



Wartość najmniejsza oraz wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

Obliczanie wartości najmniejszej oraz wartości największej funkcji kwadratowej. Ilustracje interaktywne: wartość najmniejsza oraz wartość największa funkcji kwadratowej.

Obliczanie wartości najmniejszej i wartości największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. Przedstawianie ilustracji graficznych. Ilustracja interaktywna: pole powierzchni bocznej pudełka jako funkcja kwadratowa.

Obliczanie wartości najmniejszej oraz wartości największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. Zasób zawiera zadania, w tym zadania interaktywne.

Obliczanie wartości najmniejszej oraz wartości największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. Zapisywanie treści zadania tekstowego w postaci funkcji kwadratowej. Zasób zawiera zadania otwarte z rozwiązaniami, w tym zadania interaktywne.

Obliczanie wartości najmniejszej oraz wartości największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. Zadania na dowodzenie. Zasób zawiera zadania zamknięte z wyjaśnieniami i rozwiązaniami, w tym zadania interaktywne.

Wartość najmniejsza oraz wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym

W tym materiale zawarte są wiadomości na temat funkcji kwadratowej określonej na zbiorze domkniętym. Dowiesz się w jaki sposób wyznaczyć wartość najmniejszą oraz wartość największą tego rodzaju funkcji oraz jak określić na których przedziałach funkcja kwadratowa jest rosnąca, a na których jest ona malejąca.

Przykład 1

Obliczymy wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 4x + 1$ w każdym z podanych przedziałów:

1. $\langle -4, 1 \rangle$,
2. $\langle -1, 3 \rangle$,
3. $\langle 4, 7 \rangle$.

Ustalmy własności funkcji f , gdy jest ona określona dla każdej liczby rzeczywistej.

Ponieważ współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji f jest dodatni, więc wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych do góry. Wierzchołek W tej paraboli ma współrzędne

$$x_W = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2, y_W = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3.$$

Zatem najmniejszą wartością funkcji f jest

$$f(2) = -3.$$

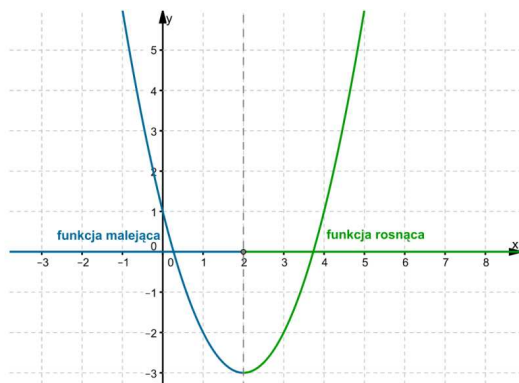
Najmniejszą wartość funkcji f można też obliczyć, korzystając ze wzoru na drugą współrzędną wierzchołka paraboli

$$q = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Zauważmy, że

- maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest malejąca, jest $(-\infty, 2)$,

- maksymalnym przedziałem, w którym funkcja f jest rosnąca, jest $\langle 2, \infty \rangle$.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

1. Przedział $\langle -4, 1 \rangle$ jest zawarty w przedziale $(-\infty, 2)$, więc funkcja f jest w tym przedziale malejąca.

Oznacza to, że

- największą wartością funkcji f w przedziale $\langle -4, 1 \rangle$ jest wartość w lewym krańcu tego przedziału, czyli $f(-4) = 33$,
- najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle -4, 1 \rangle$ jest wartość w prawym krańcu tego przedziału, czyli $f(1) = -2$.

2. Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli należy do przedziału $\langle -1, 3 \rangle$, więc najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ jest $f(2) = -3$.

W przedziale $\langle -1, 2 \rangle$ funkcja f jest malejąca, a w przedziale $\langle 2, 3 \rangle$ ta funkcja jest rosnąca. Wobec tego do ustalenia wartości największej funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ wystarczy porównać wartości $f(-1)$ oraz $f(3)$.

