanych na niebiesko jest równa:

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{3}{4}$

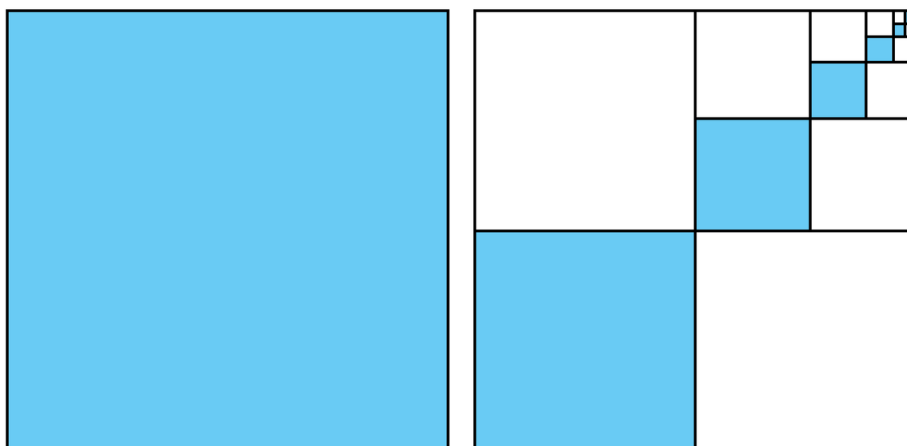
☐ $\frac{1}{4}$

☐ $\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 2



Zapoznaj się z poniższym rysunkiem i wykonaj polecenie.



Zaznacz poprawną odpowiedź. Korzystając z rysunku, można ustalić, że suma

$$\frac{1}{4^0} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots$$

jest równa:

☐ $\frac{4}{3}$

☐ $\frac{1}{3}$

☐ $\frac{2}{3}$

☐ 1

Ćwiczenie 3



Pewien fryzjer zgodził się czesać tylko ekscentrycznego arystokratę, pod warunkiem, że jego pensja za pierwszy dzień pracy wyniesie 1 dukat, za drugi dzień 2 dukaty, za trzeci dzień 4 dukaty itd., przez cały miesiąc. Ile dni musi pracować ten fryzjer, aby zarobić 4095 dukatów? Uzupełnij rozwiązanie zadania, przeciągając odpowiednie liczby.

Liczby 1, 2, 4, , , ... tworzą ciąg geometryczny (a_n) ,
w którym $a_1 =$, $q =$, $S_n =$.

Korzystamy ze wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.

$$1 \cdot [(1 - \text{) : (1 - 2)}] = 4095$$

$$\text{} + 2^n = 4095$$

$$2^n = \text{$$

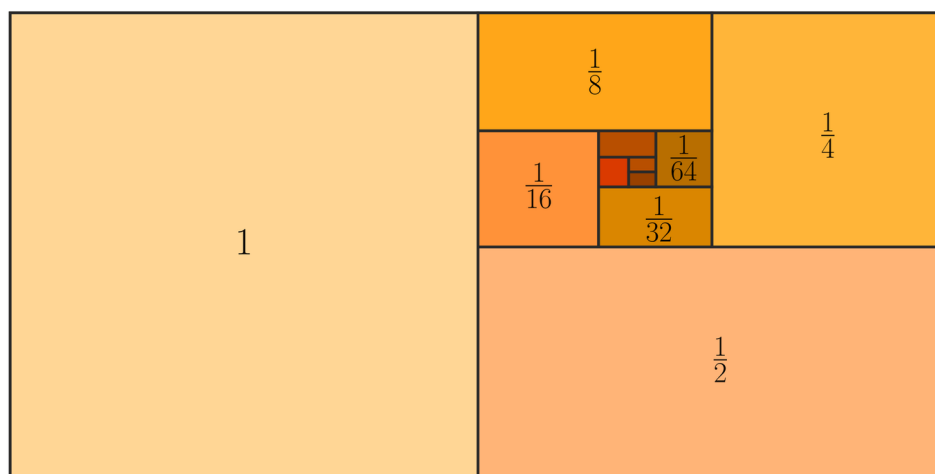
$$n = \text{$$

Odpowiedź: Fryzjer musiałby pracować dni.

Ćwiczenie 4



Diagram ilustruje sumę wyrazów pewnego ciągu geometrycznego nieskończonego.



Zapisz pierwsze pięć składników tej sumy i podaj jej wynik.

... + ... + ... + ... + ... + ... = ...

