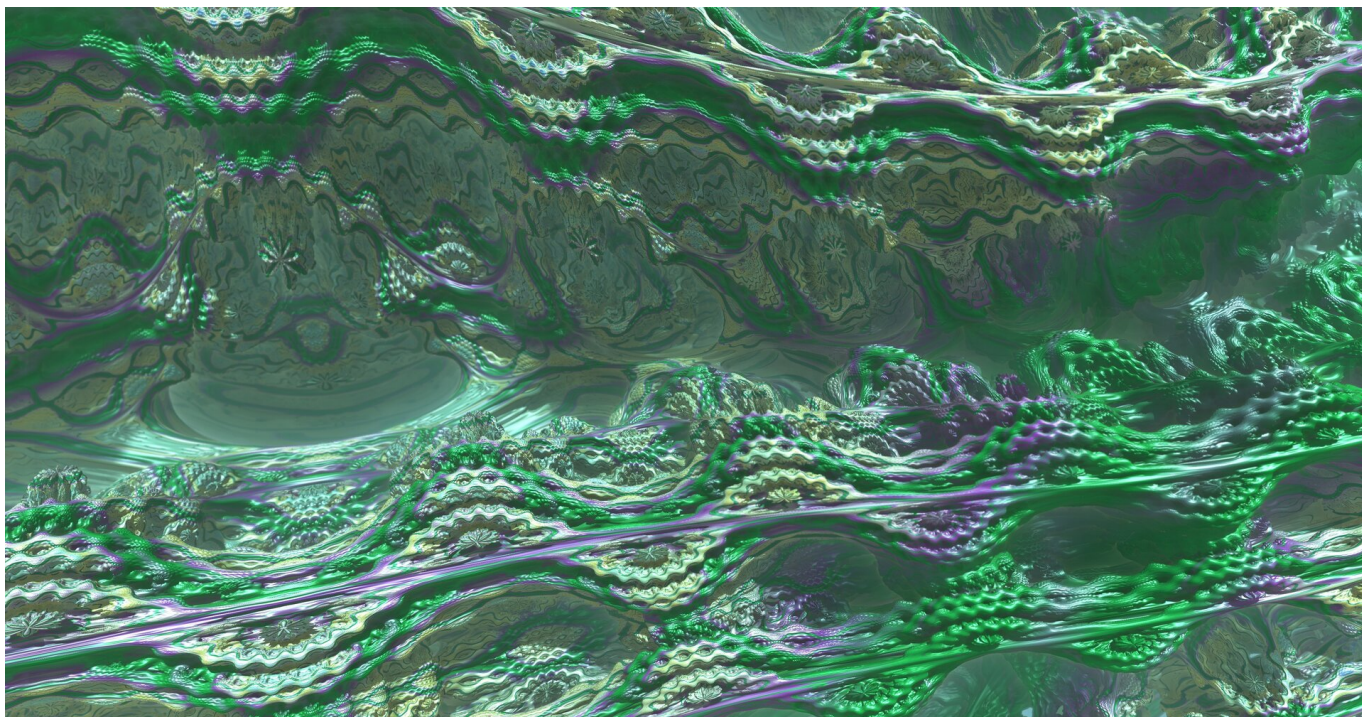
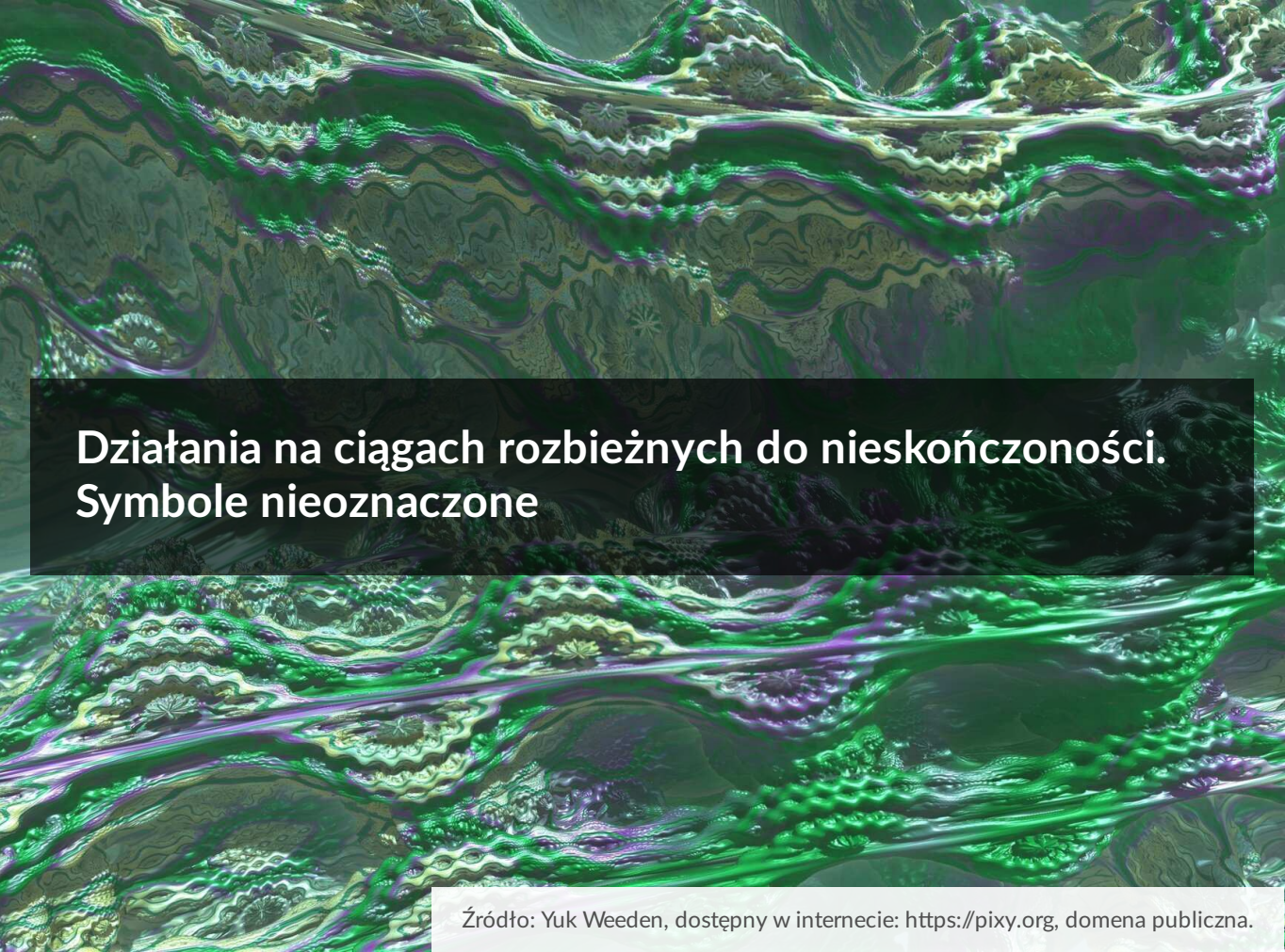




