



Kąty między prostymi a płaszczyznami w prostopadłościanie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Aplet](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Kąty między prostymi a płaszczyznami w prostopadłościanie

Źródło: [Viktor Peschel](#) z [Pixabay](#), domena publiczna.

W prostopadłościanie można wskazać różne rodzaje kątów pomiędzy prostymi a płaszczyznami. Miara takiego kąta może wynosić 0° jeżeli prosta jest równoległa do płaszczyzny lub 90° jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny. W pozostałych przypadkach miara takiego kąta jest związana z rzutem prostokątnym prostej na płaszczyznę.

Twoje cele

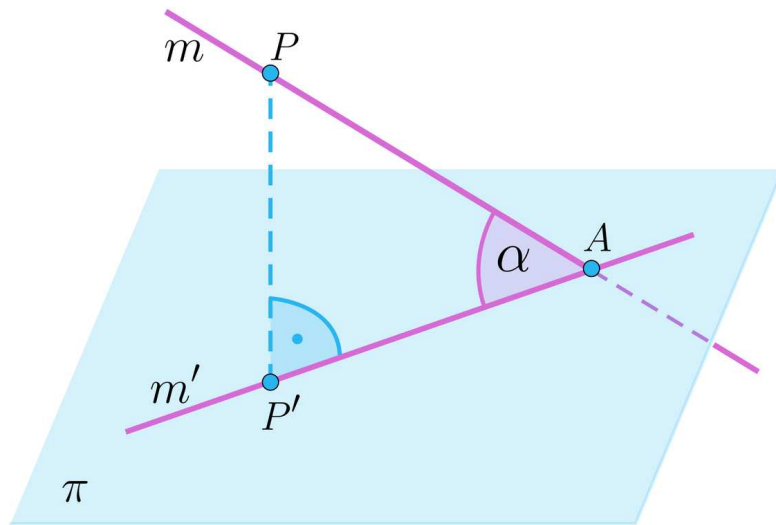
- Zdefiniujesz kąt pomiędzy prostą a płaszczyzną.
- Wskażesz w prostopadłościanie kąty pomiędzy prostymi a płaszczyznami.
- Obliczysz miary kątów w prostopadłościanie.
- Wykorzystasz tablice wartości funkcji trygonometrycznych do odczytywania miar kątów.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję **kąta między prostą a płaszczyzną**.

Definicja: kąt między prostą i płaszczyzną

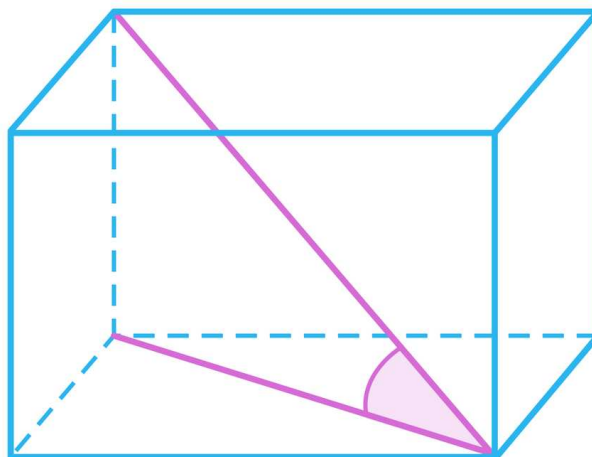
Kątem α między prostą m a płaszczyzną π nazywamy kąt między prostą m i jej rzutem prostokątnym m' na płaszczyznę π .



