

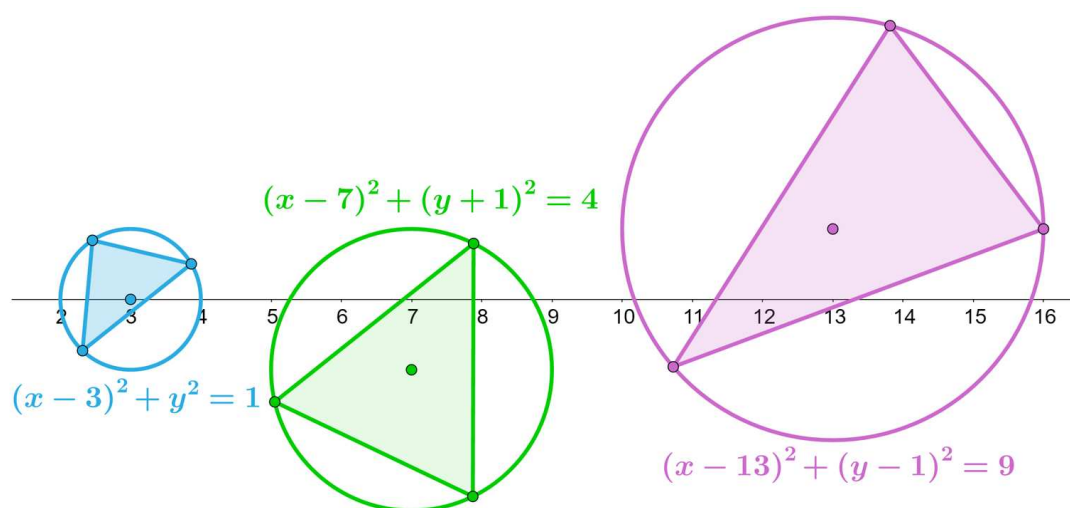


Równanie okręgu opisanego na trójkącie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Galeria zdjęć interaktywnych](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Równanie okręgu opisanego na trójkącie

Źródło: Mihaly Koles, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.



Na każdym trójkącie da się opisać okrąg. Środek tego okręgu jest punktem przecięcia symetralnych boków trójkąta. Przeanalizujemy problem wyznaczania okręgu opisanego na trójkącie w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Twoje cele

- Wyznaczysz równanie okręgu opisanego na trójkącie w prostokątnym układzie współrzędnych.

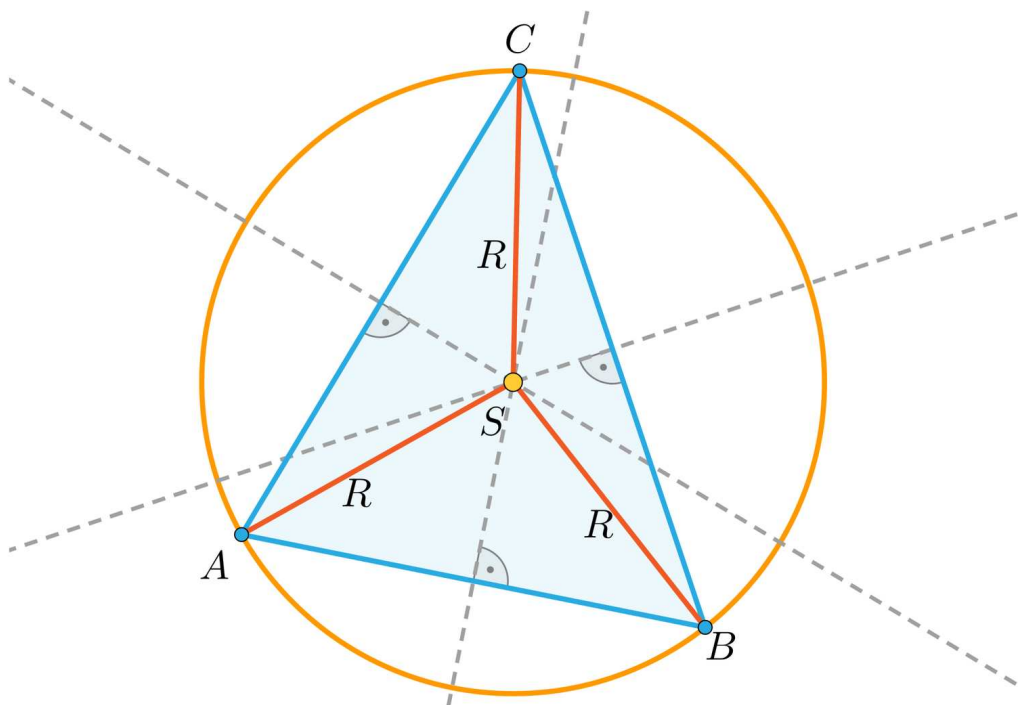
- Wyznaczysz równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym.
- Wyznaczysz równanie okręgu opisanego na trójkącie równobocznym.

