Zależność między polem trójkąta a promieniem koła wpisanego w trójkąt

Zależność między polem trójkąta a promieniem koła wpisanego w trójkąt

Źródło: dostępny w internecie: pixabay.com, domena publiczna.

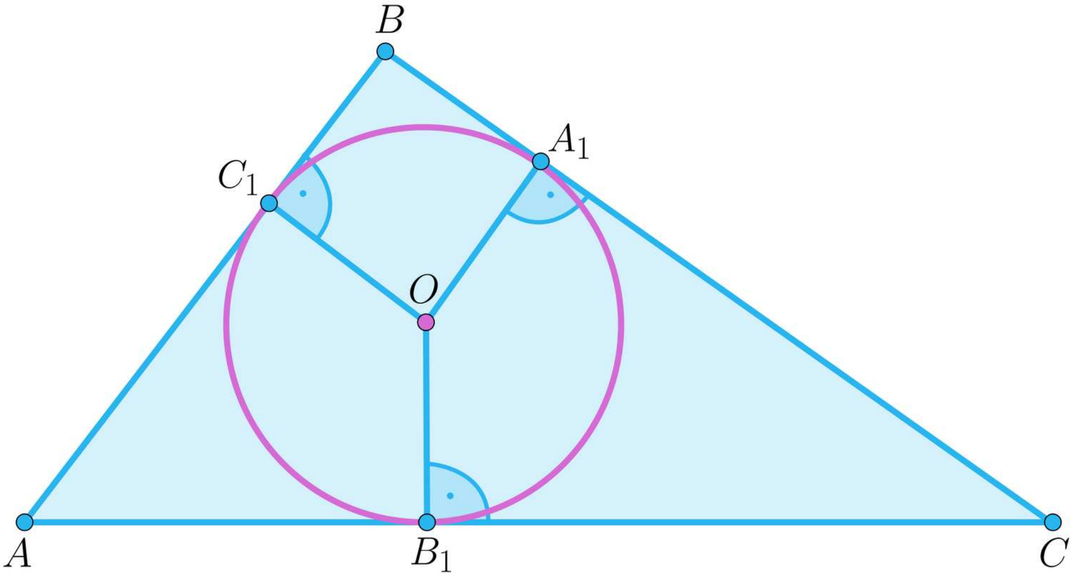
W tym materiale przedstawimy związek pomiędzy polem trójkąta a promieniem koła wpisanego w ten trójkąt. Przedstawimy również serię wzorów, pozwalających na szybkie wyznaczanie promienia koła wpisanego w szczególne klasy trójkątów.

Twoje cele

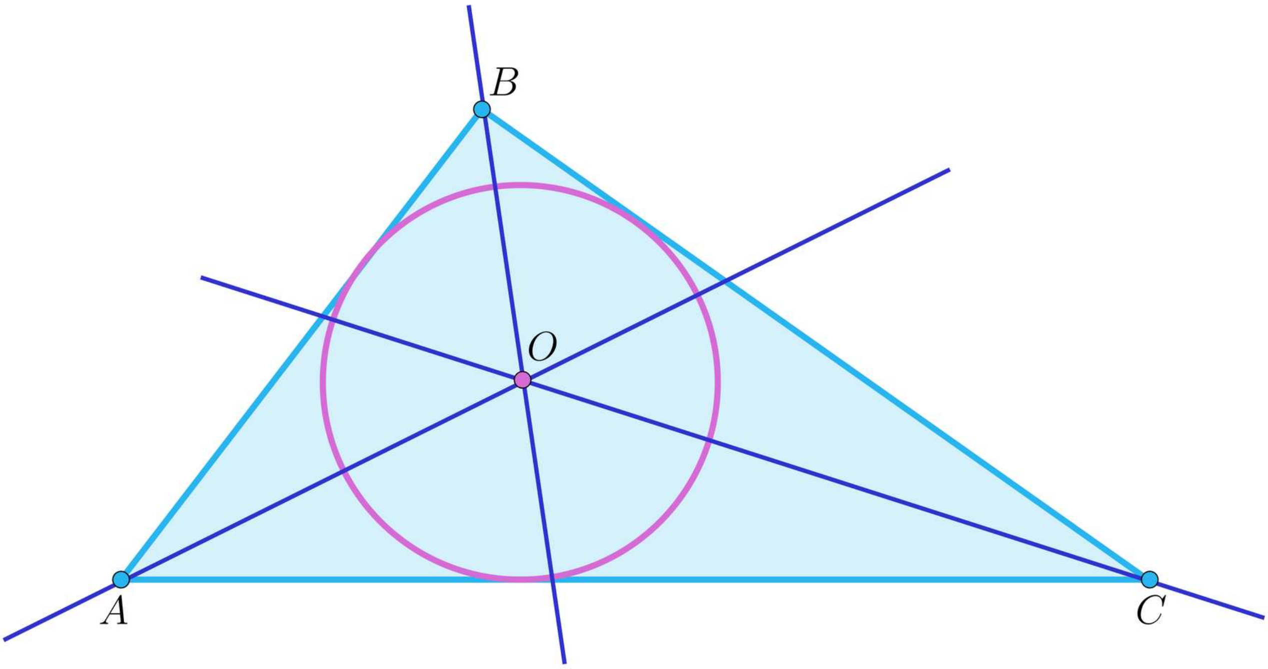
- Określisz związek pomiędzy polem trójkąta a promieniem koła wpisanego w ten trójkąt.
- Dobierzesz odpowiedni wzór do danych zawartych w zadaniu.
- Wykorzystasz wiedzę o różnych możliwościach wyznaczania pola trójkąta, w celu bardziej efektywnego wyznaczania promienia koła wpisanego w trójkąt.