W przypadku **prostopadłościanu** będziemy rozpatrywać kilka różnych rodzajów kątów między prostymi (odcinkami) a płaszczyznami. Należą do nich:

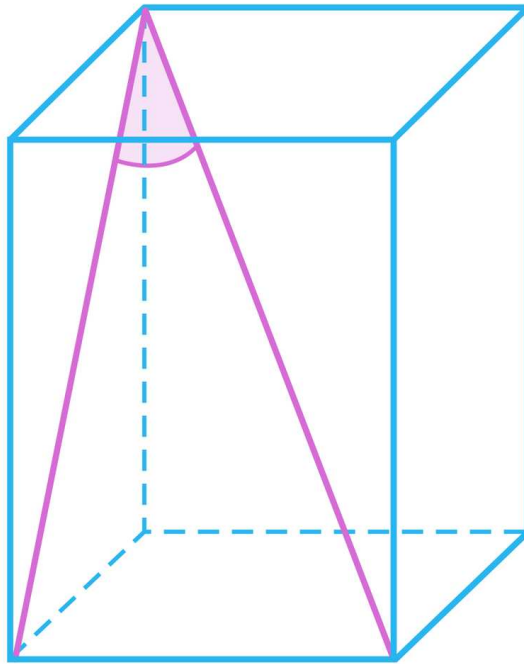
1. Kąt między przekątną prostopadłościanu a płaszczyzną podstawy.

Miara kąta między przekątną prostopadłościanu a płaszczyzną jego podstawy jest równa mierze kąta między przekątną prostopadłościanu i przekątną podstawy.



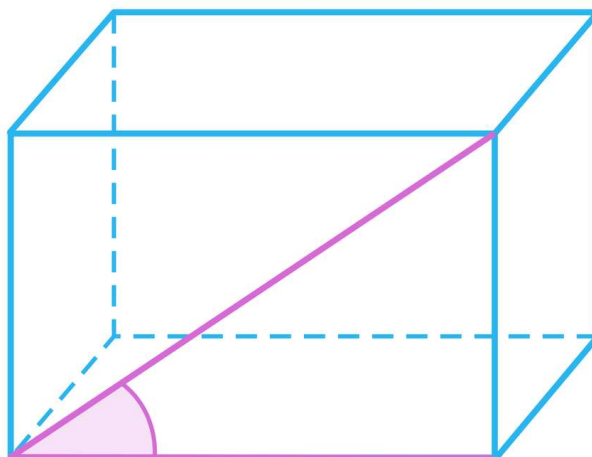
2. Kąt między przekątną prostopadłościanu a ścianą boczną.

Miara kąta między przekątną prostopadłościanu a ścianą boczną jest równa mierze kąta między przekątną prostopadłościanu a przekątną ściany bocznej.



3. Kąt między przekątną jednej ściany a sąsiednią ścianą prostopadłościanu.

Miara kąta między przekątną ściany a sąsiednią ścianą jest równa mierze kąta między przekątną ściany a krawędzią wspólną obu ścian.



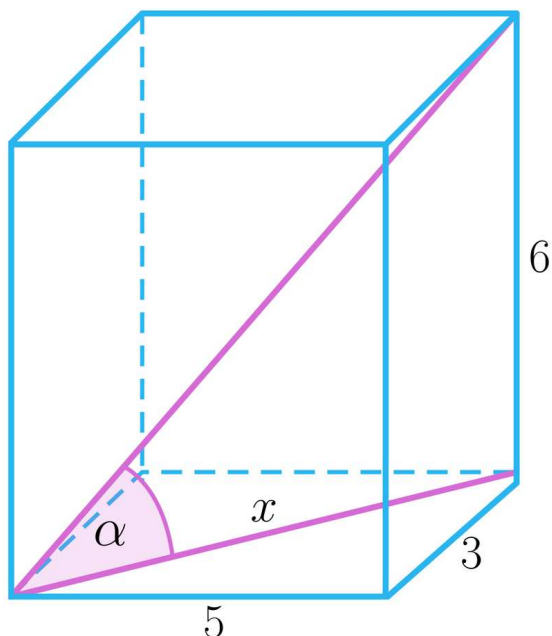
Do wyznaczania przybliżonych miar kątów będziemy używać funkcji trygonometrycznych oraz tablic wartości tych funkcji.

Przykład 1

Wyznamy miarę kąta między przekątną prostopadłościanu a płaszczyzną jego podstawy, jeżeli krawędzie prostopadłościanu mają długości 3,5,6.