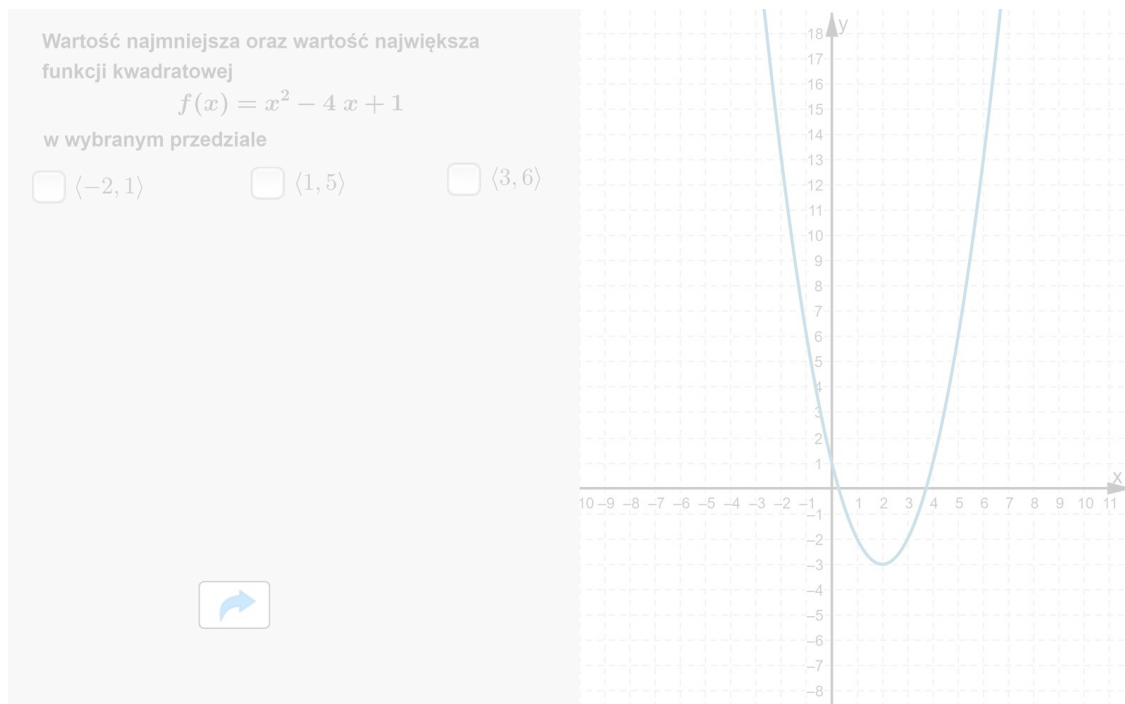
Obliczamy:

$f(-1) = 6$, $f(3) = -2$. Oznacza to, że największą wartością funkcji f w przedziale $\langle -1, 3 \rangle$ jest $f(-1) = 6$.

3. Przedział $\langle 4, 7 \rangle$ jest zawarty w przedziale $\langle 2, \infty \rangle$, więc funkcja f jest w tym przedziale rosnąca.

Wobec tego

- największą wartością funkcji f w przedziale $\langle 4, 7 \rangle$ jest wartość w prawym krańcu tego przedziału, czyli $f(7) = 22$,
- najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle 4, 7 \rangle$ jest wartość w lewym krańcu tego przedziału, czyli $f(4) = 1$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1Ev29y4I>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 2

Obliczymy najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 6x + 2$ w przedziale $\langle -2, 5 \rangle$.

Współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji f jest ujemny, zatem wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w dół.

Wierzchołek W tej paraboli ma współrzędne

$$x_W = \frac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3, y_W = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 2 = 11.$$

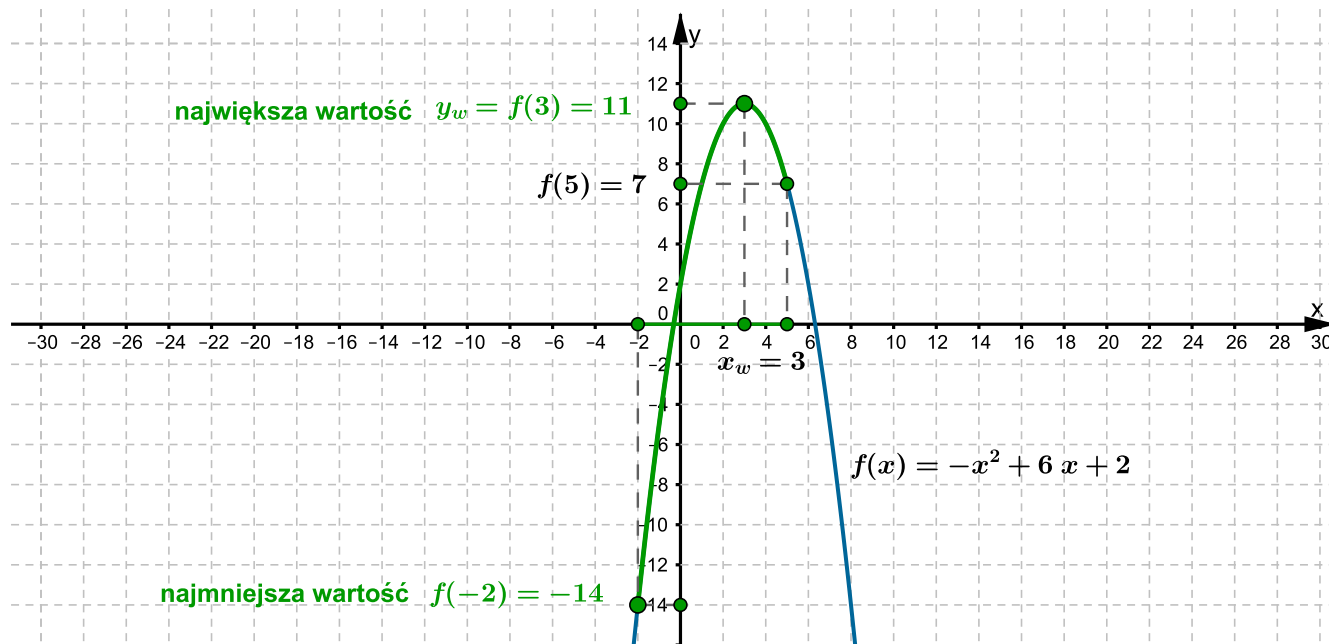
Zatem w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$ funkcja f jest rosnąca, a w przedziale $\langle 3, 5 \rangle$ funkcja f jest malejąca.

