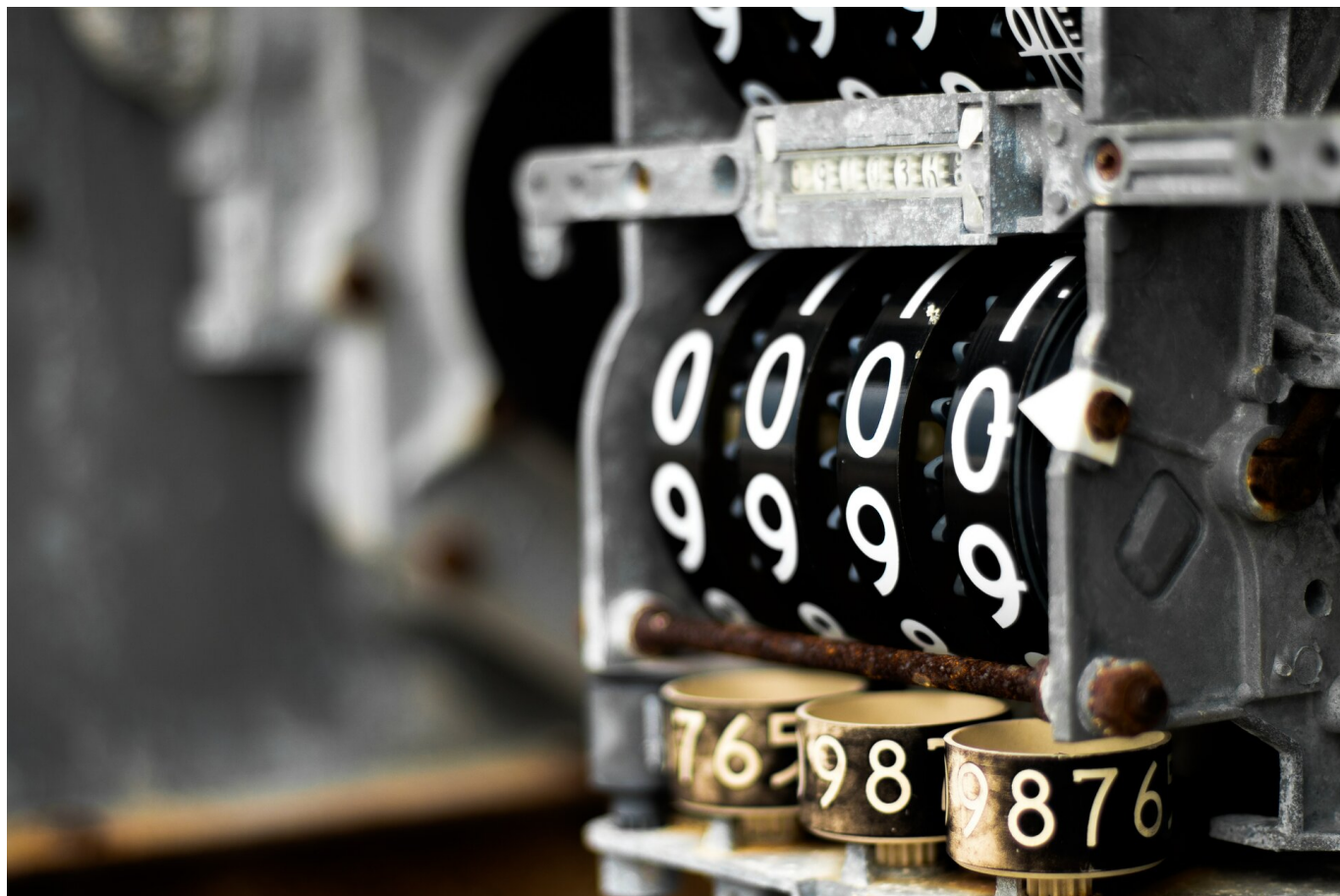




## Zbiór liczb naturalnych. Działania w zbiorze liczb naturalnych

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Zbiór liczb naturalnych. Działania w zbiorze liczb naturalnych

Źródło: Logan Kirschner, dostępny w internecie: [www.pexels.com](http://www.pexels.com).

Świat liczb i umiejętność liczenia interesują nie tylko naukowców.