Rozwiązanie:

Narysujmy prostopadłościan, zaznaczmy odpowiedni kąt, jak na poniższym rysunku.



Długość przekątnej podstawy obliczamy z twierdzenia Pitagorasa.

Zatem:

$$x^2 = 5^2 + 3^2,$$

$$x = \sqrt{34}.$$

Zauważmy, że trójkąt zbudowany z przekątnej podstawy, krawędzi bocznej oraz przekątnej prostopadłościanu, jest prostokątny.

Do wyznaczenia miary kąta użyjemy funkcji trygonometrycznej tangens. Wobec tego:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{\sqrt{34}} = \frac{6\sqrt{34}}{34} = \frac{3\sqrt{34}}{17}.$$

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, otrzymujemy, że $\alpha \approx 46^\circ$.

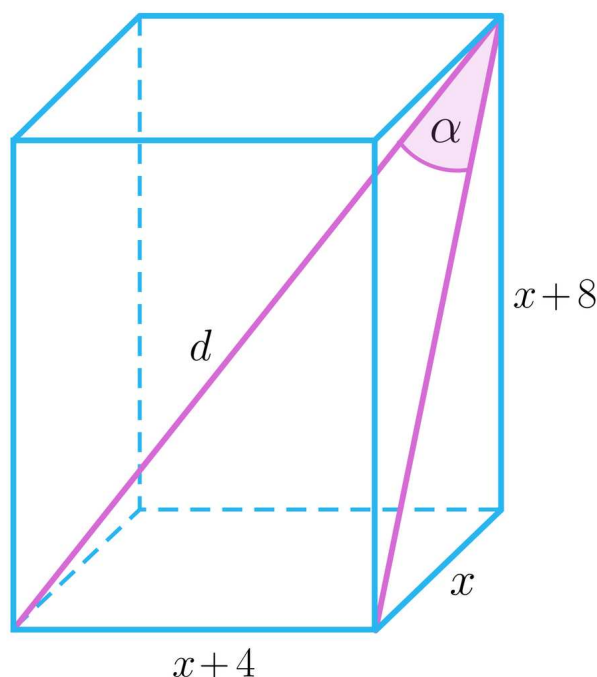
Przykład 2

W prostopadłościanie długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 4, a suma wyrazów tego ciągu wynosi 36. Wyznamy sinus

kąta między przekątną prostopadłościanu a ścianą, utworzoną z najdłuższych i najkrótszych krawędzi.

Rozwiązanie:

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia jak na poniższym rysunku. Krawędzie wychodzące z jednego wierzchołka tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 4.



Ponieważ suma wyrazów ciągu arytmetycznego, który tworzą długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka wynosi 36, do wyznaczenia wartości x rozwiązujemy równanie:

$$x + x + 4 + x + 8 = 36,$$

$$3x + 12 = 36, \text{ czyli } x = 8.$$

Wobec tego krawędzie prostopadłościanu mają długości odpowiednio 8, 12, 16.

Zauważmy, że przekątna prostopadłościanu, przekątna ściany bocznej oraz krawędź podstawy tworzą trójkąt prostokątny.

Obliczmy długość przekątnej prostopadłościanu.

$$d = \sqrt{8^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{64 + 144 + 256} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}.$$

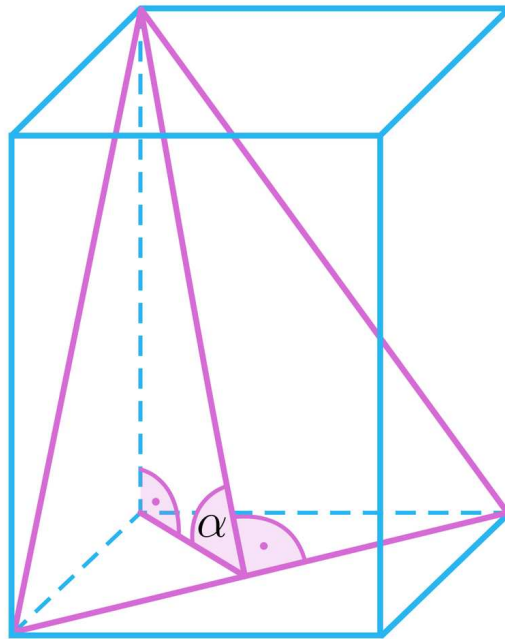
Zatem sinus kąta między przekątną prostopadłościanu a ścianą, utworzoną z najdłuższych i najkrótszych krawędzi prostopadłościanu, jest równy sinusowi kąta zaznaczonego na powyższym rysunku.