Ćwiczenie 5



Pewien wirus rozprzestrzenia się, gdy zarażona osoba wita się z inną przez podanie ręki. Chory przywitał się przez podanie ręki z czterema osobami w ciągu godziny. W ciągu kolejnej godziny każda z tych osób przywitała się przez podanie ręki z czterema osobami, z którymi jeszcze nikt się nie witał, itd.

Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Wystarczyło 10 godzin, aby zarażo się około miliona osób.

☐ Po trzech godzinach będzie już zarażonych ponad 50 osób.

☐ Ponad dwadzieścia tysięcy osób mogło zarażić się w ten sposób w ciągu ośmiu godzin.

Ćwiczenie 6



Robotnik musi wykopać kanał długości 400 m. W czasie pierwszej godziny pracy każdego dnia wykonuje 4 m bieżące kanału. W ciągu każdej kolejnej godziny wydajność jego pracy spada o 20% w stosunku do poprzedniej godziny.

Przeciągnij poprawne liczby.

W czasie trzeciej godziny robotnik wykopie m bieżących kanału.

Po czterech godzinach będzie wykopanych ponad m bieżących kanału.

Robotnik pracuje tylko cztery godziny dziennie. Będzie zatem potrzebował dni na wykonanie całej pracy.

34

2,56

11

Ćwiczenie 7



Pewien książę chciał spróbować czarodziejskich jabłek. Jabłonka rośla na górze o wysokości 800 metrów. Droga prowadząca na szczyt była jednak bardzo niebezpieczna. Książę wynajął więc rycerza, który miał dla niego zdobyć jabłka. Za pokonanie pierwszych 100 m drogi zaproponował mu 2 talary, a za pokonanie każdego następnych 100 m aż $\frac{5}{4}$ tego, co poprzednio. Oblicz, ile będzie musiał zapłacić książę rycerzowi, gdy ten dotrze na szczyt góry. Wynik zaokrąglij do całości.

Ćwiczenie 8



W konkursie na Miss Szklanego Pantofelka przyznano kilka nagród na łączną kwotę 14520 zł. Pierwsza nagroda wynosiła 9720 zł, a każda następna stanowiła pewien stały ułamek poprzedniej. Najniższa nagroda wynosiła 120 zł. Oblicz, ile nagród przyznano. Ewelina otrzymała trzecią nagrodę. Jaką kwotę otrzymała?

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg geometryczny w zadaniach z historii matematyki

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

6) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;

7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje zadania znane z historii matematyki, korzystając z własności ciągu geometrycznego
- rozwiązuje graficznie zadania z ciągiem geometrycznym
- dobiera odpowiedni model matematyczny do analizy i rozwiązania zadania z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- inscenizacja
- mini-test

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie powtarzają wspólnie wiadomości dotyczące ciągu geometrycznego – może to być na przykład szybki test przygotowany wcześniej przez nauczyciela, na pytania którego uczniowie odpowiadają kolejno.
Dyskusja – w jakich kontekstach realistycznych można wykorzystać wiadomości o ciągach geometrycznych. Uczniowie dzielą się posiadaną wiedzą, snują przypuszczenia.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Wybrani wcześniej uczniowie przedstawiają mini-inscenizacje ilustrujące wybrane sytuacje opisane w sekcji „Przeczytaj”. Scenki zbudowane są w ten sposób, aby uczniowie, pracując w grupach, musieli znaleźć rozwiązania prezentowanych problemów. Grupy prezentują kolejno rozwiązania zadań, „aktorzy” wyjaśniają wątpliwości, sprawdzają poprawność wyników.
2. Uczniowie pracują nadal w grupach. Ich zadaniem jest znalezienie graficznej interpretacji sum ciągów geometrycznych o ilorazach odpowiednio $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$. Swoje ustalenia porównują, oglądając animację.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
Liderzy grup dzielą się refleksjami na temat prac grup.
Wspólna dyskusja – czy interpretacja geometryczna pomaga, czy przeszkadza w rozwiązywaniu problemów algebraicznych.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i „aktorów”.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest poszukanie w dostępnych źródłach (lub wymyślenie) informacji na temat graficznej interpretacji innych sum ciągu geometrycznego, niż prezentowane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- [Ciąg arytmetyczny i geometryczny zastosowanie](#)
- [Ciąg geometryczny](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wprowadzeniem do zajęć lub materiałem pomocniczym do rozwiązywania zadań domowych.