Związek między postacią iloczynową, kanoniczną i ogólną funkcji kwadratowej

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Związek między postacią iloczynową, kanoniczną i ogólną funkcji kwadratowej

Źródło: Daniel Bustos, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Funkcję kwadratową możemy zapisać w jednej z trzech postaci: ogólnej, iloczynowej (jeśli istnieje), kanonicznej. W tym materiale poznasz związki między postaciami funkcji kwadratowej oraz zastosujesz poznane wzory do rozwiązywania zadań.

> **Twoje cele**
>
> - Wykorzystasz związki między różnymi postaciami funkcji kwadratowej.
> - Wyznaczysz wzory funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i, o ile istnieje, iloczynowej.
> - Zastosujesz poznane wzory do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Wzór funkcji kwadratowej zapisanej w postaci ogólnej:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$ i a, b, c są liczbami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$. Wzór funkcji kwadratowej możemy zapisać:

- w postaci kanonicznej:

  $$f(x) = a(x-p)^2 + q,$$

  gdzie $p = -\frac{b}{2\text{a}}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$ oraz $\Delta = b^2 - 4ac$;

- w postaci iloczynowej:

  $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

  gdy wyróżnik Δ jest nieujemny oraz $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ są miejscami zerowymi funkcji.

Pokażemy przekształcenia postaci ogólnej funkcji kwadratowej prowadzące do postaci kanonicznej i przekształcenia z postaci kanonicznej do postaci iloczynowej, o ile postać ta istnieje.

Aby z postaci ogólnej funkcji kwadratowej

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

przejść do postaci kanonicznej, wykonujemy następujące działania:

- dodajemy i odejmujemy $\frac{b^2}{4a}$,
- z wyrażenia $ax^2 + bx$ wyłączamy a przed nawias,
- wyrażenie $\frac{b}{a}x$ zapisujemy w postaci $2 \cdot \frac{b}{2a}x$,
- wykorzystujemy wzór skróconego mnożenia $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

A zatem:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Po podstawieniu $\Delta = b^2 - 4ac$ otrzymujemy:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Jeżeli przyjmiemy oznaczenia: $p = -\frac{b}{2a}$ i $q = -\frac{\Delta}{4a}$,

to postać kanoniczna wyraża się wzorem:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q.$$

Z ostatniego zapisu wynika, że wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ możemy otrzymać z wykresu funkcji $h(x) = ax^2$ w przesunięciu równoległym, w którym obrazem wierzchołka $W_0 = (0, 0)$ paraboli o równaniu $y = ax^2$ jest punkt $W = (p, q)$.

> **Twierdzenie: Przesunięcie równoległe o wektor**
>
> W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $f(x) = ax^2$, gdzie $a \neq 0$, o wektor $\vec{v} = [p, q]$ otrzymujemy wykres funkcji $g(x) = a(x-p)^2 + q$.

Oznacza to, że wierzchołek W paraboli ma współrzędne: $p = -\frac{b}{2a}$ i $q = -\frac{\Delta}{4a}$.

Wykorzystując postać kanoniczną funkcji kwadratowej zapiszemy wzór funkcji   w postaci iloczynowej oraz podamy warunki, w których taki zapis jest możliwy. Mamy zatem:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right].$$

W ostatnim przekształceniu wyłączyliśmy a przed nawias i zapisaliśmy $\frac{\Delta}{4a^2}$ jako $\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$. Zapis $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ jest możliwy tylko w sytuacji, gdy $\Delta \geq 0$.

Kontynuując przekształcanie, wykorzystamy wzór na różnicę kwadratów $n^2 - k^2 = (n-k)(n+k)$:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Oznaczając $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ otrzymujemy postać iloczynową funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Jeśli $\Delta = 0$, to:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Oznaczając $x_0 = -\frac{b}{2a}$ otrzymujemy:

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

Przykład 1

Zapiszemy wzór funkcji $f(x) = (x+3)^2 - 4$ w postaci ogólnej i iloczynowej.

Rozwiązanie

Przekształcenie do postaci ogólnej.

I **sposób:**

Wykorzystamy wzór skróconego mnożenia: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$f(x) = (x+3)^2 - 4$

$f(x) = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2\right) - 4$

$f(x) = x^2 + 6x + 9 - 4$

$f(x) = x^2 + 6x + 5$

II **sposób**

Wykorzystujemy informacje o wartościach p i q:

$f(x) = (x+3)^2 - 4$, zatem: $a = 1$, $p = -3$, $q = -4$.