Przeczytaj

Mówimy, że **koło jest wpisane w trójkąt**, jeśli okrąg będący brzegiem koła jest styczny do wszystkich boków trójkąta. Trójkąt nazywamy wtedy **trójkątem opisanym** na tym kole.



Środek koła wpisanego w trójkąt jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta (patrz rysunek poniżej).



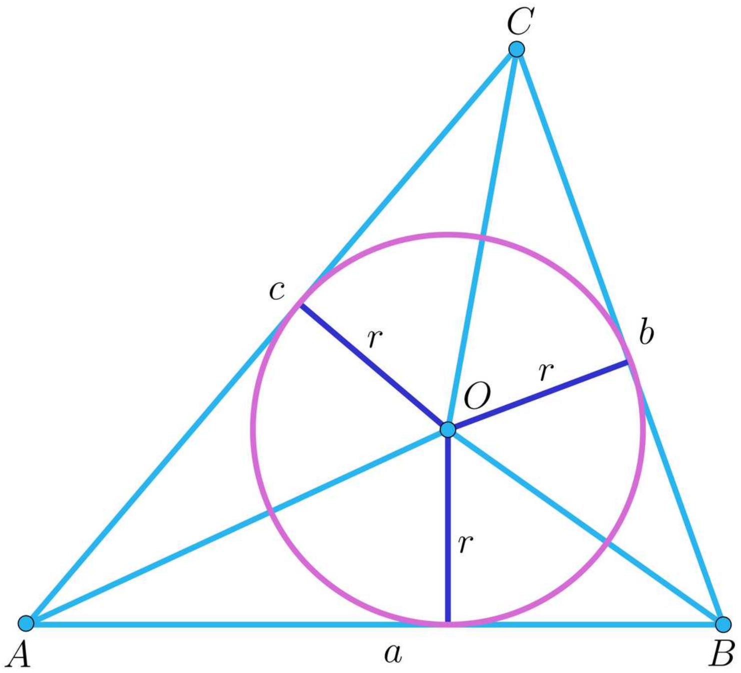
Konsekwencją powyższej własności jest fakt, że w każdy trójkąt można wpisać tylko jedno koło.

Pomiędzy polem trójkąta, jego obwodem oraz promieniem koła wpisanego w trójkąt zachodzi pewien bardzo użyteczny związek. Mianowicie pole trójkąta jest równe iloczynowi promienia wpisanego koła i połowy obwodu trójkąta

$$P = r \cdot p,$$

gdzie:
p – połowa obwodu trójkąta $p = \frac{a+b+c}{2}$,
P – pole trójkąta.

Udowodnimy teraz powyższy wzór. Spójrzmy na poniższy rysunek.



Jeżeli w trójkącie ABC poprowadzimy odcinki łączące wierzchołki ze środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt, to otrzymamy trzy mniejsze trójkąty: ABO, BCO, CAO. Łatwo zauważyć, że wysokość każdego z nich jest równa długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Sumując pola trzech powstałych trójkątów, otrzymujemy pole trójkąta ABC:

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABO} + P_{\triangle BCO} + P_{\triangle CAO} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = r \cdot \frac{1}{2} \cdot (a+b+c) = rp.$$

Co kończy nasz dowód.