Co tak fascynującego jest w liczbach, że niektóre z ich własności nadal pozostają nieodkryte?

Jakie prawa obowiązują w świecie liczb?

Jak można je wykorzystać w praktyce?

W jakich sytuacjach warto sięgać po reguły matematyczne?

Jeżeli chcesz znaleźć odpowiedzi na te i wiele innych pytań, zapraszam cię do podróży po świecie liczb naturalnych.

### Twoje cele

- Poznasz różne rodzaje liczb naturalnych.
- Zastosujesz informacje o liczbach naturalnych, wielokątnych i palindromicznych do rozwiązywania zadań.
- Pomnożysz liczby naturalne sposobem hinduskim.
- Dokonasz analizy poprawności przeprowadzonego dowodu.

- Zaprojektujesz sudoku, wykorzystując poznane własności liczb.
- Przedstawisz argumenty na temat: „Dlaczego warto poznać liczby naturalne?”.

# Przeczytaj

---

## Liczby naturalne

**Liczby naturalne** to liczby całkowite nieujemne:  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ . Zbiór liczb naturalnych oznaczamy wielką literą  $\mathbb{N}$ .

Możemy zatem zapisać, że:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$ .

## Liczby wielokątne

**Liczby wielokątne**  $n$ -kątne to kolejne liczby otrzymane poprzez dodawanie początkowych liczb zaczynających się od 1 i różniących się od siebie o  $(n - 2)$ .

Początkowe liczby z lewej strony kolumny to liczby różniące się o  $(n - 2)$ , natomiast te z prawej to liczby wielokątne:

1, 1, 1, 1, ... liczby naturalne 1, 2, 3, 4, ...

1, 2, 3, 4, ... liczby trójkątne 1, 3, 6, 10, ...

1, 3, 5, 7, ... liczby kwadratowe 1, 4, 9, 16, ...

1, 4, 7, 10, ... liczby pięciokątne 1, 5, 12, 22, ...

1, 5, 9, 13, ... liczby sześciokątne 1, 6, 15, 28, ...

1, 6, 11, 16, ... liczby siedmiokątne 1, 7, 18, 34, ...

1, 7, 13, 19, ... liczby ośmiokątne 1, 8, 21, 40, ...

Zapoznaj się z graficznym sposobem budowania liczb wielokątnych.

## Liczby trójkątne



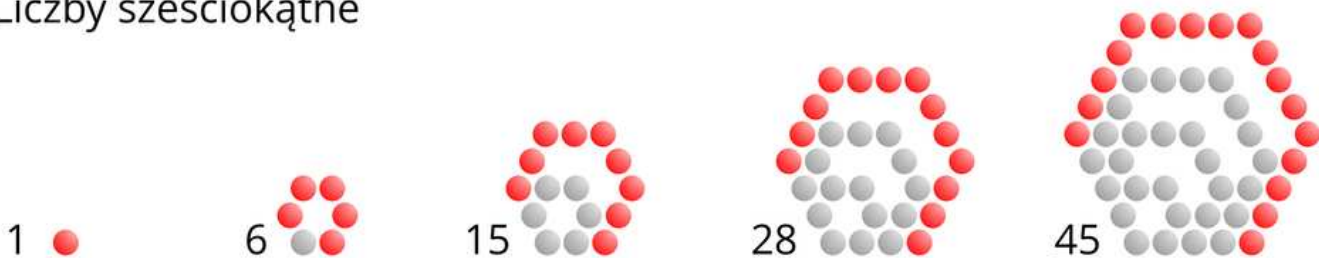
Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

## Liczby czworokątne



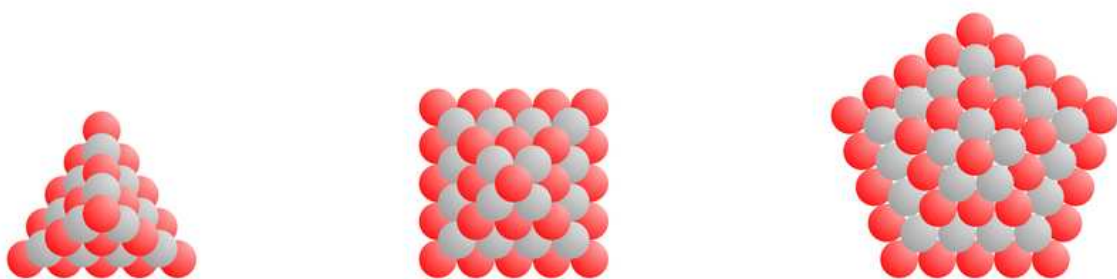
Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

## Liczby sześciokątne



Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Liczbowi wielokątnemu odpowiadają w trójwymiarze **liczby piramidalne**.