Wobec tego:

$$\sin \alpha = \frac{12}{4\sqrt{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{29}}{29}.$$

Przykład 3

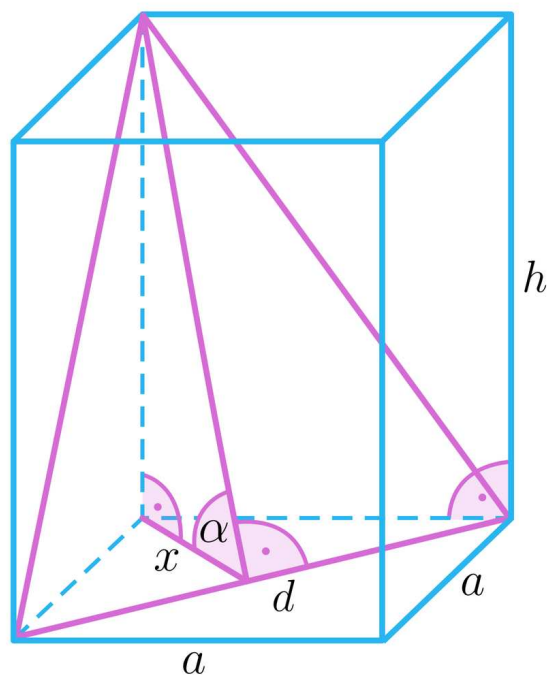
Wyznamy miarę kąta α z rysunku, jeżeli podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o obwodzie równym 20, a długość krawędzi bocznej jest o 3 dłuższa od krawędzi podstawy.



Rozwiązanie:

Wprowadźmy oznaczenia długości krawędzi oraz odcinków w prostopadłościanie.

Zauważmy, że w przekroju mamy trójkąt równoramienny, którego podstawa pokrywa się z przekątną podstawy prostopadłościanu, a ramiona z przekątnymi ścian bocznych prostopadłościanu.



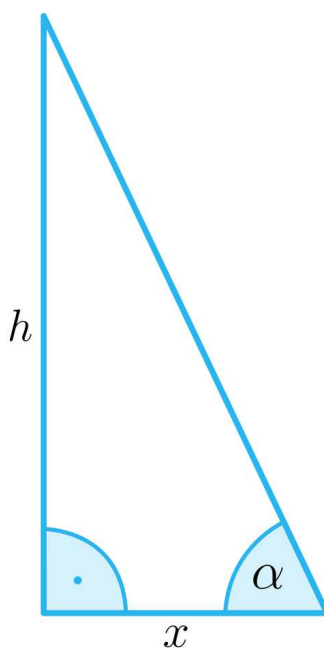
Ponieważ obwód podstawy prostopadłościanu wynosi 20, zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$4 \cdot a = 20, \text{ czyli } a = 5.$$

Ponieważ długość krawędzi bocznej jest o 3 dłuższa od krawędzi podstawy, zatem $h = 8$.

Długość przekątnej podstawy wynosi $d = 5\sqrt{2}$ oraz $x = \frac{1}{2}d = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Rozważmy trójkąt, jak na poniższym rysunku.