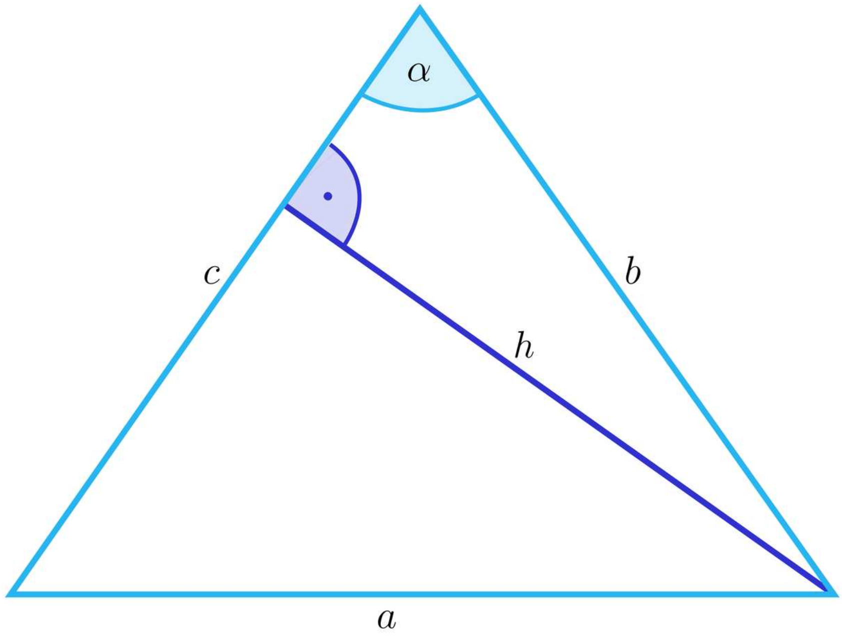
Ciekawostka

Promień r koła wpisanego w trójkąt można obliczyć również z alternatywnego wzoru:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

gdzie:
a, b, c – długości boków trójkąta,
p – połowa obwodu trójkąta $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Dowód



Aby udowodnić powyższy wzór skorzystamy z funkcji sinus.

Zauważmy, że z definicji funkcji sinus mamy $\sin\alpha = \frac{h}{b}$, a stąd po przekształceniu $h = b \cdot \sin\alpha$. Zatem wzór na pole trójkąta możemy zapisać jako

$P = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

Skorzystamy teraz z twierdzenia cosinusów: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Stąd mamy, że $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Stosując jedynkę trygonometryczną ($\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), możemy zapisać

$$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = \left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) =$$

$$= \left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) =$$

$$= \left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right)\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\right) =$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} \cdot \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Korzystając z faktu, że $2p = a + b + c$, mamy:

$a + b - c = 2p - 2c,$

$a - b + c = 2p - 2b,$

$a + b + c = 2p$

$b + c - a = 2p - 2a.$

Kontynuując powyższe rówanie

$\sin^2\alpha = \frac{2(p-c)\cdot 2(p-b)}{2bc} \cdot \frac{2p\cdot 2(p-a)}{2bc} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$,

zatem

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$.

Wróćmy teraz do wzoru na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$.

Podstawmy $\sin\alpha$ do powyższego wzoru

$P = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

Otrzymaliśmy wzór na pole trójkąta jeżeli znane są długości jego boków.

Wiemy, że $P = rp$.

Zatem

$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$

Ciekawostka

Jeśli znamy promień okręgu opisanego R, to promień okręgu wpisanego można obliczyć ze wzoru:

$$r = \frac{abc}{4Rp}.$$

Dowód

Wiemy, że pole trójkąta możemy obliczyć ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$, gdzie α jest kątem leżącym między bokami a i b, naprzeciw boku c. Z twierdzenia sinusów wynika, że $\sin\alpha = \frac{c}{2R}$, zatem

$P = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

Wiemy, że $P = rp$.

Zatem

$rp = \frac{abc}{4R}$

$r = \frac{abc}{4Rp}$.