## Liczby piramidalne

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

Suma trzech liczb czworościennych daje liczbę trójkątną.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & 5 & & & & 1 & & & & 7 \\ & & 1 & 2 & & & 4 & 4 & & & 2 & 1 & & & 7 & 7 \\ & 1 & 2 & 3 & & + & 3 & 3 & 3 & + & 3 & 2 & 1 & = & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}$$

Trzy liczby czworościenne dają liczbę trójkątną.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

### Ciekawostka

Jedno z odkrytych przez Diofantosa twierdzeń brzmi:

Ośmiokrotnie wzięta liczba trójkątna powiększona o jedność jest zawsze kwadratem.

To znaczy, że ośmiokrotność dowolnej liczby trójkątnej powiększona o jeden jest zawsze liczbą kwadratową.

## Liczby palindromiczne

**Liczba palindromiczna** to liczba, która przy czytaniu jej cyfr od lewej strony do prawej jest jednakowa, jak czytana od prawej do lewej. Liczby takie nazywane są także liczbami symetrycznymi. Przykłady takich liczb to: 1, 24442, 727, 1111111, ...

### Twierdzenie: o liczbach palindromicznych

Każda liczba palindromiczna w systemie dziesiętnym, złożona z parzystej liczby cyfr, jest podzielna przez 11.

[Palindromy](#) mogą być kwadratami liczb naturalnych

(0, 1, 4, 9, 121, 484, 676, 10201, 12321, 14641, 40804,

44944, 69696, 94249, 698896, 1002001, ...)

i ich sześcianami

(0, 1, 8, 343, 1331, 1030301, 1367631, 1003003001,

10662526601, 1000300030001, ...).

## Liczby Lychrel

W 1938 roku amerykański matematyk **Derrick Lehmer** opisał pewną własność liczb: jeśli do wybranej liczby dodamy ją samą, ale zapisaną w odwrotnej kolejności i z otrzymaną sumą oraz z każdą następną postąpimy tak samo, to w którymś cyklu, jako kolejna suma pojawi się [palindrom](#), np.

$$\begin{array}{r} 37 \\ + 73 \\ \hline 110 \\ + 011 \\ \hline 121 \end{array}$$

Większość małych liczb większych od 9 dociera do palindromu w jednym kroku.

19 jest pierwszą liczbą wymagającą dwóch kroków  
( $19 + 91 = 110 \rightarrow 110 + 011 = 121$ ).

59 – wymaga trzech kroków

( $59 + 95 = 154 \rightarrow 154 + 451 = 605 \rightarrow 605 + 506 = 1111$ ),

69 – wymaga aż czterech

(same sumy:  $69 \rightarrow 165 \rightarrow 726 \rightarrow 1353 \rightarrow 4884$ ).

Liczbą, przy której trzeba się solidnie napracować, jest 89 – palindrom pojawia się dopiero jako 24-ta liczba w ciągu sum: 8813200023188.

To jednak nic w porównaniu z „gehenną”, którą oferuje liczba 196. Lehmer wykonał przed 76 laty blisko sto dodawań – bezskutecznie. Nie omieszkał jednak zauważyć, że 56-ta suma jest bardzo bliska docelowej, wygląda bowiem tak: 934217310162393261013712428. Zapewne ta obiecująca bliskość skłoniła go do postawienia hipotezy, że każda liczba poddana opisanemu procesowi zmieni się w [palindrom](#) – wszystko jest tylko kwestią etapu, w którym to nastąpi. 196 to nie jedyna „krnąbrna” liczba, ale stosunkowo mała, więc nią przede wszystkim zajęli się programiści, gdy do akcji wkroczyły komputery.