Oznacza to, że najmniejszą wartością funkcji f jest odpowiednio $f(-2)$ lub $f(5)$.

Obliczamy:

$$f(-2) = -14, f(5) = 7.$$

Najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle -2, 5 \rangle$ jest więc -14 .



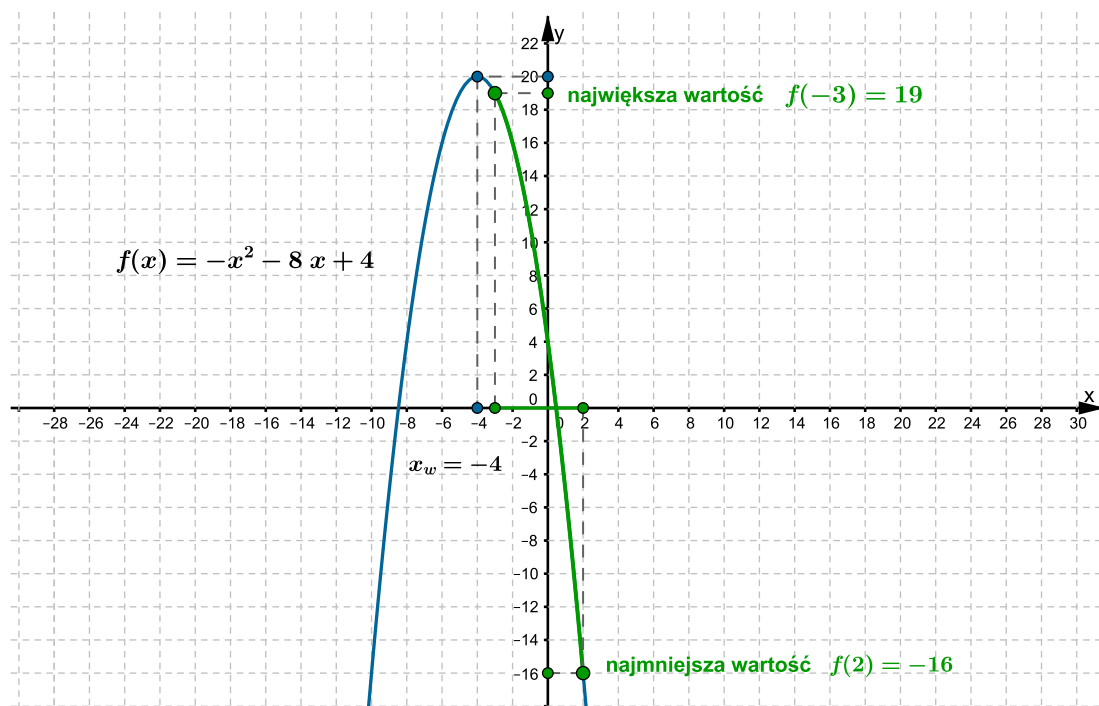
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 3

Obliczymy największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 - 8x + 4$ w przedziale $\langle -3, 2 \rangle$.

Współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji f jest ujemny, zatem wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w dół. Pierwsza współrzędna wierzchołka W tej paraboli jest równa

$$x_W = \frac{-(-8)}{2 \cdot (-1)} = -4.$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Funkcja ta jest zatem rosnąca w przedziale $(-\infty, -4)$ i malejąca w przedziale $(-4, \infty)$. Ponieważ przedział $\langle -3, 2 \rangle$ jest zawarty w przedziale $(-4, \infty)$, więc funkcja f jest w tym przedziale malejąca.

Największą wartość funkcja f przyjmuje w lewym krańcu tego przedziału.

Największą wartością funkcji f w przedziale $\langle -3, 2 \rangle$ jest $f(-3) = 19$.

Przykład 4

Obliczymy wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = (3x - 4)(x + 5)$ w przedziale $\langle -2, 1 \rangle$.

Przekształcamy wzór funkcji f do postaci iloczynowej.

$$f(x) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x + 5).$$

Współczynnik przy x^2 we wzorze funkcji f jest równy 3, zatem wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w górę.