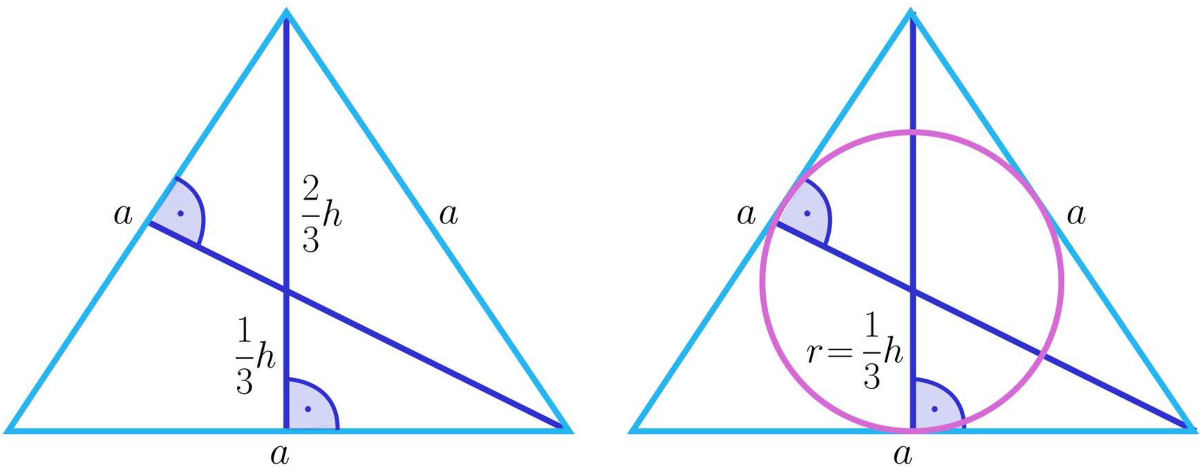
Ciekawostka

Promień r okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny można obliczyć ze wzoru:

$$r = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

gdzie:
a – długość boku trójkąta,
R – promień okręgu opisanego.

Dowód



Wysokości w trójkącie równobocznym dzielą się w stosunku $2 : 1$, licząc od wierzchołka. Punkt przecięcia wysokości jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym (jest także środkiem okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny). Zatem

$r = \frac{1}{3}h$

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$

Ciekawostka

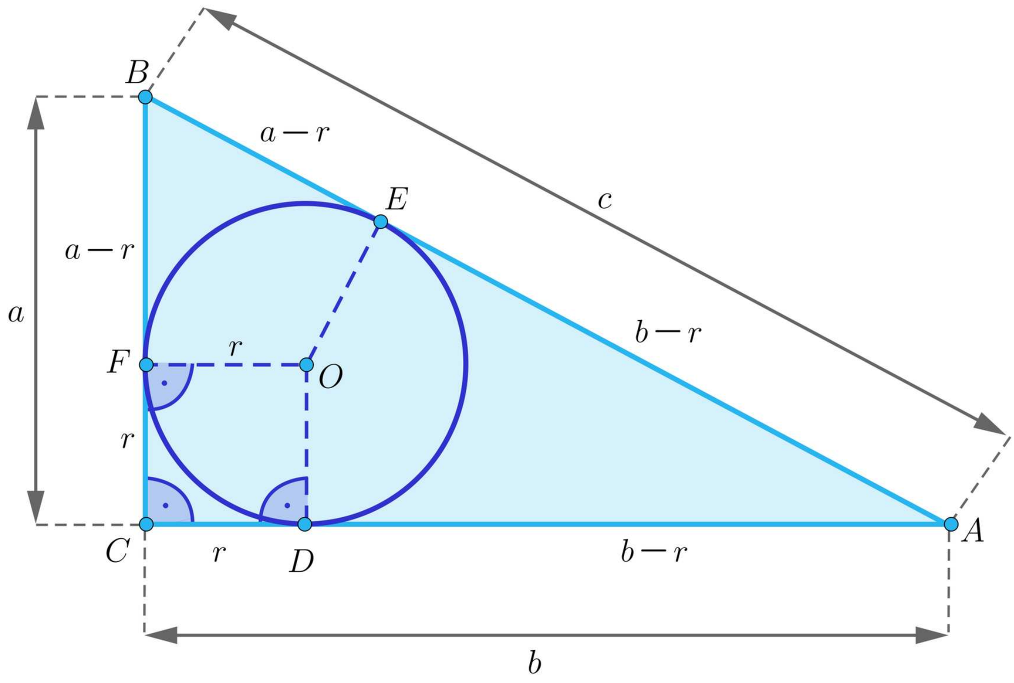
Długość promienia r okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny można obliczyć ze wzoru:

$$r = \frac{a+b-c}{2},$$

gdzie:
a, b – długości przyprostokątnych,
c – długość przeciwprostokątnej.