Jako pierwszy wyzwanie podjął **John Walker** – założyciel znanej firmy Autodesk, zajmującej się oprogramowaniem komputerowym. W 1987 roku Walker uruchomił program na stacji roboczej **Sun 3/260**. Po blisko trzech latach nieprzerwanej pracy i wykonaniu 2415836 operacji „odwróć i dodaj” komputer dotarł do liczby złożonej z miliona cyfr i się zatrzymał. [Palindromu](#) nie było. Następcy Walkera posuwali się coraz dalej, korzystając z coraz lepszych komputerów. Jeden z nich nadał 196 i pozostałym równie opornym liczbom nazwę, która się przyjęła – liczby Lychrel – prawdopodobnie jest ona **anagramem imienia Cheryl**.

Aktualny rekord w wędrówce od 196 do palindromu należy do francuskiego programisty **Romaina Dolbeau**. Pod koniec 2011 roku dotarł on po bilionie kroków do liczby złożonej z 413930770 cyfr, jednak nie osiągnął celu. Wydaje się, że dalszej eksploracji nie będzie. Szansa na dotarcie do gigantycznego palindromu maleje wraz z wydłużaniem się sumy – praktycznie jest już równa zeru. Wiele wskazuje na to, że hipotezę podaną przez Lehmera należy uznać za błędną. Tym bardziej, że dla systemów liczbowych o mniejszych podstawach niż dziesiętny udowodniono, że niektóre liczby poddawane operacji „odwróć i dodaj” nigdy nie zmieniają się w palindrom.

W systemie dwójkowym najmniejszą taką liczbą jest 10110, odpowiadająca liczbie 22 w systemie dziesiętnym. Niemiecki matematyk **Roland Sprague** jeszcze w latach 60-tych udowodnił, że przekształcenie jej w [palindrom](#) jest niemożliwe. Zauważył, że w ciągu sum, poczynając od czwartej, cyklicznie powtarzają się cztery schematy liczb.

Na przykład, dla czwartej sumy równej 10110100 schematem jest  $10(1)n01(0)n$ . Dla tej sumy  $n = 2$ , dla ósmej to 3, dla dwunastej 4 itd. – schemat pozostaje taki sam. Zarówno ten schemat, jak i każdy z trzech pozostałych wyklucza pojawienie się palindromu. Znalezienie dowodu dla układu dziesiętnego ostatecznie rozwiązałoby problem i odesłało liczby Lychrel do lamusa. Niestety, dotąd nikomu się to nie udało.

## Działania arytmetyczne na liczbach naturalnych w systemie dziesiętkowym

Dodawanie:  $3 + 7 = 10$ .

Obiekty dodawane to **składniki**, wynik dodawania nazywa się **sumą**, a znak działania to „+”.

Odejmowanie:  $30 - 12 = 18$ .

Obiekty odejmowane to **odjemna i odjemnik**, wynik odejmowania nazywa się **różnicą**, a znak działania to „-”.

Mnożenie:  $12 \cdot 3 = 36$ .

Obiekty mnożone to **czynniki**, wynik mnożenia nazywa się **iloczynem**, a znak działania to „·”.

Dzielenie:  $72 : 4 = 18$ .

Obiekty dzielone to **dzielnia i dzielnik**, wynik dzielenia nazywa się **ilorazem**, a znak działania to „:”.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | 1 | 7 |   |
|   | 0 | 1 | 2 |
|   | 2 | 4 |   |
|   | 0 | 2 | 3 |
|   | 3 | 1 |   |
| 3 | 9 | 1 |   |

Ciekawostką jest sposób mnożenia wymyślony przez Hindusów. Korzystali oni z prostokąta złożonego z kwadratów, na którego bokach wpisywali czynniki. Wszystkie kwadraty dzielili na połowy za pomocą równoległych przekątnych. Następnie w każdym z kwadratów zapisywali odpowiedni iloczyn: jedności poniżej przekątnej, a dziesiątki powyżej niej. W końcu sumowali liczby położone w ukośnych rzędach pomiędzy przekątnymi, otrzymując wynik mnożenia.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.