Miejscami zerowymi funkcji f są liczby (-5) oraz $\frac{4}{3}$. Pierwsza współrzędna wierzchołka W tej paraboli jest równa

$$x_W = \frac{-5 + \frac{4}{3}}{2} = -\frac{11}{6} = -1\frac{5}{6}.$$

więc należy do przedziału $\langle -2, 1 \rangle$.

Oznacza to, że liczba

$$f\left(-\frac{11}{6}\right) = 3\left(-\frac{11}{6} - \frac{4}{3}\right)\left(-\frac{11}{6} + 5\right) = -\frac{361}{12} = -30\frac{1}{12}$$

jest najmniejszą wartością funkcji f w przedziale $\langle -2, 1 \rangle$.

Aby ustalić wartość największą, obliczamy wartości funkcji w obu krańcach danego przedziału

$$f(-2) = -30$$

oraz

$$f(1) = -6.$$

Wobec tego (-6) jest największą wartością funkcji f w przedziale $\langle -2, 1 \rangle$.

Przykład 5

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie x z przedziału $\langle -4, 1 \rangle$ różnicę tej liczby i kwadratu liczby o 2 mniejszej od niej. Wyznamy wzór funkcji f oraz obliczymy jej największą wartość w przedziale $\langle -4, 1 \rangle$.

Z treści zadania wynika, że funkcja f określona jest wzorem

$$f(x) = x - (x - 2)^2.$$

Przekształcamy ten wzór

$$f(x) = x - (x^2 - 4x + 4),$$

stąd

$$f(x) = -x^2 + 5x - 4.$$

Jest to więc funkcja kwadratowa, a w jej wzorze współczynnik przy x^2 jest ujemny. Wykresem funkcji f jest więc parabola o ramionach skierowanych w dół.

Pierwsza współrzędna wierzchołka W tej paraboli jest równa

$$x_W = \frac{-5}{2 \cdot (-1)} = \frac{5}{2},$$

więc liczba x_W nie należy do przedziału $\langle -4, 1 \rangle$.

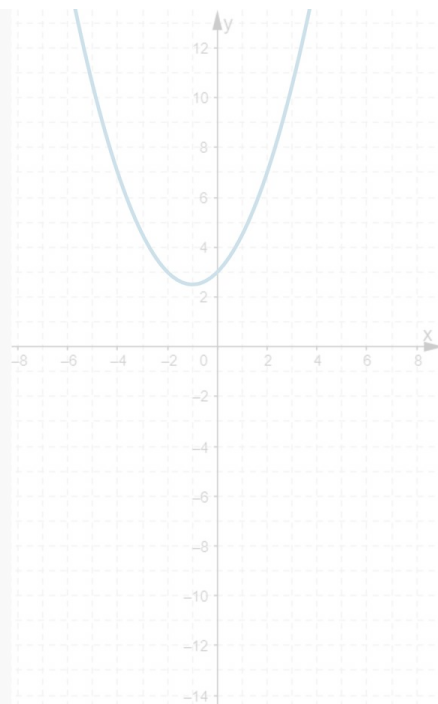
W przedziale $\langle -4, 1 \rangle$ funkcja f jest rosnąca, co oznacza, że największą wartością funkcji f jest wartość w prawym krańcu tego przedziału, czyli $f(1) = 0$.

Najmniejsza i największa wartość funkcji kwadratowej
w przedziale domkniętym

$$f(x) = 0.5x^2 + x + 3$$
$$x \in \langle -2, 2 \rangle$$

Pokaż:

- ☐ wybrany przedział
☐ wierzchołek paraboli
☐ wykres funkcji w wybranym przedziale



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1Ev29y4I>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 6

Ustalimy, jaki jest możliwie największy iloczyn dwóch liczb, o których wiadomo, że suma pierwszej z nich i podwojonej drugiej jest równa 12.

Oznaczmy przez y pierwszą z tych dwóch liczb, a przez x – drugą z nich.

Wiadomo, że $2x + y = 12$. Z tej zależności wyznaczamy $y = 12 - 2x$.

Iloczyn I tych dwóch liczb zapiszemy w zależności od zmiennej x

$$I(x) = (12 - 2x) \cdot x.$$

Otrzymaną funkcję kwadratową I zmiennej x zapisujemy wzorem w postaci ogólnej

$$I(x) = -2x^2 + 12x.$$

Ponieważ współczynnik przy x^2 jest ujemny, więc wykresem funkcji I jest parabola skierowana ramionami do dołu.