Dowód

Spójrzmy na poniższy rysunek.



Długość przeciwprostokątnej trójkąta ABC, jest równa:

$c = a - r + b - r = a + b - 2r$.

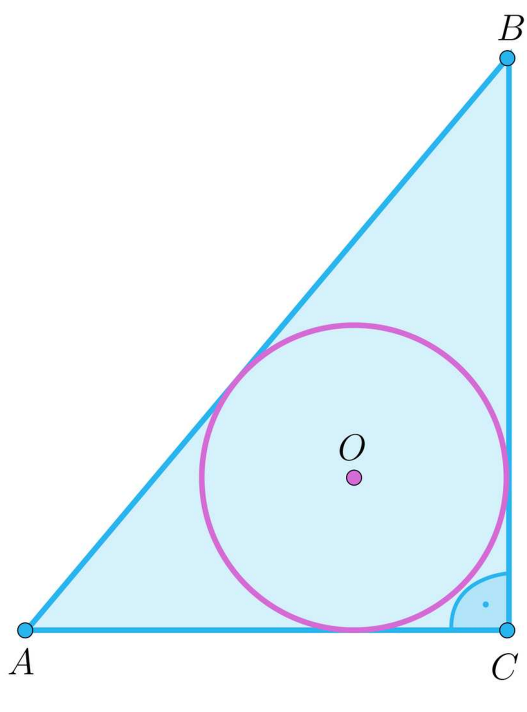
Wyznaczając z powyższego wzoru r, dostajemy:

$r = \frac{a+b-c}{2}$.

Przykład 1

W trójkącie ABC: $|AC| = 9$, $|BC| = 12$, miara kąta przy wierzchołku kąta C wynosi 90°. Obliczymy długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Rozwiązanie



Użyjemy wzoru na długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt:

$P = r \cdot p$, zatem $r = \frac{P}{p}$.

Znane są długości dwu przyprostokątnych. Możemy obliczyć długość przeciwprostokątnej oraz pole trójkąta.

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15.$$

Wyznaczymy teraz pole trójkąta ABC:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54.$$

Następnie obliczymy połowę obwodu trójkąta:

$$p = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

W ten sposób długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest równa:

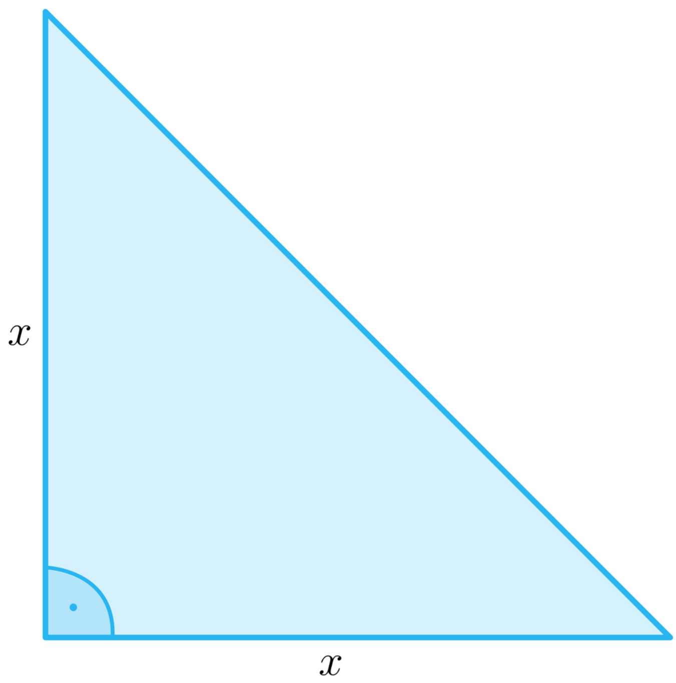
$$r = \frac{P}{p} = \frac{54}{18} = 3.$$

Przykład 2

W prostokątny trójkąt równoramienny o polu 8 wpisano koło. Wyznaczymy długość promienia tego koła.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Wiemy, że pole w prostokątnym trójkącie równoramiennym jest równe połowie iloczynu długości przyprostokątnych. Zatem: $\frac{1}{2} \cdot x \cdot x = 8$ stąd $x^2 = 16$.