Działania na ciągach rozbieżnych do nieskończoności. Symbole nieoznaczone

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Gra edukacyjna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Działania na ciągach rozbieżnych do nieskończoności. Symbole nieoznaczone

Źródło: Yuk Weeden, dostępny w internecie: <https://pixy.org>, domena publiczna.

Zapoznaliśmy się z prawami działań na ciągach rozbieżnych, przy czym zajmowaliśmy się tylko takimi sytuacjami, gdy granicę ciągu można było obliczyć posiadając tylko informację o granicach ciągów, na których wykonywaliśmy działania.

W tym materiale zajmiemy się sytuacjami, gdy nie można określić granicy tylko na podstawie informacji o granicach ciągów, na których wykonujemy działania. Zatem zajmiemy się sytuacjami, gdy pojawiają się symbole nieoznaczone: $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$.

Twoje cele

- Nauczysz się obliczać granice ciągów, w których występują symbole nieoznaczone.
- Poznasz twierdzenia dotyczące ciągów zapisanych w postaci wielomianu lub ilorazu wielomianów.

Przeczytaj

Symbole nieoznaczone

W tym materiale zajmiemy się ciągami, w przypadku których informacja o granicach tych ciągów nie daje możliwości podania granicy ciągu, który powstaje w wyniku działań na tych ciągach.

