

Rozwiązanie równania. Liczba rozwiązań równania.

Materiał składa się z sekcji: "Równanie z jedną niewiadomą".

Materiał zawiera filmy, ćwiczenia, w tym ćwiczenia interaktywne.

Materiał tekstowy - rozwiązanie równania, równania równoważne, sposób rozwiązywania równań pierwszego stopnia, równanie z jedną niewiadomą, rodzaje równań liniowych.

Filmy - zapisywanie za pomocą równań sytuacji przedstawionych w zadaniu, rozwiązywanie równań liniowych.

Ćwiczenia - rozwiązanie równania, liczba spełniająca równanie, liczba rozwiązań równania, rodzaje równań.

Rozwiązanie równania. Liczba rozwiązań równania.

Materiał zawiera podstawowe pojęcia związane z równaniami pierwszego stopnia z jedną niewiadomą. Są tu też zamieszczone przykłady rozwiązywania równań i określania ich rodzaju, ze względu na liczbę rozwiązań. Zdobytą wiedzę zastosujesz, określając rozwiązania równań zamieszczonych w ćwiczeniach.

Obliczenie wartości liczbowej wyrażenia algebraicznego polega na podstawieniu danych liczb w miejsce liter i wykonaniu wskazanych działań.

W przypadku równań także można podstawiać liczby w miejsce niewiadomych.

Otrzymywane wówczas równości liczbowe mogą być prawdziwe lub fałszywe.

Przykład 1

Przykład 1

$$4x - 3 = 6 + x \quad x = 3$$
$$L = 4 \cdot 3 - 3 \quad P = 6 + 3$$
$$L = 12 - 3 = 9 \quad P = 9$$
$$L = P$$

Przykład 2

$$3(-x + 1) = -9 - 5x \quad x = -4$$
$$L = 3 \cdot (-(-4) + 1) \quad P = -9 - 5 \cdot (-4)$$
$$L = 3 \cdot (4 + 1) \quad P = -9 + 20$$
$$L = 3 \cdot 5 = 15 \quad P = 11$$
$$L \neq P$$

Film dostępny pod adresem </preview/resource/R13zxxg5iQsY9>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia w jaki sposób możemy sprawdzić czy równanie zachodzi dla danego x .

Przykład 2

Rozwiązywanie równań liniowych



Film dostępny pod adresem [/preview/resource/RcqT4IDsgcMcU](https://preview/resource/RcqT4IDsgcMcU)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja pokazuje w jaki sposób możemy rozwiązać równanie liniowe.

Wszystkie rozważane w tym materiale równania to równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Definicja: Liczba spełniająca dane równanie

Liczba spełnia dane równanie, jeżeli po podstawieniu jej w miejsce niewiadomej i wykonaniu działań po obu stronach równania, otrzymamy prawdziwą równość liczbową.

Definicja: Rozwiązanie równania

Liczbę, która spełnia dane równanie, nazywamy rozwiązaniem lub pierwiastkiem równania.

Definicja: Równania równoważne

Mówimy, że równania z tymi samymi niewiadomymi są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy posiadają taki sam zbiór rozwiązań.

Przykład 3



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1U07r7eyjAm4>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia jak za pomocą równania możemy opisać pewną sytuację zachodzącą na wadze szalkowej, która znajduje się w równowadze.

Zapamiętaj!

Rozwiązać równanie to znaczy znaleźć wszystkie liczby, które spełniają to równanie lub wykazać, że równanie to nie ma rozwiązania. W tym celu przekształcamy równanie równoważnie, pamiętając o tym, że:

- do obu stron równania możemy dodać lub od obu stron równania odjąć tę samą liczbę lub wyrażenie,
- obie strony równania możemy pomnożyć lub podzielić przez tę samą liczbę różną od zera.

