Wzór na sumę i różnicę cosinusów

Wzór na sumę i różnicę cosinusów

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

Do tej pory poznałeś wzory na funkcje trygonometryczne sumy oraz różnicy kątów. Na tej lekcji dowiesz się, w jaki sposób ze znanych wzorów wyprowadzić wzory na sumę oraz różnicę cosinusów. Na podstawie tych nowych wzorów będziesz obliczać wartości wyrażeń oraz zmieniać sumy algebraiczne związane z funkcjami trygonometrycznymi na iloczyny.

> **Twoje cele**
>
> - Dowiesz się, jak wyglądają wzory na $\cos\alpha + \cos\beta$ oraz $\cos\alpha - \cos\beta$.
> - Nauczysz się stosować wzory na $\cos\alpha + \cos\beta$ oraz $\cos\alpha - \cos\beta$ do obliczania wartości wyrażeń.

Przeczytaj

Do wyprowadzenia wzorów na sumę i różnicę cosinusów wykorzystamy poznane wzory na cosinus sumy oraz cosinus różnicy. Przypomnijmy je zatem.

Twierdzenie: wzory na cosinus sumy oraz różnicy argumentów

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą wzory:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Teraz udowodnimy twierdzenie o sumie cosinusów i różnicy cosinusów.

Twierdzenie: wzory na sumę oraz różnicę cosinusów

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą wzory:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

Dowód

Zauważmy, że prawdziwe są następujące zależności:

$$\alpha = \tfrac{\alpha+\beta}{2} + \tfrac{\alpha-\beta}{2} \text{ i } \beta = \tfrac{\alpha+\beta}{2} - \tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

Podstawmy do wyrażenia $\cos\alpha + \cos\beta$ zapisane powyżej zależności:

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2} + \tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2} - \tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

Skorzystajmy ze wzorów na cosinus sumy i różnicy argumentów:

$$= \left(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - \sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) +$$

$$+ \left(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} + \sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

Po redukcji wyrażeń otrzymujemy zależność:

$$= \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

Podobnie postąpimy, aby udowodnić wzór na różnicę cosinusów:

$$\cos\alpha - \cos\beta = \cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2} + \tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2} - \tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \left(\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2} - \sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) +$$

$$-\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Przykład 1

Zapiszemy wyrażenie $\cos 10\alpha\cdot\cos 8\alpha+\cos 8\alpha\cdot\cos 6\alpha$ w postaci iloczynu.

Rozwiązanie

Na początek wyciągnijmy wspólny czynnik przed nawias:

$\cos 10\alpha\cdot\cos 8\alpha+\cos 8\alpha\cdot\cos 6\alpha=$

$=\cos 8\alpha(\cos 10\alpha+\cos 6\alpha)=$

Następnie zastosujemy wzór na sumę cosinusów:

$=2\cos 8\alpha\cdot\cos\left(\frac{10\alpha+6\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{10\alpha-6\alpha}{2}\right)=$

By ostatecznie otrzymać postać iloczynową:

$=2\cos 8\alpha\cdot\cos 8\alpha\cdot\cos 2\alpha=2\cos^2 8\alpha\cdot\cos 2\alpha$

Przykład 2

Obliczymy wartość wyrażenia $\dfrac{\cos 7^\circ+\cos 53^\circ+\sqrt{3}\cos 23^\circ}{2\sqrt{3}\cos 23^\circ}$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy wzór na sumę cosinusów:

$\dfrac{\cos 7^\circ+\cos 53^\circ+\sqrt{3}\cos 23^\circ}{2\sqrt{3}\cos 23^\circ}=$

$=\dfrac{2\cos 30^\circ\cdot\cos 23^\circ+\sqrt{3}\cos 23^\circ}{2\sqrt{3}\cos 23^\circ}=$

Następnie zredukujemy wyrazy podobne i otrzymamy wynik:

$=\dfrac{\sqrt{3}\cos 23^\circ+\sqrt{3}\cos 23^\circ}{2\sqrt{3}\cos 23^\circ}=1$

Przykład 3

Obliczymy wartość wyrażenia: $\dfrac{\cos 8^\circ+\cos 14^\circ+\cos 34^\circ+\cos 40^\circ}{\sin 87^\circ\cdot\cos 13^\circ\cdot\cos 24^\circ}$.