Pierwsza współrzędna wierzchołka W tej paraboli jest równa

$$x_W = \frac{-12}{2 \cdot (-2)} = 3.$$

Oznacza to, że dla $x = 3$ iloczyn I jest największy. Jest on wtedy równy

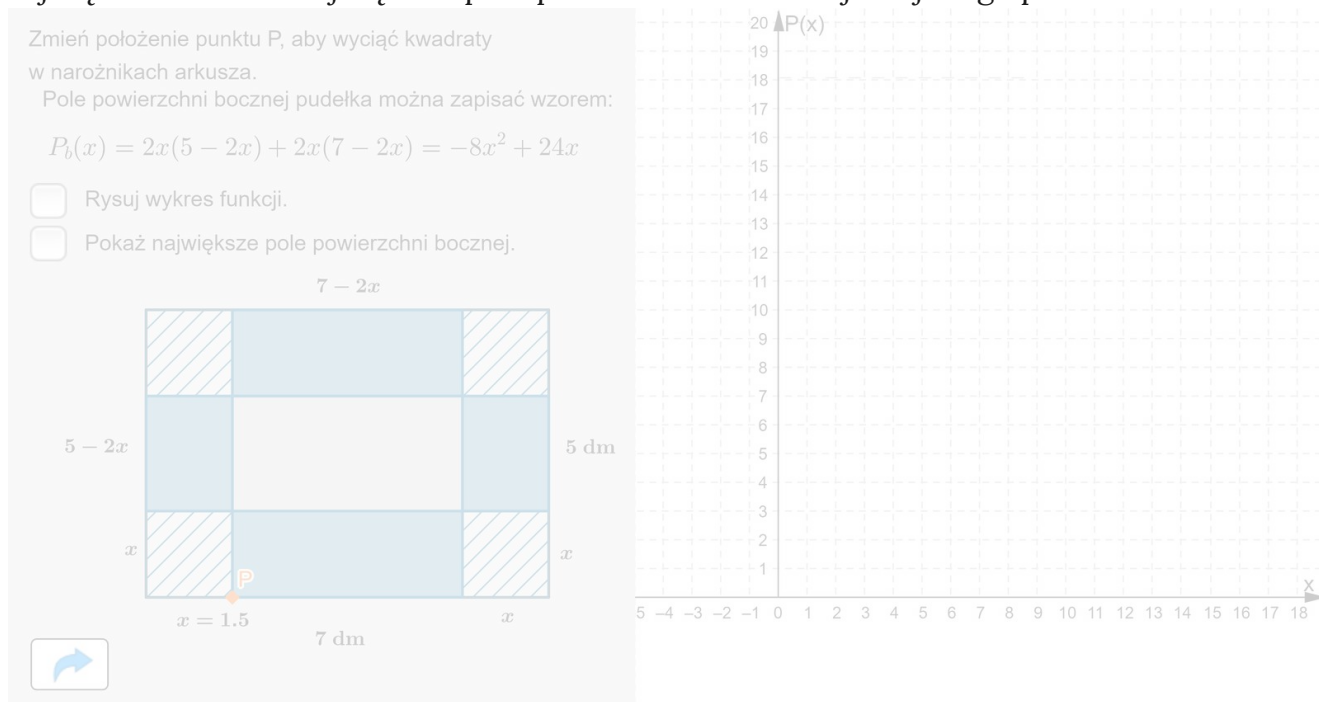
$$I(3) = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 = 18.$$

Zauważmy, że gdy $x = 3$, to

$$y = 12 - 2 \cdot 3 = 6.$$

Przykład 7

Z prostokątnego arkusza tektury o wymiarach 5 dm i 7 dm wycięto w rogach kwadraty tak, aby po odpowiednim sklejeniu otrzymać otwarte pudełko. Jaka powinna być długość boku wycinanego kwadratu, aby po sklejeniu pole powierzchni bocznej pudełka było największe? Oblicz największe pole powierzchni bocznej sklejonego pudełka.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1Ev29y4I>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 8

Suma długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego jest równa 10. Obliczymy najmniejszą wartość kwadratu długości przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Oznaczmy przez x długość jednej z przyprostokątnych trójkąta, a przez y – długość drugiej z nich.

Wiadomo, że $x + y = 10$. Z tej zależności wyznaczamy $y = 10 - x$.

Stosując twierdzenie Pitagorasa, zapisujemy kwadrat k długości przeciwprostokątnej tego trójkąta

$$k(x) = x^2 + (10 - x)^2, \text{ gdzie } x \in (0, 10).$$

Otrzymaną funkcję kwadratową k zmiennej x zapisujemy wzorem w postaci ogólnej

$$k(x) = 2x^2 - 20x + 100.$$

Parabola o równaniu $y = 2x^2 - 20x + 100$ ma ramiona skierowane do góry, a pierwsza współrzędna jej wierzchołka jest równa

$$x_W = \frac{-(-20)}{2 \cdot 2} = 5.$$

Ponieważ $5 \in (0, 10)$, więc najmniejszą wartością funkcji k jest

$$k(5) = 50.$$

Zauważmy, że wtedy ten trójkąt jest równoramienny, a każda z przyprostokątnych ma długość 5.