Korzystając z funkcji trygonometrycznej tangens, otrzymujemy, że:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{16}{5\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

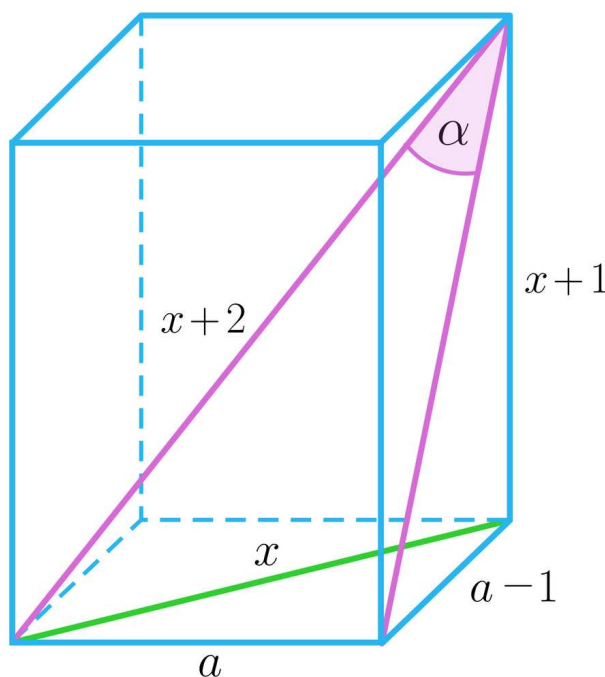
Jeżeli wykorzystamy tablice wartości funkcji trygonometrycznych, to $\alpha \approx 66^\circ$.

Przykład 4

Długości przekątnej podstawy prostopadłościanu, krawędzi bocznej oraz przekątnej prostopadłościanu są kolejnymi liczbami naturalnymi. Wyznamy miarę kąta nachylenia przekątnej tego prostopadłościanu do ściany bocznej o mniejszej powierzchni, jeżeli krawędzie podstawy prostopadłościanu różnią się o 1.

Rozwiązanie:

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Ponieważ przekątna podstawy, krawędź boczna oraz przekątna prostopadłościanu tworzą trójkąt prostokątny, zatem do wyznaczenia wartości x rozwiązujemy równanie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2,$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

$$\text{Zatem } x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ oraz } x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Ponieważ $x > 0$, zatem $x = 3$, $x + 1 = 4$, $x + 2 = 5$.

Do wyznaczenia wartości a wykorzystujemy twierdzenie Pitagorasa i rozwiązujemy równanie:

$$(a - 1)^2 + a^2 = 3^2$$

$$2a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$a^2 - a - 4 = 0$$

$$a_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$a_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

Do wyznaczenia miary kąta α użyjemy funkcji sinus.

$$\text{Wobec tego } \sin \alpha = \frac{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}}{5} = \frac{1 + \sqrt{17}}{10}.$$

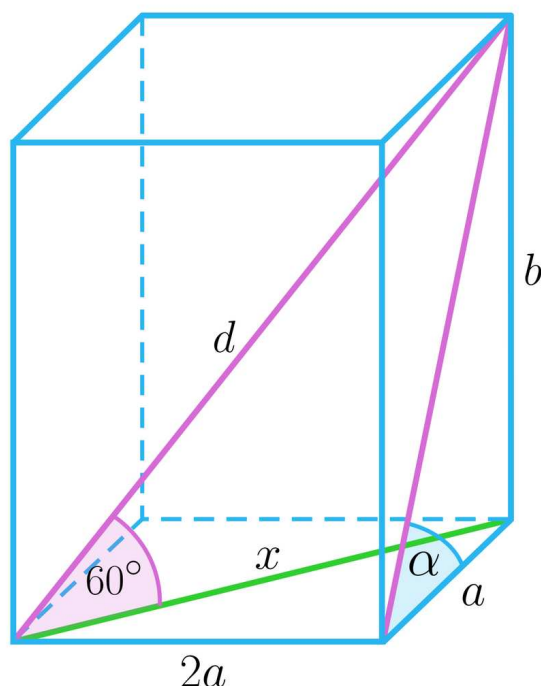
Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, odczytujemy że $\alpha \approx 31^\circ$.