## Słownik

### palindrom

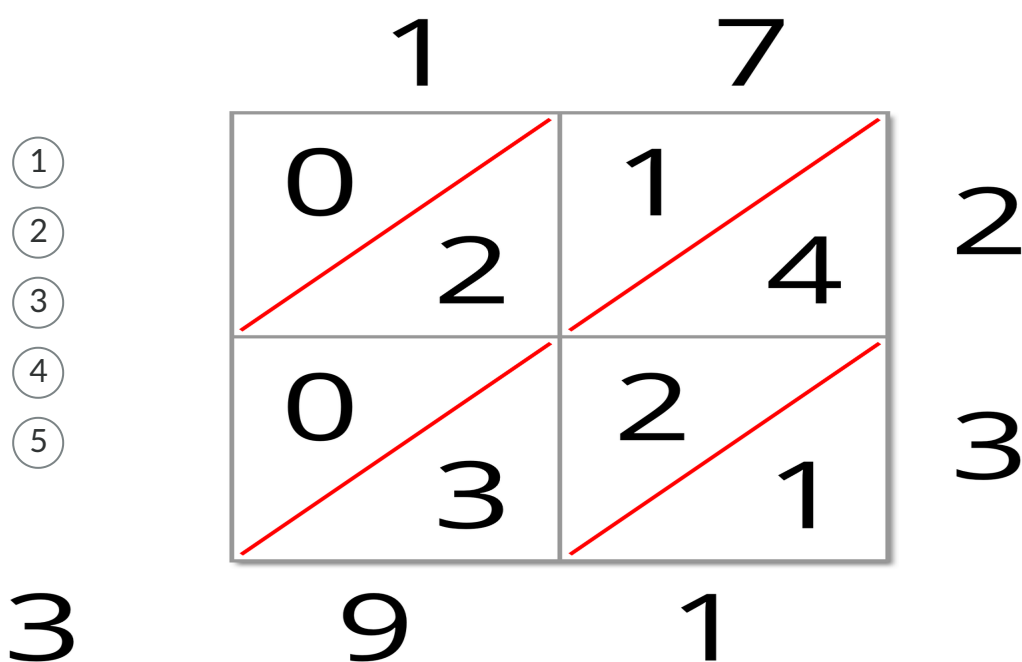
liczba (lub wyraz), która czytana z prawej do lewej, brzmi tak samo jak czytana z lewej do prawej

# Infografika

---

## Polecenie 1

Na podstawie infografiki przedstawiającej sposób mnożenia metodą hinduską, wymyśl własny przykład, wykonując poszczególne kroki.



1

---

## Krok 1

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1FHpaKow>

Jeżeli chcesz pomnożyć dwie liczby, zapisz je. Jedną w poziomie a drugą w pionie tak, aby na przecięciu cyfr każdej z liczb pojawił się kwadrat.

2

---

## Krok 2

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1FHpaKow>

Każdy z kwadratów podziel przekątną.

## Krok 3

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1FHpaKow>

Pomnóż każdą z liczb stanowiącą cyfry jednej z liczb z drugą, wpisując wynik w kwadracie leżącym na przecięciu cyfr. Zapisz tak, aby liczba dziesiątek znalazła się nad przekątną a liczba jednościami pod przekątną kwadratu. (Jeżeli iloczyn jest liczbą jednocyfrową w miejsce dziesiątek wpisz 0).