Przykład 9

Właściciel sklepu z odzieżą sprowadza z hurtowni koszulki, płacąc po 12 zł za sztukę i sprzedaje średnio 200 sztuk miesięcznie po 20 zł. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny sprzedaży koszulki o 50 groszy zwiększa sprzedaż miesięczną o 20 sztuk. Jaką cenę sprzedaży jednej koszulki powinien ustalić właściciel sklepu, aby jego miesięczny zysk był największy?

Przyjmijmy, że cenę koszulki obniżano x razy o 50 groszy. Wtedy cena sprzedaży jednej koszulki to $(20 - 0,5x)$ zł, co oznacza, że wówczas zysk właściciela sklepu to $(8 - 0,5x)$ zł. Z obserwacji wynika, że przy tak ustalonej cenie w ciągu miesiąca zostanie sprzedanych $(200 + 2x)$ koszulek. Zatem miesięczny zysk w złotych właściciela sklepu jest równy

$$(8 - 0,5x)(20x + 200),$$

gdzie x jest dodatnią liczbą całkowitą.

Rozpatrzmy funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = (8 - 0,5x)(20x + 200).$$

Jest to funkcja kwadratowa, której wzór możemy zapisać w postaci iloczynowej

$$f(x) = -10(x - 16)(x + 10).$$

Parabola będąca wykresem funkcji f ma ramiona skierowane do dołu, a pierwsza współrzędna jej wierzchołka jest równa

$$x_W = \frac{-10 + 16}{2} = 3.$$

Zatem dla $x = 3$ funkcja f osiąga wartość największą, równą $f(3) = 1690$.

Dla tej wartości x spełnione są warunki zadania. Wynika z tego, że sprzedawca osiągnie największy miesięczny zysk w kwocie 1690 zł, kiedy ustali, że cena sprzedaży jednej koszulki jest równa 18 złotych 50 groszy.

Uwaga:

W powyższym przykładzie funkcja f nie jest modelem opisującym zysk ze sprzedaży koszulek. Natomiast korzystając z jej własności, umiemy wskazać taką dodatnią liczbę całkowitą x , dla której zysk, wyrażający się wzorem $(8 - 0,5x)(20x + 200)$, jest największy.

Przykład 10

Wykażemy, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 2$, to $a^2 + b^2 \geq 2$.

Z zależności $a + b = 2$ wyznaczamy $b = 2 - a$.

Zapisujemy sumę S kwadratów liczb a i b jako funkcję zmiennej a .

$$S(a) = a^2 + (2 - a)^2, \text{ gdzie } a \in (0, 2).$$

Otrzymaną funkcję kwadratową S zmiennej a zapisujemy wzorem w postaci ogólnej

$$S(a) = 2a^2 - 4a + 4.$$

Parabola o równaniu $y = 2x^2 - 4x + 4$ ma ramiona skierowane do góry, a pierwsza współrzędna jej wierzchołka jest równa

$$x_W = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = 1.$$

Ponieważ $1 \in (0, 2)$, więc najmniejszą wartością funkcji S jest

$$S(1) = 2.$$

Oznacza to, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 2$, to $a^2 + b^2 \geq 2$.

Ćwiczenie 1



Jaka jest największa wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 3$ w przedziale $\langle -2, 1 \rangle$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 2

☐ 3

☐ 7

☐ 1

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Jaka jest najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (x - 3)(x + 5)$ w przedziale $\langle -3, 0 \rangle$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ -12

☐ -35

☐ -16

☐ -15

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Jaka jest najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (2 - x)(x + 4)$ w przedziale $\langle -2, 1 \rangle$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 8

☐ 9

☐ 7

☐ 5

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Jaka jest największa wartość funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 + 8x - 3$ w przedziale $\langle -5, -2 \rangle$? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ -23

☐ -3

☐ -51

☐ -18

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Najmniejsza wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 4x + c$ w przedziale $\langle 0, 3 \rangle$ jest równa 1. Oblicz, jaką wartość przyjmuje c . Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $c = 1$