Przeczytaj

Już wiesz

Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt przecięcia S leży w równej odległości od wierzchołków trójkąta A, B, C , zatem przez te wierzchołki można poprowadzić okrąg o środku S i promieniu R .

Okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki trójkąta, nazywamy okręgiem opisanym na trójkącie, a o trójkącie powiemy, że jest to trójkąt wpisany w okrąg. Z powyższego wynika, że na każdym trójkącie można opisać okrąg.



Przypomnimy teraz równanie okręgu. Można je zapisać w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

gdzie punkt o współrzędnych (a, b) jest środkiem okręgu, zaś r jest długością jego promienia.

Równanie to możemy zapisać również w postaci ogólnej:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Równanie to jest równaniem okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a^2 + b^2 - c > 0.$$

Środek okręgu C i jego promień r wyznaczamy ze wzorów:

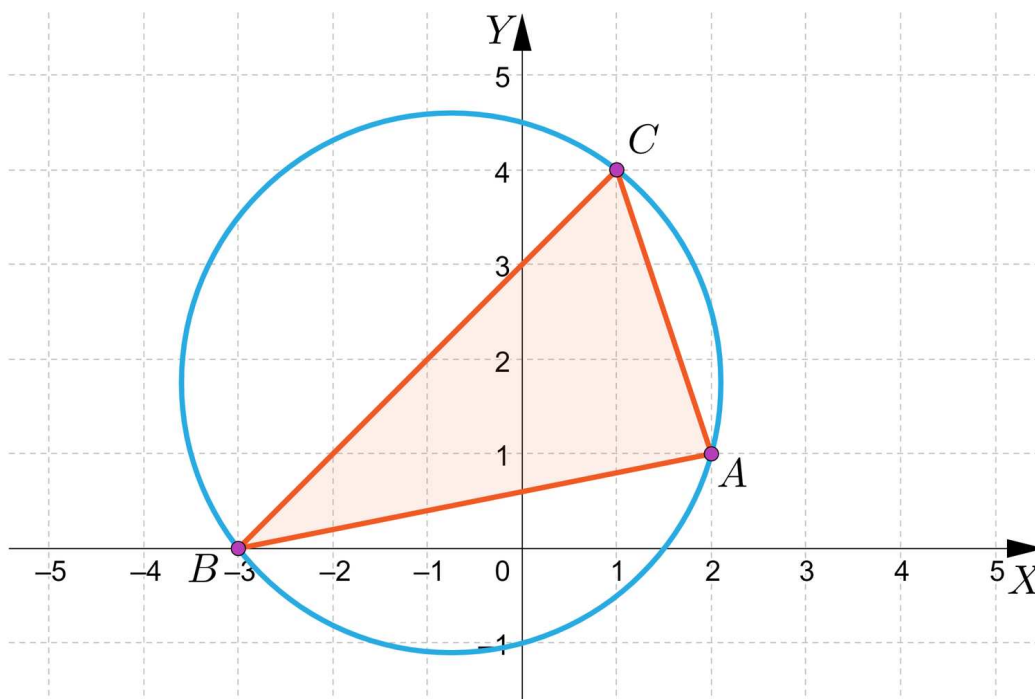
$$S = (a, b), r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}.$$

Przykład 1

Wyznamy równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (2, 1)$, $B = (-3, 0)$, $C = (1, 4)$.

Rozwiązanie:

Sposób I: metoda analityczna



Skorzystamy z równania $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, w którym niewiadomymi są a, b, c .