## Krok 4

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1FHpaKow>

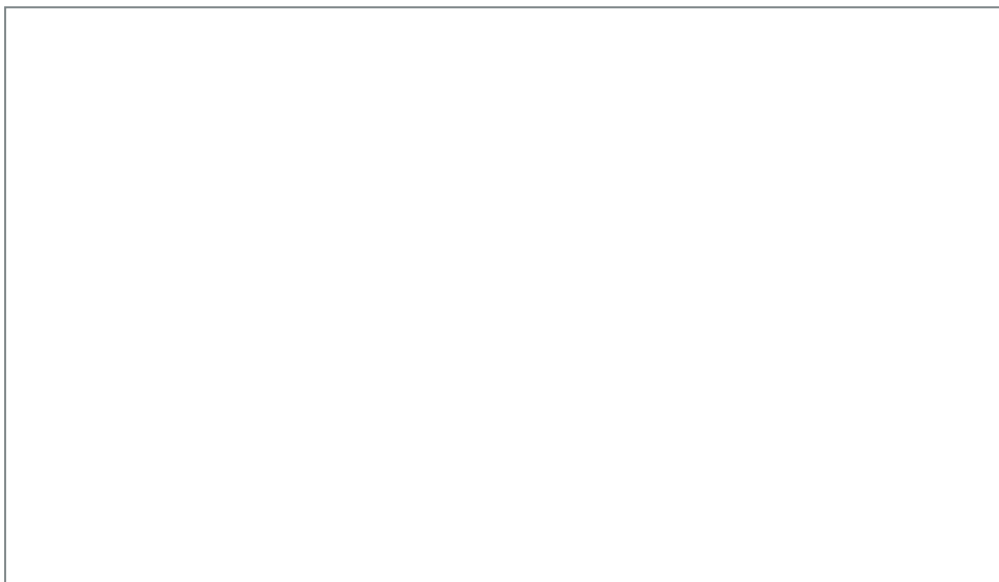
Dodaj każdą z liczb leżących poniżej prostej wyznaczonej przez przekątną. (Jeżeli suma jest liczbą dwucyfrową zapisz tylko liczbę jednościami a liczbę dziesiątek umieść nad linią i dodaj ją w kolejnej sumie).

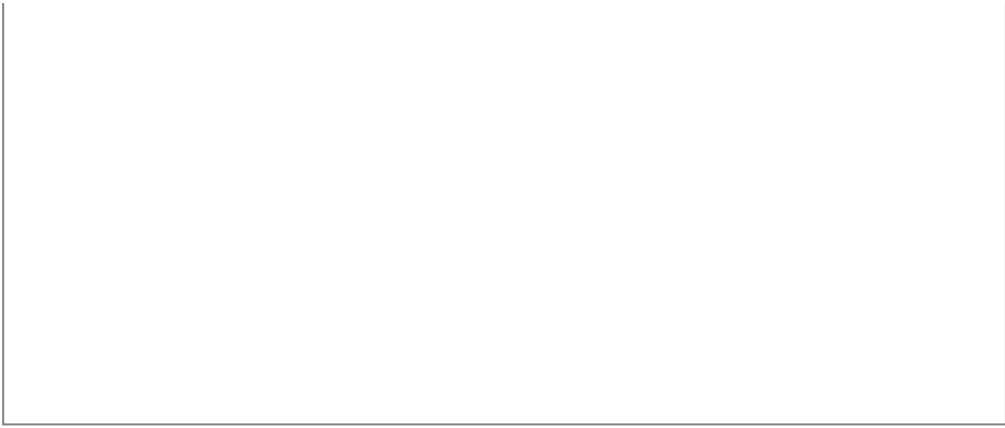
## Krok 5

Nagranie dostępne pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1FHpaKow>

Sprawdź otrzymany wynik.

Źródło: Gromar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 3.0.





# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Wskaż wszystkie liczby naturalne.

☐  $\frac{1}{2}$

☐  $\sqrt{7}$

☐ 184

☐ XII

☐ 19

☐ 0

☐  $\pi$

☐ 0,3

☐ 7

☐ -2



| numer<br>porządkowy<br>liczby | liczby<br>trójkątne | liczby<br>kwadratowe | liczby 5-<br>kątne | liczby 6-<br>kątne | liczby 7-<br>kątne | liczby 8-<br>kątne |
|-------------------------------|---------------------|----------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 5.                            |                     |                      |                    |                    |                    |                    |
| 6.                            |                     |                      |                    |                    |                    |                    |
| 7.                            |                     |                      |                    |                    |                    |                    |

## Ćwiczenie 4



Jakie pytania zadasz koledze lub koleżance, aby dowiedzieć się, co już wie na temat liczb naturalnych, palindromicznych i wielokątnych?

- ☐ Jakiego działania znakiem arytmetycznym jest iloraz?
- ☐ Czy zero jest liczbą naturalną?
- ☐ Czy liczby kwadratowe są wielokątne?
- ☐ Które liczby nazywamy symetrycznymi?
- ☐ Dlaczego do liczenia wykorzystujemy liczby palindromiczne?
- ☐ Do którego ze zbiorów liczbowych należą liczby: 0, 1, 4, 9, 121, 484, 676, 10201?
- ☐ Jakie własności mają liczby: 1, 7, 18, 34? Jaka jest ich wspólna nazwa?
- ☐ Jak nazwiesz liczby wielokątne: 1, 5, 12, 21, ...?