☐ $c = 3$

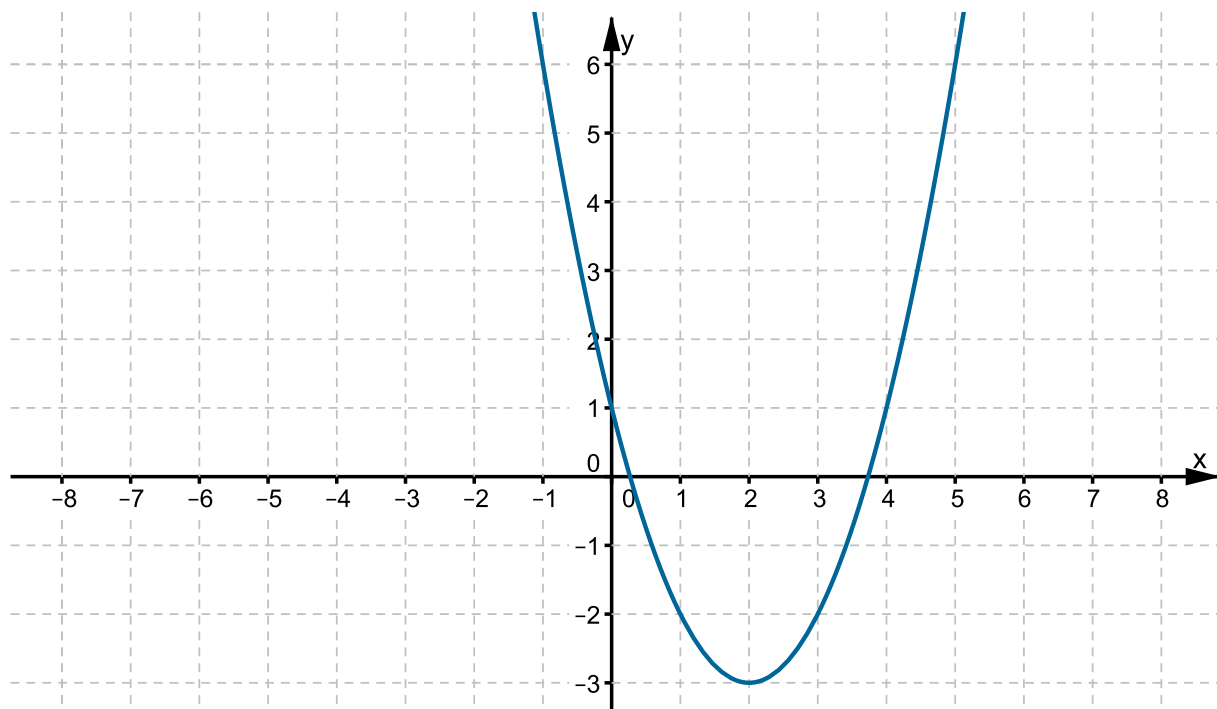
☐ $c = 5$

☐ $c = -12$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie tego wykresu ustal wartość największą oraz najmniejszą funkcji f w podanym przedziale. Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

- $\langle -1, 1 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

- $\langle 0, 3 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

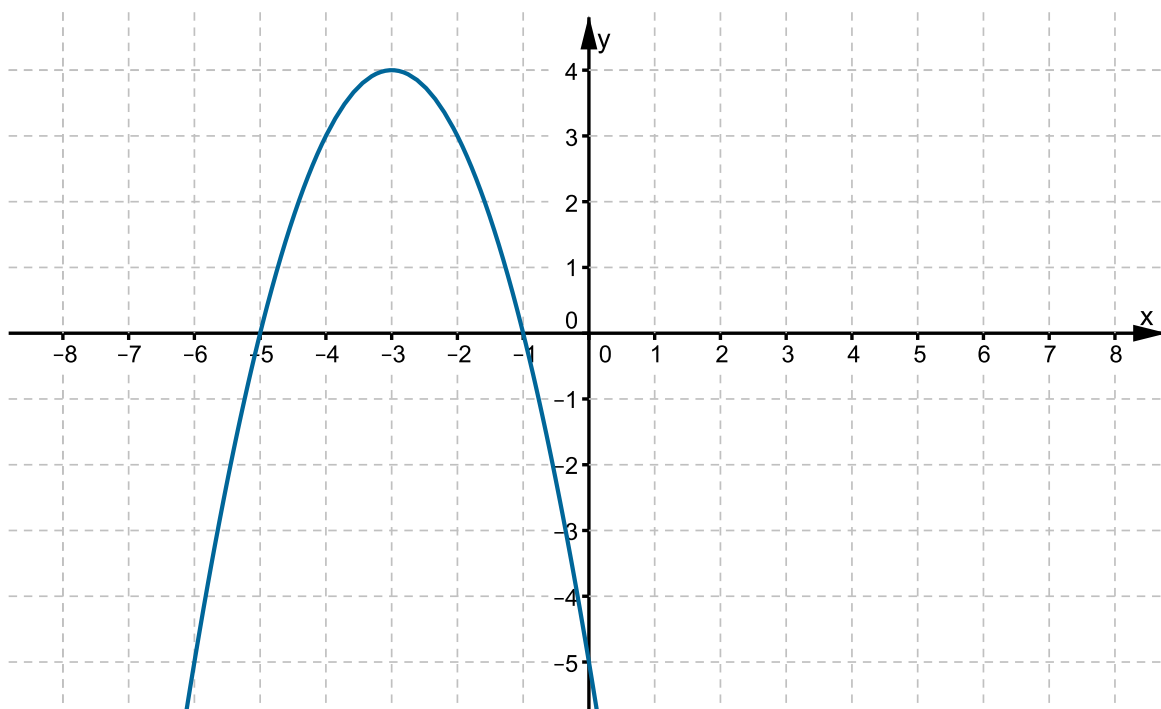
- $\langle 4, 5 \rangle$.