Zacniemy od symbolu, który już się pojawił w toku nauki, choć nie został formalnie zaprezentowany. Chodzi o sytuację, gdy mamy do czynienia z różnicą **ciągów rozbieżnych do $+\infty$** .

Symbol nieoznaczony: $\infty - \infty$

Podamy kilka przykładów, gdy w wyniku różnicy ciągów rozbieżnych do $+\infty$ otrzymujemy: ciąg rozbieżny do $+\infty$, **ciąg rozbieżny do $-\infty$** , ciąg rozbieżny oraz ciąg zbieżny.

Przykład 1

Obliczymy granicę różnicy ciągów: $x_n = n^2$ i $y_n = n$.

Rozwiązanie

Oba ciągi są rozbieżne do $+\infty$, a granicę ich różnicy obliczamy następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Ponieważ ciąg $\frac{1}{n}$ jest zbieżny do 0, zatem ciąg $1 - \frac{1}{n}$ jest zbieżny do 1. Stąd otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = +\infty.$$

Przykład 2

Obliczymy granicę różnicy ciągów: $x_n = n$ i $y_n = n^2$.

Rozwiązanie

Oba ciągi są rozbieżne do $+\infty$, a granicę ich różnicy obliczamy podobnie jak w poprzednim przykładzie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

Ponieważ ciąg $\frac{1}{n} - 1$ jest zbieżny do (-1) , otrzymujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = -\infty.$$

Przykład 3

Obliczymy granicę różnicy ciągów: $x_n = n$ i $y_n = n + 2$.

Rozwiązanie

Oba ciągi są rozbieżne do $+\infty$, a granicę ich różnicy obliczamy następująco:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n - (n + 2)] = -2.$$

Przykład 4

Obliczymy granicę różnicy ciągów: $x_n = n$ i $y_n = n - (-1)^n$.

Rozwiązanie

Oba ciągi są rozbieżne do $+\infty$, a różnica ciągów

$$x_n - y_n = (n - n + (-1)^n) = (-1)^n$$

jest ciągiem rozbieżnym.

Na podstawie powyższych przykładów możemy wyprowadzić pewne użyteczne twierdzenie.

Niech ciąg (x_n) będzie ciągiem wielomianowym: $x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$ oraz $a_k \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Wówczas } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right) \end{aligned}$$

Ponieważ ciąg $z_n = a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k}$ jest zbieżny do a_k , zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \text{ gdy } a_k > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \text{ gdy } a_k < 0.$$

Twierdzenie: o granicy ciągu wielomianowego

Niech ciąg (x_n) będzie ciągiem wielomianowym:

$$x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N}_+ \text{ oraz } a_k \neq 0.$$

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \text{ gdy } a_k > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \text{ gdy } a_k < 0.$$

Symbol nieoznaczony: $\frac{\infty}{\infty}$

Podamy kilka przykładów, gdy z ilorazu ciągów rozbieżnych do $+\infty$ otrzymujemy: ciąg zbieżny, ciąg rozbieżny do $+\infty$, ciąg rozbieżny do $-\infty$, ciąg rozbieżny oraz ciąg zbieżny.

Przykład 5

Zbadamy zbieżność ciągu: $x_n = \frac{n^2+5n-6}{n^2+n+9}$.

Rozwiązanie

Na podstawie twierdzeń o granicach wiemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 5n - 6) = +\infty$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n + 9) = +\infty$. Zatem mamy iloraz ciągów rozbieżnych do nieskończoności.

Podzielmy licznik i mianownik ułamka przez n^2 :

$$\frac{1 + \frac{5}{n} - \frac{6}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}}.$$

Zauważmy, że ciągi $\frac{5}{n}$, $\frac{6}{n^2}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{9}{n^2}$ są zbieżne do 0, a zatem granicą ciągu (x_n) jest liczba 1.

Przykład 6

Zbadamy zbieżność ciągu $x_n = \frac{n^2-5n-6}{n+9}$.

Rozwiązanie

Na podstawie twierdzeń o granicach wiemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - 5n - 6) = +\infty$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 9) = +\infty$. Zatem mamy iloraz ciągów rozbieżnych do nieskończoności.