## Ćwiczenie 5



Pomnóż wskazane liczby. Wykorzystaj sposób mnożenia, który zaproponowali Hindusi. Wpisz poprawną liczbę.

$$127 \cdot 34 = \boxed{\phantom{0000}}$$



○  $1221 : 11 = 111$

$$1111 = 1 + 10 + 100 + 1000 = 11 + 1100 = 11 : 11 + 1100 : 11 = 1 + 100 = 101$$

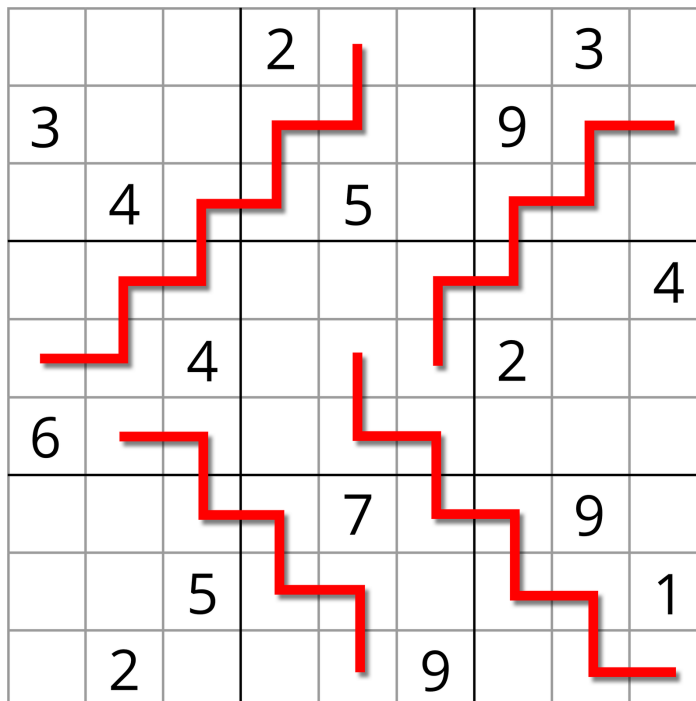
$$\bigcirc \quad 1000x + 100y + 10y + 1x = 1001x + 110y = 11 \cdot (91x + 10y)$$



1938

## Ćwiczenie 8

Sudoku: w puste pola wpisz liczby od 1 do 9 tak, aby w każdym wierszu, każdej kolumnie i w każdym kwadracie  $3 \times 3$  ograniczonym grubą linią, znalazło się dziewięć różnych cyfr. Dodatkowy warunek wiąże się z czerwonymi liniami łamanymi: kolejne cyfry, które zapiszesz na każdej z tych linii (cyfr jest 7 lub 9), powinny tworzyć palindrom. W rozwiązaniu wskaż sumę 17 cyfr na obu przekątnych. Jak, twoim zdaniem, dodatkowy warunek wpływa na rozwiązanie zadania: utrudnia je czy ułatwia?



Odpowiedź: Suma siedemnastu cyfr na przekątnych: .

### Ćwiczenie 9

Z 35 pierwszych palindromów – od 0 do 252 – wybrano 16 i utworzono z nich kwadrat magiczny  $4 \times 4$ . Kwadrat magiczny to taki, w którym suma (zwana sumą magiczną) czterech liczb w każdym wierszu, kolumnie i na obu przekątnych jest taka sama. Poniżej znajdują się: z lewej strony – 35 liczb, z których dokonano wyboru, z prawej – kwadrat z ujawnionymi 4 liczbami. Twoje zadanie polega na wypełnieniu właściwymi liczbami pozostałych 12 pól tak, aby powstał kwadrat magiczny. Jego suma magiczna także powinna być palindromem. W rozwiązaniu podaj tę sumę.

0, 1, ~~2~~, ~~3~~, 4, 5, 6, 8, 9,  
11, 22, ~~33~~, 44, 55, 66,  
77, 88, 99, 101, 111,  
121, ~~131~~, 141, 151, 161,  
171, ~~181~~, 191, 202, 212,  
222, 232, 242, 252

|     |    |     |  |
|-----|----|-----|--|
| 2   |    | 131 |  |
|     |    |     |  |
|     | 33 |     |  |
| 181 |    | 3   |  |

Suma magiczna: .