Przykład 4

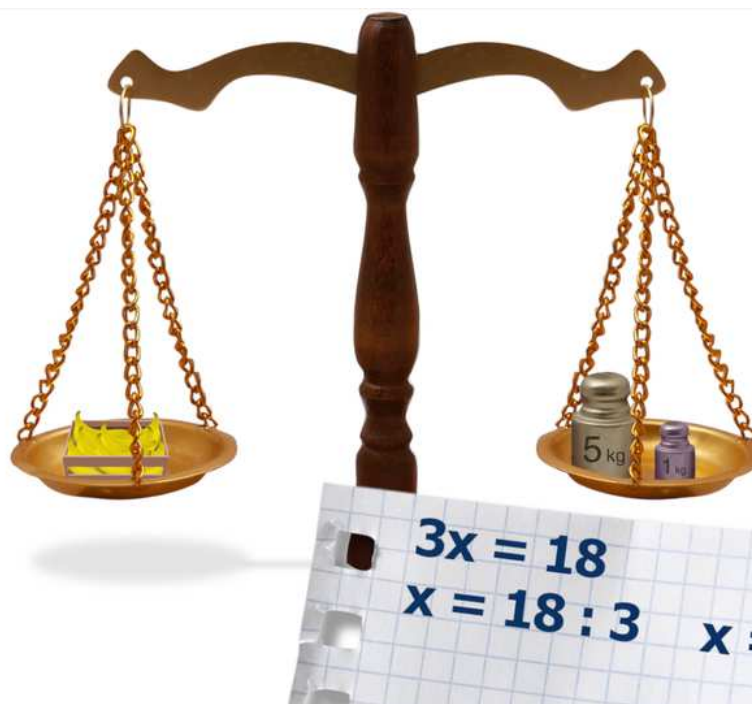


Film dostępny pod adresem </preview/resource/R14PQGRw7Pb5i>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia jak za pomocą równania możemy opisać pewną sytuację zachodzącą na wadze szalkowej, która znajduje się w równowadze.

Przykład 5



Film dostępny pod adresem </preview/resource/R1ABvdhmyZ8pg>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia jak za pomocą równania możemy opisać pewną sytuację zachodzącą na wadze szalkowej, która znajduje się w równowadze.

Zapamiętaj!

Dodawanie lub odejmowanie od obu stron równania tego samego wyrażenia inaczej można nazwać przenoszeniem tego wyrażenia z przeciwnym znakiem na drugą stronę równania.

Np. aby rozwiązać równanie: $2x - 5 = x + 1$, przenosimy z przeciwnym znakiem:

- x na lewą stronę równania

$$2x - x - 5 = 1,$$

- (-5) na prawą stronę równania

$$2x - x = 1 + 5$$

$$x = 6.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem równania jest liczba 6.

Równanie z jedną niewiadomą

Równania z jedną niewiadomą mogą mieć skończoną liczbę rozwiązań, np. jedno, dwa, trzy, cztery. Są również takie równania, które nie mają rozwiązania lub mają nieskończenie wiele rozwiązań.

Definicja: Zbiór rozwiązań równania

Zbiór wszystkich liczb spełniających dane równanie nazywamy zbiorem rozwiązań równania.

Przykład 6

Rozwiąż równania

- $x + 4 = 0$

Rozwiązanie: $x = -4$.

- $x + 4 = 4$

Rozwiązanie: $x = 0$.

- $x + 4 = x - 4$

Rozwiązanie: brak rozwiązania.

Przykład 7

Znajdź pierwiastek równania.

- $2a + 3 = 7$

Pierwiastek równania to $a = 2$.

- $x - 9 = 0$

Pierwiastek równania to $x = 9$.

Przykład 8

- Równania, które nie mają rozwiązania:

$$x + 2 = x, 2x - 5 = 2x + 1.$$

- Równania, które mają nieskończenie wiele rozwiązań:

$$2x - 2x + 2x = 2x, 0 \cdot x = 0.$$

Definicja: Równanie sprzeczne

Równanie, które nie ma rozwiązania, nazywamy równaniem sprzecznym.

Definicja: Równanie tożsamościowe

Równanie, które jest spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą, nazywamy równaniem tożsamościowym.

Ważne!

Liczba rozwiązań równania.

Równanie pierwszego stopnia z jedną niewiadomą może:

- nie mieć rozwiązania,
- mieć dokładnie jedno rozwiązanie,
- mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

Ćwiczenie 1



Połącz równanie z jego rozwiązaniem.

-2

$x + \frac{1}{2} = 0$

2

$2y = y - 1$

$-1\frac{1}{2}$

$3x + 2 = 5$

$-\frac{1}{2}$

$2x = -4$

-1

$z = 3z - 4$

$1\frac{1}{2}$

$\frac{2x}{3} = -1$

1

$2x = x + 1\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$

$z + 1 = 1\frac{1}{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Liczbą spełniającą równanie $2(x - 1) + 2 = 4x + 14$ jest

☐ 7

☐ $6\frac{1}{2}$

☐ $\frac{1}{7}$

☐ -7

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Zaznacz prawidłową odpowiedź. Liczbą spełniającą równanie $x(x+1)(x^2+1) = 3x^2+1$ może być

☐ $-\frac{1}{3}$

☐ -1

☐ 1

☐ 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Sprawdź, czy podana liczba jest rozwiązaniem danego równania. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Rozwiązaniem równania $\frac{1}{2}x - \frac{2-x}{3} = x - \frac{1}{6}$ jest $x = 3$.