Podzielmy licznik i mianownik ułamka przez n : $\frac{n-5-\frac{6}{n}}{1+\frac{9}{n}}$. Zauważmy, że ciągi $\frac{6}{n}$, $\frac{9}{n}$ są zbieżne do 0, a zatem granicą ciągu z mianownika jest liczba 1, natomiast ciąg z licznika jest rozbieżny do $+\infty$. Stąd otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-5n-6}{n+9} = +\infty$.

Na podstawie powyższych przykładów możemy sformułować ogólne twierdzenie o granicy ilorazu ciągów, z których każdy ma postać wielomianu.

Twierdzenie: o granicy ilorazu ciągów wielomianowych

Niech

$x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$ oraz $a_k \neq 0$,

$y_n = b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0$, gdzie $m \in \mathbb{N}_+$ oraz $b_m \neq 0$.

Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a_k}{b_m}, \text{ gdy } k = m,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0, \text{ gdy } k < m,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty, \text{ gdy } k > m \text{ i } a_k > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty, \text{ gdy } k > m \text{ i } a_k < 0.$$

Ilorazem dwóch ciągów rozbieżnych do nieskończoności może być ciąg rozbieżny. Poniżej pokażemy przykład takich ciągów.

Przykład 7

Weźmy dwa ciągi $(x_n), (y_n)$ zdefiniowane dla $n > 1$ w sposób następujący:

$$x_n = \begin{cases} \frac{n+2}{2}, & \text{dla } n \text{ parzystego} \\ n+1, & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} n+2, & \text{dla } n \text{ parzystego} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \end{cases}$$

Wówczas ciąg $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ ma następujące wyrazy: $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$

Zatem ciąg $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ jest ciągiem rozbieżnym.

Symbol nieoznaczony: $0 \cdot \infty$

Przykład 8

Sprawdźmy, do jakiej granicy zmierza iloczyn ciągów: $x_n = \frac{1}{n}$ i $y_n = n$.

Rozwiązanie

Ciąg (x_n) jest zbieżny do 0, ciąg (y_n) jest rozbieżny do $+\infty$, a granicą ich iloczynu jest:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = 1.$$

Przykład 9

Sprawdźmy, do jakiej granicy zmierza iloczyn ciągów: $x_n = \frac{1}{n}$ i $y_n = n^2$.

Rozwiązanie

Ciąg (x_n) jest zbieżny do 0, ciąg (y_n) jest rozbieżny do $+\infty$, a granicą ich iloczynu jest:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n^2 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty.$$

Zatem ciąg $(x_n \cdot y_n)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Przykład 10

Sprawdźmy, do jakiej granicy zmierza iloczyn ciągów: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ i $y_n = n^2$.

Rozwiązanie

Ciąg (x_n) jest zbieżny do 0, ciąg (y_n) jest rozbieżny do $+\infty$, a ich iloczyn

$$x_n \cdot y_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot n^2 = (-1)^n \cdot n$$

jest ciągiem rozbieżnym.

Słownik

ciąg rozbieżny do $+\infty$

ciąg, którego granicą jest $+\infty$

ciąg rozbieżny do $-\infty$

ciąg, którego granicą jest $-\infty$

Gra edukacyjna

Polecenie 1

Rozwiąż quiz, a następnie wykonaj polecenie 2.

Wskaż granicę ciągu $a_n = n^3 - 5n^7 + 7$:

1 2

3

45

Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DYMEFybHv>

Polecenie 2

Sprawdź, czy ciąg: $\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$ jest zbieżny.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ciąg $a_n = 3n^3 - 5n^5 - 3\sqrt{n^{11}} + 1$ jest:

☐ rozbieżny do $-\infty$

☐ zbieżny

☐ rozbieżny do $+\infty$

Ćwiczenie 2



Wskaż ciągi, które są rozbieżne do $+\infty$.