### Ćwiczenie 10



Zastanów się i odpowiedz, jaka jest największa liczba naturalna, której każda cyfra – oprócz pierwszej i ostatniej – jest mniejsza od średniej arytmetycznej dwu sąsiadujących z nią cyfr? Co ułatwi Ci rozwiązanie tego zadania?

Ta liczba to: .

### Ćwiczenie 11



Zaprojektuj sudoku, wykorzystując poznane informacje o liczbach.

## Ćwiczenie 12



Jakich argumentów użyjesz, by przekonać koleżankę lub kolegę, że warto uczyć się o liczbach naturalnych?

# Dla nauczyciela

---

**Autorka:** Elżbieta Miterka

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Zbiór liczb naturalnych. Działania w zbiorze liczb naturalnych

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

I. Liczby rzeczywiste. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- nazywa liczby, opisując ich własności;
- stosuje informacje o liczbach naturalnych, wielokątnych i palindromicznych do rozwiązywania zadań;
- wykonuje działanie mnożenia, wykorzystując hinduski prostokąt;
- analizuje poprawność przeprowadzonego dowodu;
- stosuje poznaną regułę matematyczną do rozwiązania zadania;
- projektuje sudoku, wykorzystując poznane własności liczb;
- przedstawia argumenty na temat: „Dlaczego warto poznać liczby naturalne?”.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- śniegowa kula;
- dyskusja;
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki;

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

### **Przebieg zajęć:**

#### **Przed lekcją:**

- Nauczyciel prosi grupę chętnych/wybranych uczniów o przygotowanie prezentacji na temat liczb Lychrel. Zadanie uczniów polega na znalezieniu (lub opracowaniu) i uwzględnieniu w swojej prezentacji przede wszystkim materiałów wizualnych (krótkich filmów, fotografii, schematów). Prezentacje powinny zawierać jak najmniej tekstu – jej treść przedstawią uczniowie ustnie podczas zajęć.

#### **Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Nauczyciel pyta uczniów: Jakie są rodzaje liczb naturalnych? Po wykonaniu zadania i ustaleniu wspólnie przez uczniów rodzajów liczb naturalnych nauczyciel weryfikuje je i – w razie potrzeby – uzupełnia.
3. Działania arytmetyczne na liczbach naturalnych w systemie dziesiętkowym. Uczniowie przedstawiają znane im działania na liczbach naturalnych, nazywają elementy każdego działania i ich wyniki.

#### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel prosi, aby uczniowie, pracując w parach, opracowali zagadnienia: jedna osoba – liczby wielokątne, a druga – liczby palindromiczne. Po upływie wyznaczonego czasu uczniowie wymieniają się informacjami. Nauczyciel prosi chętnych/wybranych uczniów o zreferowanie tego, czego dowiedzieli się od sąsiada.

2. Wybrani przed lekcją uczniowie przedstawiają przygotowaną prezentację na temat liczb Lychrel. Pozostali uczniowie mogą zadawać im pytania i prosić o wyjaśnienia. Na koniec oceniają pracę kolegów, mówią, co było interesujące, co niejasne.
3. Uczniowie analizują własność liczb wskazaną przez Lehmera. Próbuje ustalić palindromy dla kilku liczb wybranych przez nauczyciela.
4. Uczniowie korzystają z infografiki i omawiają ją wraz z nauczycielem.
5. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela. Wspólne omówienie odpowiedzi.

### **Faza podsumowująca:**

1. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.
2. Nauczyciel zadaje uczniom pytanie zawarte w temacie zajęć. Uczniowie dyskutują, odnosząc się do treści i przebiegu lekcji. Następnie nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

### **Praca domowa:**

- Przygotuj klasyczne sudoku w kwadracie  $9 \times 9$  pól, wykorzystując poznane informacje o liczbach.

### **Materiały pomocnicze:**

- [Liczby naturalne, całkowite i wymierne](#)

### **Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:**

- Nauczyciel może wykorzystać infografikę do pracy w parach lub w grupach. Uczniowie przygotowują swoje propozycje, a następnie prezentują je na forum klasy.