Przykład 5

W prostopadłościanie przekątna ma długość d i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Wyznamy tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej o mniejszej powierzchni do płaszczyzny podstawy tego prostopadłościanu, jeżeli jedna z krawędzi podstawy jest dwa razy mniejsza od drugiej krawędzi.

Rozwiązanie:

Narysujmy prostopadłościan, wprowadźmy oznaczenia długości krawędzi i zaznaczmy odpowiednie kąty.



Ponieważ przekątna długości d jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° , więc:

$$x = \frac{1}{2}d,$$

$$b = \frac{d\sqrt{3}}{2}.$$

Jeżeli jedna z krawędzi podstawy jest dwa razy mniejsza od drugiej krawędzi, to korzystając z twierdzenia Pitagorasa rozwiązujemy równanie:

$$(2a)^2 + a^2 = \left(\frac{1}{2}d\right)^2$$

$$a^2 = \frac{d^2}{20}$$

$$a = \frac{d}{\sqrt{20}} = \frac{d\sqrt{5}}{10}$$

Wobec tego tangens kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej o mniejszej powierzchni do płaszczyzny podstawy tego prostopadłościanu jest równy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{d\sqrt{3}}{2}}{\frac{d\sqrt{5}}{10}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{5}} = \sqrt{15}$$

Słownik

prostopadłościan

równoległościan, którego wszystkie ściany są prostokątami

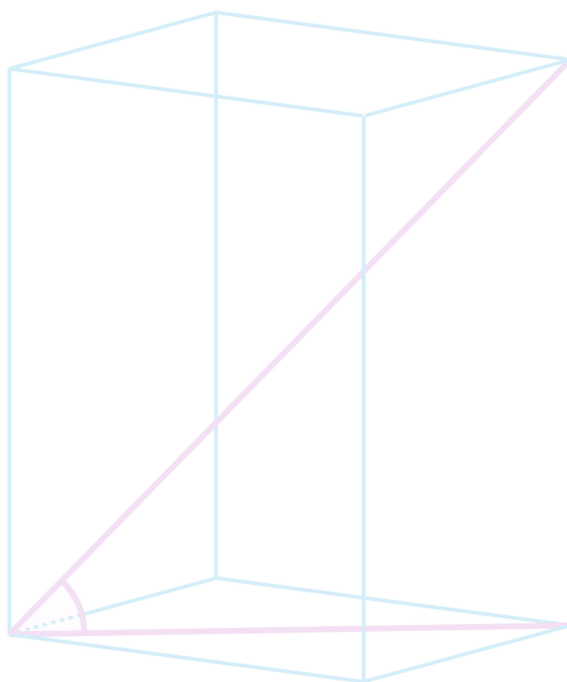
kąt między prostą a płaszczyzną

kąt pomiędzy prostą i jej rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę

Aplet

Polecenie 1

Uruchom aplet i zwróć uwagę na różne rodzaje kątów pomiędzy prostymi a płaszczyznami w prostopadłościanie, a następnie wykonaj poniższe polecenie.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dgt4vWPkg>

Polecenie 2

Wyznacz miarę kąta nachylenia przekątnej prostopadłościanu do płaszczyzny podstawy, jeżeli długości krawędzi podstawy prostopadłościanu wynoszą 4 i 3 a krawędź boczna ma długość 6.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź.

Jeżeli kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do ściany bocznej ma miarę 45° , to:

- ☐ przekątna prostopadłościanu jest dwa razy dłuższa od długości jednej z krawędzi jego podstawy.
- ☐ rozpatrywany prostopadłościan jest sześcianem.
- ☐ długość przekątnej jednej ściany bocznej jest równa długości jednej z krawędzi podstawy.