Rozwiążemy układ równań:

$$\begin{cases} 4 + 1 - 4a - 2b + c = 0 & (1) \\ 9 + 6a + c = 0 & (2) \\ 1 + 16 - 2a - 8b + c = 0 & (3) \end{cases}$$

Wyznamy c z równania (2):

$$c = -9 - 6a$$

Równania (1) i (3) odejmujemy stronami:

$$5 - 4a - 2b + c - 17 + 2a + 8b - c = 0.$$

Mamy zatem:

$$6b = 2a + 12,$$

czyli:

$$b = \frac{1}{3}a + 2$$

Z równania (3):

$$17 - 2a - 8\left(\frac{1}{3}a + 2\right) - 9 - 6a = 0$$

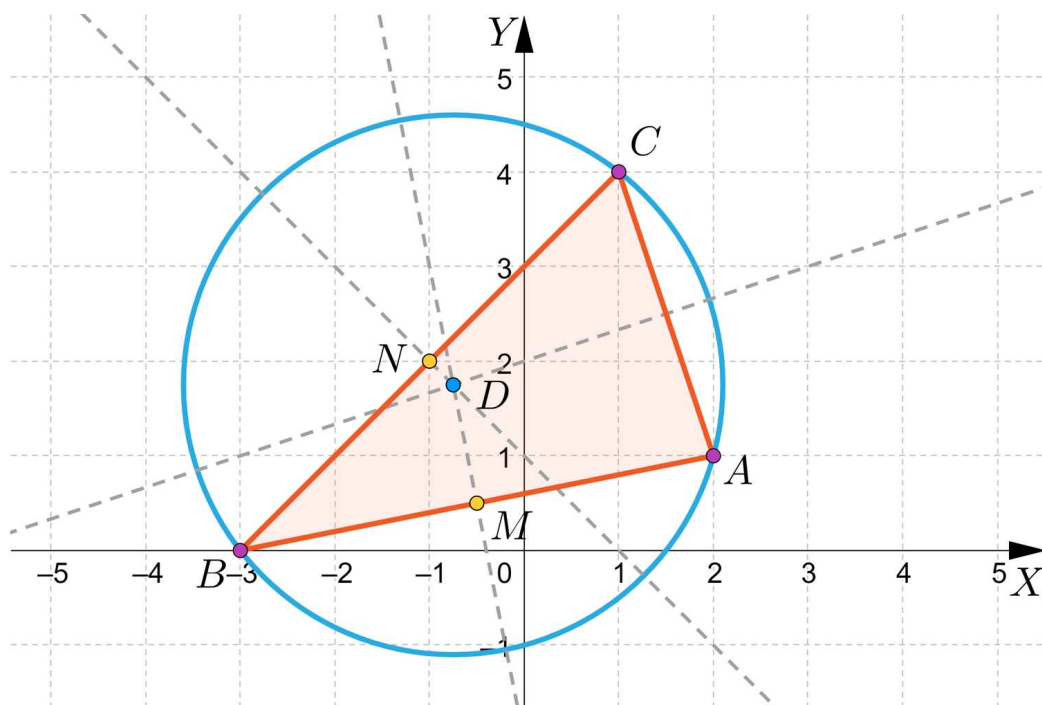
$$-\frac{32}{3}a - 8 = 0$$

$$\text{Stąd: } a = -\frac{3}{4}; b = \frac{7}{4}; c = -\frac{9}{2}.$$

Równanie okręgu ma zatem postać:

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}y - \frac{9}{2} = 0.$$

Sposób II: metoda analityczna z rozważaniami geometrycznymi



Wyznamy punkt przecięcia D symetralnych boków AB i BC . Obliczymy współczynnik kierunkowy oraz współrzędne punktu M , który jest środkiem odcinka AB .

$$a_{AB} = \frac{0-1}{-3-2} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5},$$

$$M = \left(\frac{2+(-3)}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Symetralna boku AB jest do tego boku prostopadła, ma więc współczynnik kierunkowy równy -5 . Równaniem tej symetralnej jest zatem równanie:

$$y - \frac{1}{2} = -5\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

a po przekształceniu:

$$y = -5x - 2.$$

Wyznamy analogicznie równanie symetralnej boku BC i współrzędne punktu N :

$$a_{BC} = \frac{4-0}{1-(-3)} = 1,$$

$$N = (-1, 2).$$

Symetralna boku BC ma współczynnik kierunkowy -1 , zatem jej równanie ma postać:

$$y - 2 = -(x + 1),$$

czyli

$$y = -x + 1.$$

Współrzędne punktu D otrzymamy, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = -5x - 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

Środek D ma zatem współrzędne: $D = \left(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$.