Zatem $x = 4$ lub $x = -4$.

Ponieważ długość boku trójkąta nie może być liczbą ujemną, zatem $x = 4$.

Długość przeciwprostokątnej możemy obliczyć z twierdzenia Pitagorasa, albo zauważyć, że nasz trójkąt jest połową kwadratu, a przeciwprostokątna jest przekątną tego kwadratu. Zatem przeciwprostokątna ma długość $4\sqrt{2}$.

Możemy zatem obliczyć obwód naszego trójkąta, który wynosi $8 + 4\sqrt{2}$.

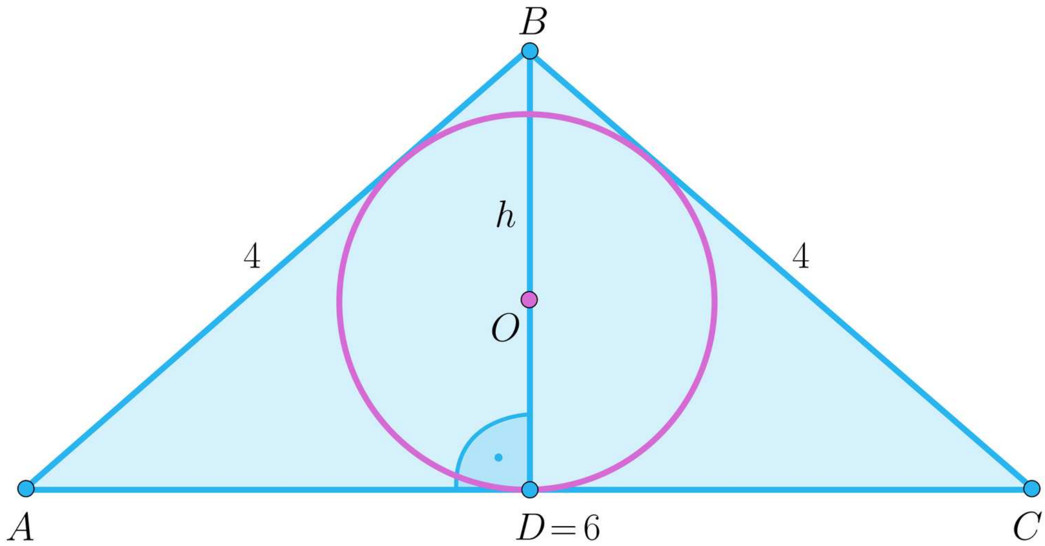
Wstawiając dostępne dane do wzoru $r = \frac{P}{p}$ mamy
$r = \frac{8}{4+2\sqrt{2}} = \frac{4}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{8-4\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2}$.

Zatem długość promienia koła wynosi $4 - 2\sqrt{2}$.
Przykład 3

W trójkąt równoramienny o bokach długości 4, 4 ,6 wpisano okrąg. Wyznacz stosunek pola koła ograniczonego tym okręgiem do pola trójkąta.

Rozwiązanie

Musimy wyznaczyć zarówno pole trójkąta, jak też pole koła. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku:



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = b^2$.

Stąd:
$3^2 + h^2 = 4^2$
$9 + h^2 = 16$,
czyli:

$h^2 = 7$
i ostatecznie:
$h = \sqrt{7}$.

Po zastosowaniu znanego wzoru na pole trójkąta: $P_t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$ mamy
$P_t = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$.

Zauważmy ponadto, że połowa obwodu naszego trójkąta wynosi $p = \frac{4+4+6}{2} = 7$.

Stąd, po zastosowaniu wzoru: $r = \frac{P_t}{p}$ mamy $r = \frac{3\sqrt{7}}{7}$.

Pole koła o promieniu długości r zadane jest wzorem $P_k = \pi r^2$.

Zatem, w naszym przypadku: $P_k = \pi \left(\frac{3\sqrt{7}}{7} \right)^2 = \frac{9}{7}\pi$.

Ostatecznie, stosunek pola koła do pola trójkąta wynosi: $\frac{P_k}{P_t} = \frac{\frac{9}{7}\pi}{3\sqrt{7}}$.