Wykorzystamy wzór: $p = -\frac{b}{2a}$.

Podstawiając: $a = 1$ i $p = -3$ otrzymujemy:

$-3 = -\frac{b}{2 \cdot 1}$, czyli: $b = 6$.

Ponadto $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 36 - 4c$, zaś $q = -\frac{\Delta}{4a}$, zatem, po podstawieniu:

$-4 = -\frac{36-4c}{4\cdot 1}$, co daje: $c = 5$.

Zatem postać ogólna funkcji $f(x) = (x+3)^2 - 4$ to:

$f(x) = x^2 + 6x + 5$.

Przekształcenie do postaci iloczynowej

I **sposób:**

Wykorzystamy wyliczone wartości współczynników: $a = 1$, $b = 6$ i $c = 5$ oraz wzory:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 36 - 4 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$,

stąd:

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{-6+4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

i

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{-6-4}{2} = \frac{-10}{2} = -5$.

Zatem:

$f(x) = 1 \cdot (x - (-1))(x - (-5))$

$f(x) = 1 \cdot (x+1)(x+5)$.

II **sposób**

Wykorzystamy wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$(x+3)^2 - 4 = ((x+3) - 2)((x+3) + 2) =$

$= (x + 3 - 2)(x + 3 + 2) = (x+1)(x+5)$

$f(x) = (x+1)(x+5)$

Przykład 2

Wzór pewnej funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej jest taki sam. Znajdziemy wzór tej funkcji, jeżeli wiadomo, że $f(-1) = 4$ oraz $f(0) = -3$.

Rozwiązanie

Przypomnijmy, jak wygląda wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej.

Postać ogólna: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Postać kanoniczna: $f(x) = a(x-p)^2 + q$.

Aby wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej był taki sam, to współczynniki b i p muszą być równe 0 oraz $c = q$.

Z treści zadania wiemy, że $f(-1) = 4$ i $f(0) = -3$. Musimy ułożyć i rozwiązać odpowiedni układ równań.

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^2 + c = 4 \\ a \cdot 0^2 + c = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 7 \\ c = -3 \end{cases}$$

Zatem postać ogólna i kanoniczna tej funkcji, to $f(x) = 7x^2 - 3$.
Przykład 3

Wyznaczymy wzór funkcji kwadratowej f w postaci ogólnej, gdy współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem tej funkcji to $W = (2, -5)$ oraz jedno z miejsc zerowych, to $x = 4$.

Rozwiązanie

Na początku zapiszemy wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $f(x) = a(x-p)^2 + q$. Z treści zadania wiemy, że $p = 2$ oraz $q = -5$. Zatem $f(x) = a(x-2)^2 - 5$.

Musimy wyznaczyć teraz współczynnik a. Ponieważ dla argumentu $x = 4$ funkcja przyjmuje wartość równą 0, to

$0 = a(4-2)^2 - 5$

$4a = 5$

$a = \frac{5}{4}$.

Wzór funkcji w postaci kanonicznej, to $f(x) = \frac{5}{4}(x-2)^2 - 5$.

Przejdziemy teraz do postaci ogólnej wzoru funkcji f:

$f(x) = \frac{5}{4}(x-2)^2 - 5 = \frac{5}{4}\left(x^2 - 4x + 4\right) - 5 = \frac{5}{4}x^2 - 5x$.
Przykład 4

Napiszemy postać ogólną i iloczynową funkcji kwadratowej, o której wiadomo, że dla argumentu (-3) osiąga wartość równą 6, jednym z jej miejsc zerowych jest liczba 5, dla argumentu 2 osiaga wartość najmniejszą równą $-\frac{27}{8}$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jednym z miejsc zerowych tej funkcji jest liczba 5. Musimy ułożyć odpowiednie równanie:

$25a+5b+c=0.$

Ponadto funkcja dla argumentu 2 osiąga wartość najmniejszą równą $-\frac{27}{8}$. Zatem $p=\frac{-b}{2a}=2$ oraz $q=\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{27}{8}$.

Funkcja dla argumentu (-3) osiąga wartość równą 6, więc $(-3)^2\cdot a+(-3)\cdot b+c=6$.