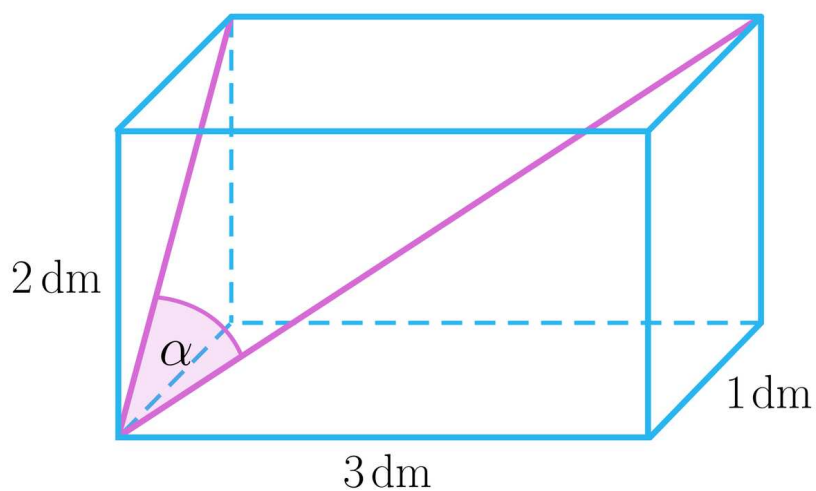
Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Na rysunku przedstawiono prostopadłościan.



Na podstawie rysunku wstaw w tekst odpowiednie liczby lub zwroty.

Zaznaczona przekątna ściany bocznej prostopadłościanu ma długość dm.

Przekątna prostopadłościanu z rysunku ma długość dm.

Kąt α jest kątem pomiędzy przekątną prostopadłościanu i .

płaszczyznę podstawy

$\sqrt{5}$

$\sqrt{14}$

$\sqrt{10}$

krawędzią boczną

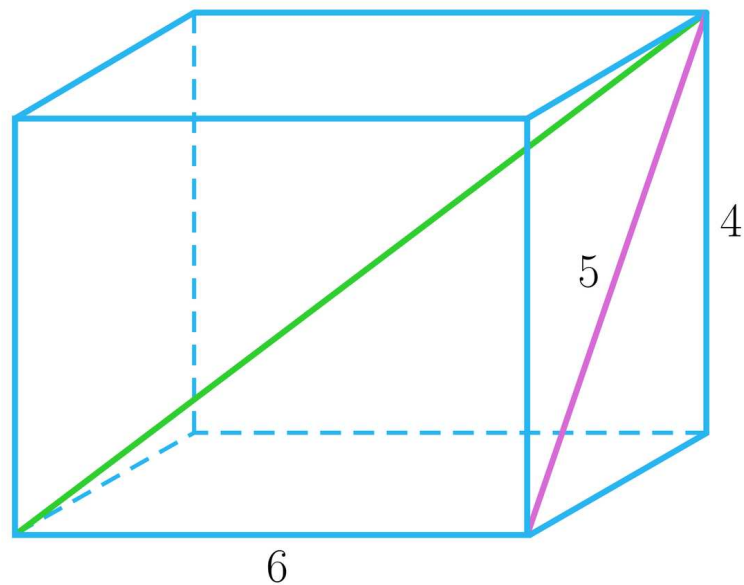
$\sqrt{14}$

ścianą boczną

Ćwiczenie 4



Na podstawie rysunku zaznacz zdania, które są prawdziwe.



☐ Sinus kąta między przekątną prostopadłościanu i ścianą boczną wynosi $\frac{5\sqrt{61}}{61}$.

☐ Tangens kąta między przekątną prostopadłościanu i krawędzią podstawy wynosi $\frac{5}{6}$.

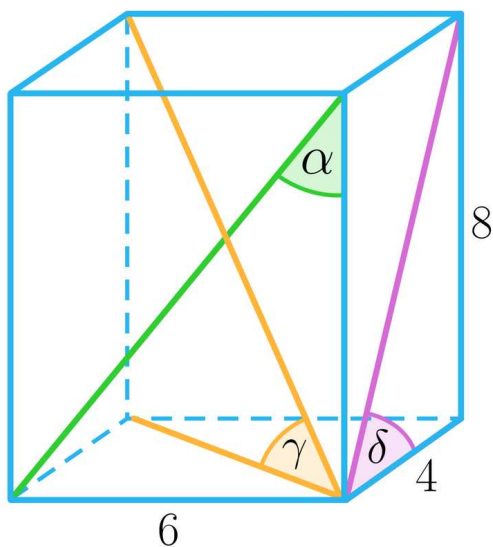
☐ Przekątna prostopadłościanu ma długość $\sqrt{61}$.