Pozostaje nam obliczenie długości promienia.

$$r = |DB| = \sqrt{\left(-3 + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{130}{16}}.$$

Równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC ma zatem postać:

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{130}{16}$$

co, po przekształceniu do postaci ogólnej, daje:

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}y - \frac{9}{2} = 0.$$

Jak widać, sposób II jest bardziej czasochłonny. Powstaje zatem pytanie: Czy nie ma gotowych wzorów, z których moglibyśmy obliczyć współczynniki a , b , c równania okręgu, na którym leżą punkty (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) ?

Takie wzory są:

$$a = \frac{-x_1^2 y_2 + x_1^2 y_3 + x_2^2 y_1 - x_2^2 y_3 - x_3^2 y_1 + x_3^2 y_2 - y_1^2 y_2 + y_1^2 y_3 + y_1 y_2^2 - y_1 y_3^2 - y_2^2 y_3 + y_2 y_3^2}{x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2}$$

$$b = \frac{x_1^2 x_2 - x_1^2 x_3 - x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 - x_1 y_2^2 + x_1 y_3^2 + x_2^2 x_3 - x_2 x_3^2 + x_2 y_1^2 - x_2 y_3^2 - x_3 y_1^2 + x_3 y_2^2}{x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2}$$

$$c = \frac{-x_1^2 x_2 y_3 + x_1^2 x_3 y_2 + x_1 x_2^2 y_3 - x_1 x_3^2 y_2 + x_1 y_2^2 y_3 - x_1^2 y_2 y_3 - x_2^2 x_3 y_1 + x_2 x_3^2 y_1 - x_2 y_1^2 y_3}{x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2} +$$

$$+ \frac{x_2 y_1 y_3^2 + x_3 y_1^2 y_2 - x_3 y_1 y_2^2}{x_1 y_2 - x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - x_3 y_2}$$

jednak korzystanie z nich może powodować liczne błędy rachunkowe.

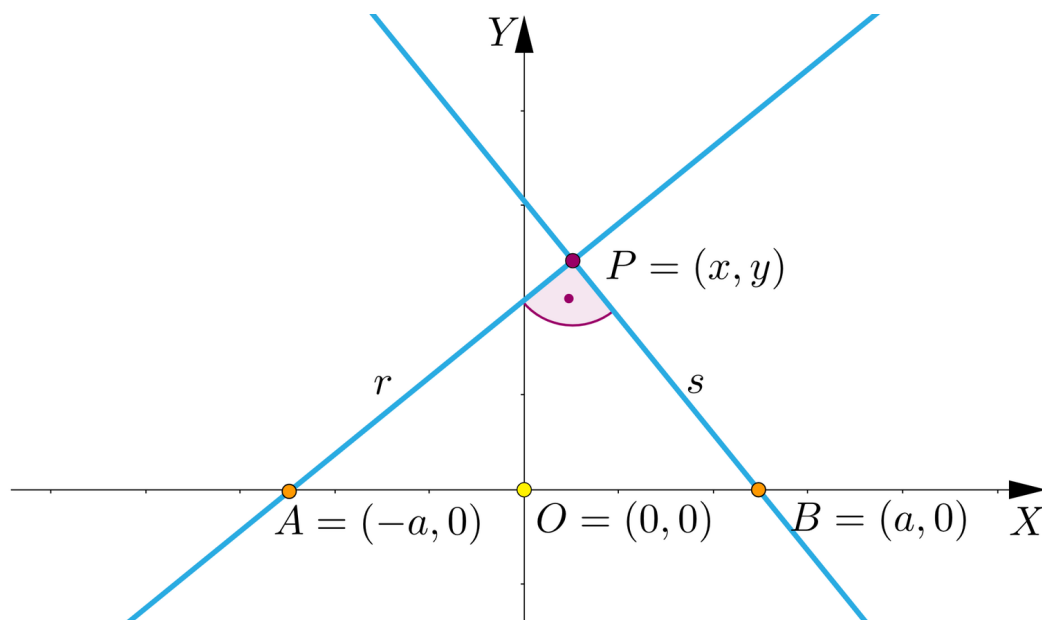
Przykład 2

Wykażemy analitycznie, że jeśli punkt P jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej AB , to P leży na okręgu, którego środkiem jest środek przeciwprostokątnej AB a promień ma długość połowy długości $|AB|$.