☐ Rozwiązaniem równania $-3(x+2) + 4 = 6 - x$ jest $x = -4$.

☐ Rozwiązaniem równania $(2x - \frac{1}{2})(3x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + x(4x - \frac{1}{2})$ jest $x = 1$.

☐ Rozwiązaniem równania $2(x-2) - 3(x+2) = 4(x-4)$ jest $x = -1$.

☐ Rozwiązaniem równania $-(-8x+7) = 4(x+3) - 3$ jest $x = 4$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Sprawdź, które równania są spełnione przez liczbę $-\frac{2}{3}$. Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐ $6x(x+1) = -4\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right)$

☐ $2(3x+1) = -1 + 4x$

☐ $1 + x = \frac{x+2}{4}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Przeciągnij odpowiednie elementy z dolnej sekcji do górnej.

Brak rozwiązań

$x + 3 = 3$

$x = x$

$-x + 4 = -x$

$0 \cdot z = 0$

$2x + 3 = 3 + 2x$

$5 \cdot x = -5$

$0 \cdot x = 13$

$2x - 1 = 2x + 1$

$-2(4 - x) = 2x - 8$

Jedno rozwiązanie

Nieskończenie wiele rozwiązań

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Równanie $x = x + 11$ jest równaniem tożsamościowym.

☐ Równanie $x - 2 = 2 - x$ jest równaniem sprzecznym.

☐ Równanie $3x + 2x = x - 5x$ jest równaniem sprzecznym.

☐ Równanie $a + 17 = 2a + 17 - a$ jest równaniem tożsamościowym.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Które z podanych równań jest spreczne? Zaznacz wszystkie spreczne równania .

☐ $x + 4 = x$

☐ $x + 9 = x + 9$

☐ $3x - 1 = 3x + 1$

☐ $x - 10 = 10 - x$

☐ $2x = -2x + 1$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Które z podanych równań jest sprzeczne? Zaznacz wszystkie sprzeczne równania .

☐ $2(x - 1) = 2x - 1$

☐ $x - 10 = x + 10$

☐ $-6x + 6 = -6x$

☐ $x + x - 1 = 2x - 1$

☐ $0 \cdot y = -1$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Które z podanych równań są tożsamościowe? Zaznacz wszystkie prawidłowe odpowiedzi.

☐ $x - 4 = 4 - x$

☐ $4(x + 2) = 4x + 8$

☐ $2x = 2x$

☐ $-(x - 7) = 7 - x$

☐ $4(x + 2) = 4x + 2$

☐ $-(x - 7) = -x - 7$

☐ $x + 6 = 6$

☐ $0 \cdot x = 0$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



Przeciągnij w luki odpowiednie liczby tak, aby podana obok wartość była rozwiązaniem równania.

- $3x - \boxed{} = 3, x = 2$
- $2x + 3 = x - \boxed{}, x = -7$
- $-2(x + \boxed{}) = -x + 1, x = -5$
- $\boxed{} \cdot x + 8 = 20, x = -3$
- $-(x - 5) + \boxed{} = -2(x + 1), x = -9$

2 -4 4 3 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Jaki jednomian należy wpisać, aby otrzymane równanie było sprzeczne? Przeciągnij w luki odpowiednie jednomiany.

- $6x = \boxed{} + 1$
- $4x + \boxed{} = x + \frac{1}{2}$
- $-4x + \boxed{} = -5x - 5$
- $2(x - 3) = x + \boxed{}$
- $3(\boxed{} - 4) = -6x$
- $2x - (6 - 7x) = 2 + \boxed{}$

$-2x$ $9x$ $6x$ $-x$ $-3x$ x

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Jaki jednomian należy wpisać, aby otrzymane równanie było tożsamościowe? Przeciągnij w luki odpowiednie jednomiany.

- $3x = 7x + \boxed{}$
- $12x - 5x = \boxed{}$
- $4(x - \boxed{}) = 3x$
- $-x + 6x - 8 = \boxed{} - 1 - 7$
- $-5(\boxed{} - 1\frac{3}{5}x) = -3x + x$

$2x$ $-4x$ $5x$ $7x$ $\frac{1}{4}x$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



Przyporządkuj do odpowiedniej grupy takie wyrażenie algebraiczne, aby równanie $3x - 1 = x + \dots$

miało jedno rozwiązanie

$x - 3$

$x + 7$

$2x - 2 + 1$

x

$3x - x$

$2x$

$x + x$

$3x - x - 1$

$2x - 1$

nie miało rozwiązania

miało nieskończenie wiele rozwiązań

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



Uzasadnij, że równanie $|x| = x$ nie jest równaniem tożsamościowym. Ile rozwiązań ma to równanie?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.