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Na podstawie tego wykresu ustal wartość największą oraz najmniejszą funkcji f w podanym przedziale. Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

- $\langle -6, -4 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

- $\langle -5, -2 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

- $\langle -1, 0 \rangle$.

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = (x + 1)^2 - 5$ w podanym przedziale. Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

- $\langle -4, -2 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

- $\langle -3, 0 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

- $\langle 2, 5 \rangle$.

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = -2(x - 3)^2 + 1$ w podanym przedziale. Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

- $\langle -1, 0 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

- $\langle 1, 4 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

- $\langle 5, 6 \rangle$.

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 10x + 7$ w podanym przedziale. Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

- $\langle -1, 3 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

- $\langle 4, 6 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

- $\langle 7, 10 \rangle$.

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = -x^2 - 2x + 5$ w podanym przedziale. Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

- $\langle -5, -3 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

- $\langle -2, 0 \rangle$,

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$ oraz $x =$.

- $\langle 1, 4 \rangle$.

Dla tego przedziału wartość największa to dla $x =$,
a wartość najmniejsza to dla $x =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Oblicz najmniejszą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (x + 2)(x - 5)$ w przedziale $\langle -1, 0 \rangle$. Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

Odpowiedź: Wartość najmniejsza to dla $x =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Oblicz największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (x + 1)(3 - x)$ w przedziale $\langle 0, 4 \rangle$. Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

Odpowiedź: Funkcja przyjmuje największą wartość dla argumentu $x =$ i jest to .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = (2x - 1)(x + 3)$ w przedziale $\langle -3, 1 \rangle$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Oblicz wartość najmniejszą oraz wartość największą funkcji kwadratowej $f(x) = (x + 2)(5 - 2x)$ w przedziale $\langle -1, 0 \rangle$. Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

Odpowiedź: Wartość największa to dla $x =$, wartość najmniejsza to dla $x =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie x z przedziału $\langle -2, 3 \rangle$ sumę tej liczby i jej kwadratu. Wyznacz wzór funkcji f oraz oblicz:

1. jej wartość najmniejszą w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$,
2. jej wartość największą w przedziale $\langle -2, 3 \rangle$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



Ustal, jaka jest możliwie najmniejsza suma kwadratów dwóch liczb, o których wiadomo, że suma pierwszej z nich i podwojonej drugiej jest równa 5. Uzupełnij lukę, wpisując poprawną wartość.

Odpowiedź: Najmniejsza możliwa suma wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Jaki jest największy iloczyn dwóch liczb, o których wiadomo, że suma podwojonej pierwszej z nich i siedmiokrotności drugiej jest równa 56. Jakie to liczby? Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

Odpowiedź: Największy iloczyn to , gdy pierwsza z liczb jest równa , a druga jest równa .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Wśród wszystkich prostopadłościanów o podstawie kwadratowej, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 12, jest taki, który ma największe pole powierzchni całkowitej. Oblicz długość krawędzi podstawy tego prostopadłościanu. Uzupełnij lukę, wpisując poprawną wartość.

Odpowiedź: Długość krawędzi podstawy tego prostopadłościanu wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Siatką o długości 98 m mamy ogrodzić działkę w kształcie prostokąta. Na ogrodzonym terenie przy jednym boku od strony siatki przewidujemy ścieżkę o szerokości 1 m, pozostałą część ma zajmować klomb kwiatowy. Jak dobrać wymiary działki, aby klomb kwiatowy zajmował powierzchnię największą z możliwych? Oblicz tę największą powierzchnię. Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

Odpowiedź: Największe możliwe pole klombu kwiatowego jest równe m²,
gdy wymiary działki będą wynosiły: m i m.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Właściciel sklepu spożywczego zamawia chleb w piekarni, płacąc 1,30 zł za kilogramowy bochenek. Kiedy ustalił cenę sprzedaży chleba na 2 zł, sprzedawał dziennie 60 bochenków. Zauważył jednak, że każda obniżka ceny o 5 gr zwiększa liczbę sprzedanych bochenków o 10. Jaką cenę za jeden bochenek powinien ustalić właściciel sklepu, aby jego dzienny zysk ze sprzedaży chleba był największy? Uzupełnij luki, wpisując poprawne wartości.

Odpowiedź: Właściciel sklepu powinien ustalić cenę zł gr.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 10$, to $ab \leq 25$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23



Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $2a + b = 6$, to $ab \leq \frac{9}{2}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 24



Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $3a + 5b = 30$, to $ab \leq 15$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 25



Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 8$, to $a^2 + b^2 \geq 32$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 26



Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + 3b = 20$, to $a^2 + b^2 \geq 40$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 27



Wykaż, że jeśli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $5a + 2b = 58$, to $a^2 + b^2 \geq 116$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.