Na tej podstawie układamy układ równań i obliczamy wartości szukanych współczynników.

$$\begin{cases}25a+5b+c=0\\ b=-4a\\ 9a-3b+c=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}25a-20a+c=0\\ b=-4a\\ 9a+12a+c=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}5a+c=0\\ b=-4a\\ 21a+c=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=\frac{3}{8}\\ b=-\frac{3}{2}\\ c=-\frac{15}{8}\end{cases}$$

Wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, to $f(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{15}{8}$.

Zapiszemy teraz wzór funkcji $f(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{15}{8}$ w postaci iloczynowej.

Wykorzystamy wyliczone wartości współczynników: $a=\frac{3}{8}$, $b=-\frac{3}{2}$ i $c=-\frac{15}{8}$ oraz wzory: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$x_1=\frac{-\left(-\frac{3}{2}\right)+\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\cdot\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)}}{2\cdot\frac{3}{8}}=5$$

$$x_2 = \frac{-\left(-\frac{3}{2}\right)-\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\cdot\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)}}{2\cdot\frac{3}{8}} = -1$$

Zatem wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej, to $f(x) = \frac{3}{8}(x-5)(x+1)$.

Słownik

funkcja kwadratowa

funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$, określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, gdzie a, b, c są liczbami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą związki między postacią iloczynową, kanoniczną i ogólną funkcji kwadratowej, a następnie rozwiąż polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DjrzUpJH9

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej związku między trzema postaciami funkcji kwadratowej.

Polecenie 2

Wzór funkcji $f(x) = -2x^2 - 3x - 2$ przedstaw w postaci kanonicznej. Czy wzór ten można zapisać w postaci iloczynowej?

Polecenie 3

Wzór funkcji $f(x) = x^2 - 4x + 3$ przedstaw w postaci iloczynowej.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Związek między postacią iloczynową, kanoniczną i ogólną funkcji kwadratowej

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n;

2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych.

V. Funkcje

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;

8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje wzory funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeżeli istnieje);
- sprawdza związki między wzorami określającymi współrzędne wierzchołka paraboli i postacią kanoniczną funkcji kwadratowej;
- oblicza miejsca zerowe funkcji kwadratowej i zapisuje wzór funkcji w postaci iloczynowej;
- interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej;
- wyznacza argument dla danej wartości funkcji i odwrotnie;
- rozwiązuje zadania, wykorzystując wiadomości na temat różnych postaci funkcji kwadratowej;
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- tablica intearktywna/rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- uczniowie przypominają definicję funkcji kwadratowej i metodą burzy mózgów przypominaja sposoby zapisu wzoru funkcji kwadratowej;
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

- uczniowie otrzymują zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji PRZECZYTAJ;

- wskazane przez nauczyciela wzory uczniowie zapisują na tablicy;
- uczniowie analizują przykłady zawarte w sekcji PRZECZYTAJ;
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udzielając im wskazówek;
- uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia 1-4 z sekcji SPRAWDŹ SIĘ, nauczyciel pyta poszczególnych uczniów o poprawne odpowiedzi. Pozostali uczniowie omawiają i argumentują ich poprawność. W razie wątpliwości, uczniowie przedstawiają na tablicy poprawne rozwiązanie;
- uczniowie, w parach, oglądają animację oraz rozwiązują polecenia 2-3 znajdujące się pod animacją. Wybrani uczniowie przedstawiają poprawne rozwiązania na tablicy.
- uczniowie pozostają w parach i rozwiązują zadania 5-8 z sekcji SPRAWDŹ SIĘ. Nauczyciel nadzoruje pracę uczniów i w razie potrzeby podaje podpowiedzi. Po zakończonej pracy nauczyciel prosi wybranych uczniów o omówienie rozwiązań zadań na tablicy.

Faza podsumowująca:

- uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień;
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

- Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Związek między postacią iloczynową, kanoniczną i ogólną funkcji kwadratowej”).

Materiały pomocnicze:

- Sposoby opisywania funkcji
- Zależności między wartościami współczynników występujących we wzorach funkcji kwadratowej zapisanej w postaci ogólnej i w postaci kanonicznej
- Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Wskazówki metodyczne:

Animacja może posłużyć jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.

Animację można również wykorzystać w realizacji lekcji „Postać iloczynowa funkcji kwadratowej”.