Rozwiązanie

Najpierw zmienimy kolejność składników sumy w liczniku, aby można było wyciągnąć wspólny czynnik przed nawias:

$$\frac{\cos 8^\circ + \cos 14^\circ + \cos 34^\circ + \cos 40^\circ}{\sin 87^\circ \cdot \cos 13^\circ \cdot \cos 24^\circ} =$$

$$= \frac{(\cos 40^\circ + \cos 8^\circ) + (\cos 34^\circ + \cos 14^\circ)}{\sin 87^\circ \cdot \cos 13^\circ \cdot \cos 24^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 24^\circ \cdot \cos 16^\circ + 2\cos 24^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\sin 87^\circ \cdot \cos 13^\circ \cdot \cos 24^\circ}.$$

Korzystamy ze wzoru na sumę cosinusów i otrzymujemy wynik:

$$\frac{2\cos 24^\circ(\cos 10^\circ + \cos 16^\circ)}{\sin(90^\circ - 3^\circ) \cdot \cos 13^\circ \cdot \cos 24^\circ} = \frac{2 \cdot 2\cos 13^\circ \cdot \cos 3^\circ}{\cos 13^\circ \cdot \cos 3^\circ} = 4.$$

Przykład 4

Obliczymy $\operatorname{tg} x$ wiedząc, że $\cos(x + 30^\circ) + \cos(x - 30^\circ) = \sqrt{3}\sin x$.

Rozwiązanie

Lewą stronę równania $\cos(x + 30^\circ) + \cos(x - 30^\circ) = \sqrt{3}\sin x$ przekształcamy, korzystając ze wzoru na sumę cosinusów:

$2\cos 30^\circ \cdot \cos x = \sqrt{3}\sin x$

Otrzymujemy równanie:

$\sqrt{3}\cos x = \sqrt{3}\sin x,$

które po podzieleniu stronami przez $\sqrt{3}\cos x$ daje oczekiwany wynik:

$\operatorname{tg} x = 1.$

Słownik

wzory na cosinus sumy oraz różnicy argumentów

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą wzory:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

wzory na sumę oraz różnicę cosinusów

Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzą wzory:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}.$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem, a następnie wykonaj polecania umieszczone pod nim.

Trwa wczytywanie danych ..

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1HZBbWgj

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wzoru na sumę i różnicę cosinusów.

Polecenie 2

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Wartość wyrażenia $\dfrac{\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}}{2\cos\frac{3\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}}$ jest równa:

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Zaznacz prawidłową odpowiedź. Wartość wyrażenia $\dfrac{\cos 48^\circ+\cos 42^\circ+\sqrt{2}\cos 3^\circ}{\sqrt{2}\sin 87^\circ}$ jest równa:

Ćwiczenie 7

Oblicz wartość wyrażenia: $\dfrac{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}{\sqrt{2}\sin 55^\circ}$.

Ćwiczenie 8

Zapisz poniższe wyrażenie $\cos 2x-\cos 4x-\cos 6x+\cos 8x$ w postaci iloczynu trzech funkcji trygonometrycznych.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór na sumę i różnicę cosinusów

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

Zakres rozszerzony. Uczeń:

6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \leq 1$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzory na sumę i różnicę cosinusów do obliczania wartości wyrażeń;
- dowodzi prawdziwości twierdzeń, korzystając ze wzorów na sumę i różnicę cosinusów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- odwrócona klasa;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji.
2. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z medium w sekcji „Film samouczek”.

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Wzór na sumę i różnicę cosinusów” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Rozpoznawanie wiedzy uczniów. Uczniowie tworzą pytania dotyczące tematu zajęć, na które odpowiedzą w trakcie lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w 2 grupach, metodą tekstu przewodniego – wykorzystując odpowiednie treści z sekcji „Przeczytaj” . Celem 1 grupy jest poznanie zastosowania wzoru na cosinus sumy argumentów a grupy 2 – zastosowania wzoru na cosinus sumy argumentów. Wszyscy uczniowie spotykają się przy „okrągłym stole”. Zadaniem przedstawicieli grup jest przekazanie zdobytej wiedzy pozostałym uczniom.
2. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.

3. W kolejnym kroku uczniowie realizują w parach ćwiczenia 3-5, po ich wykonaniu porównują otrzymane wyniki z inną parą.
4. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8, ale następnie porównują swoje odpowiedzi z kolegą lub koleżanką.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Wzór na sumę i różnicę cosinusów" i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Wzór na sumę i różnicę cosinusów").

Materiały pomocnicze:

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Film samouczek" można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Wzór na sumę i różnicę cosinusów".