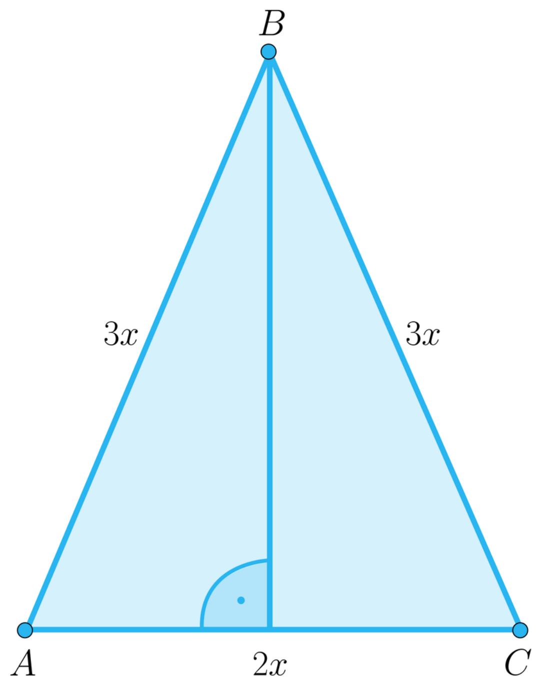
Co po usunięciu niewymierności z mianownika daje: $\frac{P_k}{P_t} = \frac{9\sqrt{7}\pi}{147}$.

Przykład 4

W trójkącie równoramiennym ABC o obwodzie 120, gdzie $|AB| = |BC|$, stosunek długości boków AB i AC wynosi $3 : 2$. Wyznacz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Rozwiązanie

Oznaczmy boki trójkąta jak na rysunku poniżej:



Wówczas obwód tego trójkąta można wyrazić w następujący sposób: $3x + 3x + 2x = 120$, czyli $8x = 120$, skąd $x = 15$.

Zatem boki naszego trójkąta mają długości $|AB| = |BC| = 45$, $|AC| = 30$.

Wysokość tego trójkąta można łatwo obliczyć z twierdzenia Pitagorasa, a mianowicie $45^2 = h^2 + 15^2$, czyli $h^2 = 1800$. Stąd $h = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$.

Możemy teraz obliczyć pole trójkąta, które wynosi $P = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30\sqrt{2} = 450\sqrt{2}$.

Ostatecznie długość promienia okręgu wpisanego obliczamy ze wzoru $r = \frac{P}{p} = \frac{450\sqrt{2}}{60} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

Słownik

pole koła

pole koła o promieniu $r > 0$ zadane jest wzorem $P = \pi r^2$

dwusieczna kąta

dwusieczną kąta nazywamy zbiór punktów równoodległych od jego ramion

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami przedstawionymi w animacji, a następnie wykonaj polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DfwDoeRY2

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej zależności między polem trójkąta a promieniem koła wpisanego w ten trójkąt.

Polecenie 2

Oblicz pole koła wpisanego w trójkąt o bokach 4, 6, 8.

Polecenie 3

W trójkąt, którego boki są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi, wpisano okrąg o polu równym $\frac{8}{3}\pi$. Wyznacz boki tego trójkąta jeśli wiadomo, że jego pole wynosi $6\sqrt{6}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Krystyna i Adam Kiersztyn

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zależność między polem trójkąta a promieniem koła wpisanego w trójkąt

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

10. wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
11. stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wyznacza promień koła wpisanego w trójkąt w oparciu o dostępne informacje o trójkącie
- wyznacza pole trójkąta na podstawie promienia okręgu wpisanego i obwodu trójkąta
- określa stosunek pola trójkąta do pola koła wpisanego w ten trójkąt

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- burza mózgów
- mapa myśli

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny,
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji, a następnie wraz z uczniami określa cele i kryteria sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 3 osobowych grupach zapoznają się z informacjami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj". Każda z grup tworzy własną mapę myśli na temat zależności między polem trójkąta a promieniem koła wpisanego w trójkąt. Uczniowie porównują swoje prace i omawiają z nauczycielem różnice w interpretacji zagadnienia.
2. Uczniowie w parach analizują rozwiązanie przykładów w sekcji „Przeczytaj".
3. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się". Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach zadania numer 3, 4 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
5. Uczniowie wykonują samodzielnie zadanie 6 z sekcji „Sprawdź się". Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Zależność między polem trójkąta a promieniem koła wpisanego w trójkąt” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8.

Materiały pomocnicze:

- Pole trójkąta
- Pole koła
- Okrąg wpisany w trójkąt

Wskazówki metodyczne:

Animację można również wykorzystać podczas realizacji lekcji „Okrąg wpisany w trójkąt”.