☐ Cosinus kąta między przekątną prostopadłościanu i płaszczyzną podstawy jest równy $\frac{4\sqrt{61}}{61}$.

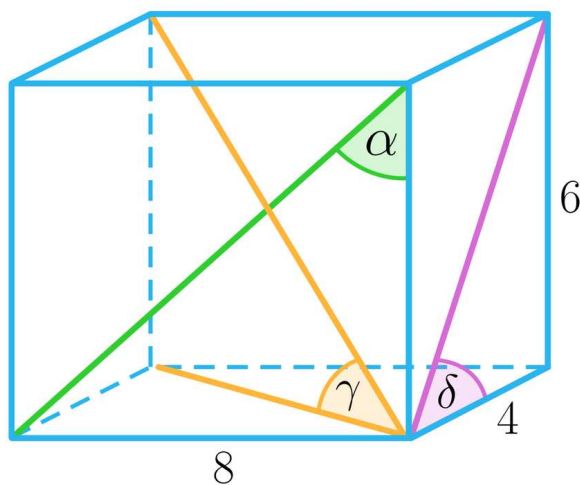
Ćwiczenie 5



1



2



Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono prostopadłościany z zaznaczonymi kątami między prostymi i płaszczyznami. Pogrupuj odpowiednio elementy.

Dla prostopadłościanu z rysunku 1:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\sin \gamma = \frac{4\sqrt{29}}{29}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{3}{2}$$

Dla prostopadłościanu z rysunku 2:

$$\cos \delta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \gamma = \frac{2\sqrt{145}}{29}$$

Ćwiczenie 6



Krawędzie podstawy prostopadłościanu mają długości 3 i 4, a krawędź boczna ma długość 5.

Wyznacz sinus kąta między przekątną prostopadłościanu a ścianą boczną o mniejszej powierzchni.

Ćwiczenie 7



Kąt między przekątną prostopadłościanu i płaszczyzną jego podstawy ma miarę 30° . Wyznacz sumę długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu, jeżeli jego przekątna ma długość 6, a podstawa prostopadłościanu jest prostokątem, w którym jeden bok jest o 1 dłuższy od drugiego.

Ćwiczenie 8



Jedna z krawędzi podstawy prostopadłościanu ma długość 8, przekątna podstawy ma długość $6\sqrt{2}$, a pole mniejszej ściany bocznej jest równe 20. Wyznacz długość przekątnej prostopadłościanu oraz miarę kąta nachylenia przekątnej do tej ściany bocznej.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Kąty między prostymi a płaszczyznami w prostopadłościanie

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
- 3) rozpoznaje w graniastopach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- definiuje kąt pomiędzy prostą a płaszczyzną,
- wskazuje w prostopadłościanie kąty pomiędzy prostymi a płaszczyznami,
- oblicza miary kątów w prostopadłościanie,
- wykorzystuje tablice wartości funkcji trygonometrycznych do odczytywania miar kątów,
- stosuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- liga zadaniowa;
- metoda kota i myszy.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Kąty między prostymi a płaszczyznami w prostopadłościanie” i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Nauczyciel prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do wspomnianego tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Aplet”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują indywidualnie ćwiczenia numer 1 i 2 w sekcji „Sprawdź się”. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają odpowiedzi, a reszta klasy wspólnie ustosunkowuje się do nich. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.

4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie omawiają zadania na forum klasy.
5. Uczniowie realizują ćwiczenia 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po 2 nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Opis prostopadłościanu i sześcianu.](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Aplet” można potraktować jako zadanie domowe mające na celu utrwalenie sposobu wyznaczania kątów między prostymi a płaszczyznami w prostopadłościanie lub wykorzystać w lekcji dotyczącej „Miary liniowej kąta dwuściennego”.