Rozwiązanie:

Wyberzmy dogodnie układ współrzędnych, tzn. tak, że:

- odcinek AB leży na osi X , a jego końce są symetryczne względem początku układu O ;
- oś Y jest osią symetrii odcinka AB .



W tym układzie współrzędnych $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, $a > 0$; ponadto punkt O jest środkiem odcinka AB . Punkt P jest punktem przecięcia prostych prostopadłych r i s .

Równanie prostej r , na której leży punkt A ma postać:

$$y = p(x + a),$$

zaś równanie prostej s , na której leży punkt B , to:

$$y = -\frac{1}{p}(x - a).$$

By znaleźć współrzędne punktu P , rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = p(x + a) \\ y = -\frac{1}{p}(x - a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = p(x + a) \\ py = -x + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = p(x + a) \\ x = a - py \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = p(a - py + a) \\ x = a - py \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2ap - p^2y \\ x = a - py \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(1 + p^2) = 2ap \\ x = a - py \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a(1-p^2)}{1+p^2} \\ y = \frac{2ap}{1+p^2} \end{cases}$$

Otrzymaliśmy współrzędne punktu P :

$$P = \left(\frac{a(1-p^2)}{1+p^2}, \frac{2ap}{1+p^2} \right).$$

Jeśli punkt P leży na okręgu o środku w punkcie O , to jego odległość od O musi być równa a .

Sprawdźmy to.

$$\begin{aligned} |OP| &= \sqrt{\left(\frac{a(1-p^2)}{1+p^2} - 0\right)^2 + \left(\frac{2ap}{1+p^2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 - 2a^2p^2 + a^2p^4 + 4a^2p^2}{(1+p^2)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2(1+p^2)^2}{(1+p^2)^2}} = \sqrt{a^2} = a. \end{aligned}$$

Wykazaliśmy więc, że punkt P leży na okręgu, którego promień jest równy połowie długości przeciwprostokątnej.

Przykład 3

Wyznamy równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (-2, -1)$; $B = (4, 1)$; $C = (2, 3)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że trójkąt jest prostokątny, gdyż:

$$|AC| = \sqrt{(2+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{32}; |BC| = \sqrt{(2-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8}; \\ |AB| = \sqrt{(4+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{40} \text{ i } |AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$$

Zatem środek okręgu opisanego jest środkiem przeciwprostokątnej AB : $S = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)$, czyli $S = (1, 0)$. Promień okręgu ma długość $R = \frac{1}{2} \cdot |AB| = \sqrt{10}$.

Równanie okręgu ma postać: $(x-1)^2 + y^2 = 10$.

Przykład 4

Wyznamy równanie okręgu opisanego na trójkącie równobocznym o wierzchołkach $A = (-2, -2)$, $B = (4, -2)$, $C = (1, 3\sqrt{3} - 2)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ trójkąt ABC jest równoboczny, to długość jego promienia jest równa $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, gdzie a oznacza długość boku trójkąta. Zauważmy, że $a = 6$, zatem $R = 2\sqrt{3}$.

Wyznamy teraz współrzędne środka S tego okręgu. Leży on na symetralnej boku AB , więc $x_S = \frac{-2+4}{2} = 1$.

$$|AS| = 2\sqrt{3}, \text{ zatem } \sqrt{(1+2)^2 + (y_S+2)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$9 + (y_S + 2)^2 = 12$$

$$(y_S + 2)^2 = 3$$

$$y_S + 2 = \sqrt{3} \text{ lub } y_S + 2 = -\sqrt{3}$$

$$y_S = \sqrt{3} - 2 \text{ lub } y_S = -\sqrt{3} - 2$$

Punkt $S_1 = (1, -\sqrt{3} - 2)$ nie leży wewnątrz trójkąta ABC , zatem $S = (1, \sqrt{3} - 2)$.

Równanie okręgu opisanego na trójkącie równobocznym ABC ma postać:

$$(x-1)^2 + (y - \sqrt{3} + 2)^2 = 12$$

Słownik

symetralna boku trójkąta

prosta prostopadła do boku trójkąta i przechodząca przez jego środek

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawionym przykładem a następnie rozwiąż Polecenie 2.

Wyznamy równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (1, 0)$, $B = (8, 1)$, $C = (3, 4)$.