☐ $a_n = \sqrt[3]{n^5 - n^7}$

☐ $a_n = 3n^2 - 2n^3 + n - 1$

☐ $a_n = \frac{n^3 - 1}{(n+1)^2(n+2)}$

☐ $a_n = \sqrt[7]{n^7 - n^5}$

☐ $a_n = \frac{n^3 - 1}{(n+1)(n+2)}$

☐ $a_n = 3n^3 - 2n^2 + n - 1$

Ćwiczenie 3



Połącz w pary ciąg i jego granicę.

$$a_n = \frac{3n+1}{2} - \frac{n^2+1}{n+4}$$

$$1$$

$$a_n = \frac{3n+1}{3} - \frac{n^2+3n+2}{n+3}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{n+1}{2} - \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2}$$

$$-\infty$$

$$a_n = \frac{n-2}{2} - \frac{2n^2+1}{n+1}$$

$$+\infty$$

Ćwiczenie 4



Przypisz każdy ciąg do jednej z trzech grup.

Rozbieżny do $+\infty$

$$a_n = \sqrt[3]{\frac{(n-1)^4}{(2-n)^2 n^3}}$$

Rozbieżny do $-\infty$

$$a_n = \sqrt[3]{\frac{(n-1)^4}{(2-n)^3}}$$

$$a_n = n^{10} - n^9 + n^8 - n^7 + n^6 -$$

Zbieżny

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n+2}$$

$$a_n = \frac{2n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n+2}$$

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{2n^2+1}{n+2}$$

Ćwiczenie 5



wskaż ciągi, których granicą jest 1.

☐ $a_n = \frac{n^2+1}{n+1} - \frac{n^2+2}{n+2}$

☐ $a_n = \frac{2n^3+n^2+1}{(n+1)^3}$

☐ $a_n = \frac{8n^3+n^2+1}{(2n+1)^3}$

☐ $a_n = \frac{n^2+2}{n+2} - \frac{n^2+1}{n+1}$

☐ $a_n = \frac{n!-(n-1)!}{(n+1)!-n!}$

☐ $a_n = \frac{(n+1)!+1}{n \cdot n!+1}$

Ćwiczenie 6



Wskaż ciągi rozbieżne do $+\infty$ lub $-\infty$.

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+2}{n}}{n^2+1}$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+2}{2}}{n^3+2n+1}$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+3}{n}}{n^3+2n+1}$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+2}{n}}{n+1}$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+2}{2}}{100-n^2}$

☐ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+2}{2}}{2n+1}$

Ćwiczenie 7



Połącz ciąg z jego granicą.

$$a_n = \frac{2+7+\dots+(5n-3)}{3+5+\dots+(2n-1)}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2+7+\dots+(5n-3)}{3+10+\dots+(7n-4)}$$

$$\frac{5}{2}$$

$$a_n = \frac{2+3+\dots+n}{3+5+\dots+(2n-1)}$$

$$\frac{5}{7}$$

Ćwiczenie 8



Wskaż granicę ciągu $a_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{(2n+1)^3+3}$.

☐ 0

☐ $+\infty$

☐ $\frac{1}{24}$

☐ $\frac{1}{48}$

☐ 1

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Działania na ciągach rozbieżnych do nieskończoności. Symbole nieoznaczone

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza granice ciągów, w których występują symbole nieoznaczone,
- oblicza granice ciągów wykorzystując twierdzenie dotyczące ciągów zapisanych w postaci wielomianu lub ilorazu wielomianów.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- opis ustny.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu w temacie: „Działania na ciągach rozbieżnych do nieskończoności. Symbole nieoznaczone”.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie indywidualnie zapoznają się z treścią w sekcji „Przeczytaj” i zapisują w zeszycie minimum dwa pytania. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwie grupy. Grupy na przemian zadają przygotowane wcześniej pytania grupie przeciwnej, która udziela odpowiedzi. Nauczyciel uzupełnia wyjaśnienia.
2. Uczniowie indywidualnie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie w parach grają w grę edukacyjną.
2. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

3. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: Na dzisiejszych zajęciach nauczyłem się...

Praca domowa:

1. Uczniowie rozwiązują polecenia związane z medium w sekcji „Gra edukacyjna”.

Materiały pomocnicze:

- [Granica ciągu nieskończonego](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Gra edukacyjna” można wykorzystać jako materiał służący powtórzeniu materiału w temacie „Działania na ciągach rozbieżnych do nieskończoności. Symbole nieoznaczone”.