1

Wyznamy równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (1, 0)$, $B = (8, 1)$, $C = (3, 4)$.

1. {audio}Wyznamy równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Polecenie 2

Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $A = (0, -4)$; $B = (2, 0)$; $C = (0, 6)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Jeśli okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ jest opisany na trójkącie o wierzchołkach $A = (1, 3)$, $B = (2, 1)$ i $C = (0, 0)$, to:

☐
$$\begin{cases} 1 + 9 + 2a + 6b + c = 0 \\ 4 + 1 - 4a - 2b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} 1 + 9 + 2a + 6b + c = 0 \\ 4 + 1 + 4a + 2b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

☐
$$\begin{cases} 1 + 9 - 2a - 6b + c = 0 \\ 4 + 1 - 4a - 2b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ćwiczenie 2



Równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(3, \sqrt{3})$, $(4, 0)$ ma postać:

☐ $x^2 + y^2 - 4y = 0$

☐ $x^2 + y^2 - 4x = 0$

☐ $x^2 + y^2 + 4x = 0$

Ćwiczenie 3



Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (-1, 3)$, $B = (5, 1)$ i $C = (-3, 7)$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Równanie okręgu ma postać: $(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 72$.

☐ Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC ma długość $5\sqrt{2}$.

☐ Promień okręgu opisanego na trójkącie ABC ma długość $6\sqrt{2}$.

☐ Równanie okręgu ma postać: $(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 50$.

☐ Środek okręgu opisanego na trójkącie ABC ma współrzędne $S = (4, 8)$.

Ćwiczenie 4



Dany jest trójkąt o wierzchołkach $A = (3, 4)$, $B = (0, -5)$, $C = (-2, -1)$. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Równanie okręgu ma postać: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$.

☐ Równanie okręgu ma postać: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

☐ Równanie okręgu ma postać: $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$.

☐ Równanie okręgu ma postać: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Ćwiczenie 5



Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach: $A = (4, -3)$, $B = (5, 0)$, $C = (2, -3)$. Uzupełnij brakujące elementy w rozwiązaniu.

Korzystamy z równania .

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 16 + 9 - 8a + 6b + c = 0 & (1) \\ 25 - 10a + c = 0 & (2) \\ 4 + 9 - 4a + 6b + c = 0 & (3) \end{cases}$$

Z równania (1) i (3) odejmujemy stronami:

Mamy zatem:

Stąd: $c =$ i $b =$

Równanie okręgu ma zatem postać:

Ćwiczenie 6



Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach: $A = (2, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (0, 0)$.

Ćwiczenie 7



Dany jest trójkąt o wierzchołkach: $A = (-4, 3)$, $B = (-6, -3)$, $C = (0, -5)$. Wyznacz równanie okręgu opisanego na tym trójkącie.

Ćwiczenie 8



Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach: $A = (9, -1)$, $B = (1, 5)$ i $C = (10, 2)$.

Dla nauczyciela

Autor: Janusz Karkut

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie okręgu opisanego na trójkącie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne i informatyczne;
- kompetencje cyfrowe.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- Wyznacza równanie okręgu opisanego na trójkącie w prostokątnym układzie współrzędnych.
- Wyznacza równanie okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym.
- Wyznacza równanie okręgu opisanego na trójkącie równobocznym.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów;
- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu;
- projektor multimedialny;
- materiały zawarte w e-podręczniku.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia temat lekcji i formułuje kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają informacje dotyczące okręgu opisanego na trójkącie.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3 osobowe lub 4 osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione definicje, twierdzenie, przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie indywidualnie analizują materiał przedstawiony w Galerii zdjęć. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości, które pojawiły się po zapoznaniu się z materiałem.
3. Uczniowie rozwiązują Polecenie 2.
4. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonania zadania. W razie wątpliwości udziela odpowiedzi na zadane przez uczniów pytania.
5. Uczniowie w parach rozwiązują wybrane ćwiczenia interaktywne 1-6 w sekcji „Sprawdź się”.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel omawia ewentualne problemy z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
- Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia w odniesieniu do postawionych na początku lekcji kryteriów sukcesu.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują pozostałe ćwiczenia z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Okrąg opisany na trójkącie](#)

Wskazówki metodyczne:

Uczniowie mogą wykorzystać galerię zdjęć jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.