



Równanie okręgu w postaci kanonicznej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Okrąg w matematyce możemy traktować jako szczególny przypadek elipsy o równych półosiach. Z kolei w potocznym rozumieniu przyjmujemy, że okrąg to brzeg koła. Okrąg na płaszczyźnie definiujemy za pomocą odpowiedniego równania, które może przyjmować różne postaci. W tej lekcji omówimy postać kanoniczną równania okręgu, z której można bezpośrednio odczytać współrzędne środka okręgu oraz jego promień.

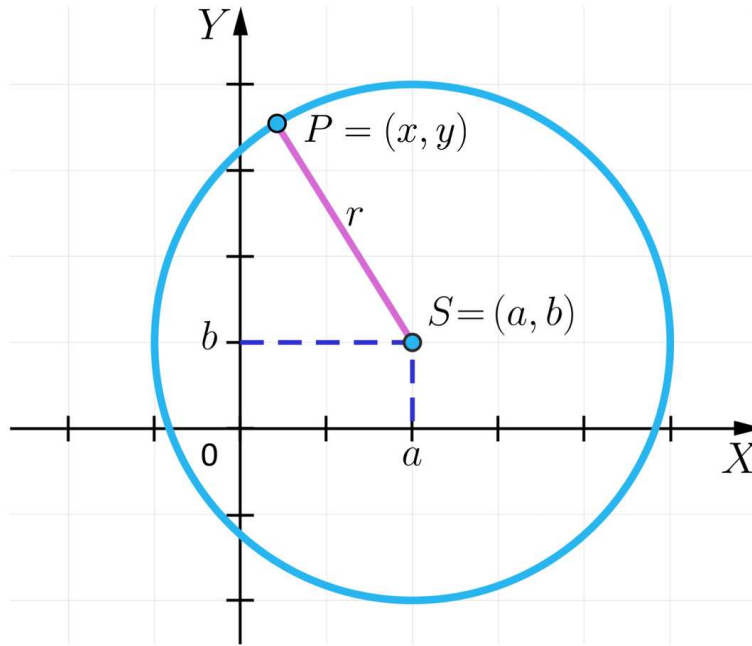
Twoje cele

- Poznasz równanie okręgu w postaci kanonicznej.
- Wyznaczysz współrzędne środka i promień okręgu na podstawie jego równania.
- Dowiesz się, jak wyznaczyć równanie okręgu mając podane współrzędne jego środka i promień.
- Wykorzystasz równanie okręgu w postaci kanonicznej do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Definicja: Okrąg

Okrąg to zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których odległość od ustalonego punktu (nazywanego środkiem okręgu), jest równa zadanej odległości (nazywanej promieniem okręgu).



Jeżeli przez punkt $S = (a, b)$ oznaczmy środek **okręgu**, a przez punkt $P = (x, y)$ – dowolny punkt leżący na okręgu, wówczas długość promienia r ($r > 0$) obliczymy ze wzoru na długość odcinka:

$$r = |SP| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymujemy równanie: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Otrzymane równanie jest równaniem okręgu w **postaci kanonicznej**, przy czym: $S = (a, b)$ – środek okręgu, r – promień okręgu.

Przykład 1

Wyznamy środki i promienie okręgów o równaniach:

a) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

$S = (3, 2), r = 4.$

$$\text{b) } x^2 + (y - 2)^2 = 5$$

$$S = (0, 2), r = \sqrt{5}.$$

Przykład 2

Wyznaczymy równania okręgów o podanych środkach i promieniach:

$$\text{a) } S = (-3, 0), r = 3.$$

$$(x + 3)^2 + y^2 = 9$$

$$\text{b) } S = (-2, -1), r = \sqrt{7}.$$

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 7.$$

Przykład 3

Wyznaczymy równanie okręgu o środku w punkcie $S = (0, -2)$, jeżeli należy do niego punkt $P = (-3, 2)$.

Długość promienia r jest równa odległości SP .

$$\text{Zatem } r = |SP| = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (2 + 2)^2} = 5.$$

Równanie okręgu jest postaci: $x^2 + (y + 2)^2 = 25$.

Przykład 4

Wyznaczymy równanie okręgu, jeżeli do końców jego średnicy należą punkty $A = (3, -1)$ oraz $B = (1, -5)$.

Wyznaczamy długość średnicy okręgu, czyli odcinka AB :

$$|AB| = \sqrt{(1 - 3)^2 + (-5 + 1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Promień okręgu jest równy połowie średnicy, więc $r = \sqrt{5}$.

Środek okręgu jest środkiem odcinka AB .

$$\text{Wyznaczamy } S = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+(-5)}{2} \right) = (2, -3).$$

Równanie okręgu ma zatem postać:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$$

Ważne!

Dla równania okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ważne jest, aby promień r był większy od zera.

Jeżeli $r = 0$, wówczas równanie okręgu przedstawia punkt.

Przykład 5

Wyznamy dla jakiego parametru m równanie $(x - a)^2 + (y - b)^2 = m^2 - m - 12$ przedstawia okrąg.

Ponieważ dla równania okręgu musi być spełniony warunek $r > 0$, otrzymujemy nierówność:

$$m^2 - m - 12 > 0.$$

Rozwiązaniem nierówności kwadratowej jest zbiór $m \in (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$.

Przykład 6

Sprawdzimy, czy punkt $P = (1, -3)$ należy do okręgu o środku $S = (2, -1)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$.

Do sprawdzenia wystarczy wyznaczyć odległość podanego punktu od środka okręgu.

$$|SP| = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 + 1)^2} = \sqrt{5}.$$

Ponieważ $|SP| = \sqrt{5}$, zatem podany punkt należy do tego okręgu.

Przykład 7

Wyznamy równanie okręgu o promieniu $r = 2$, jeżeli należą do niego punkty $K = (2, 0)$ i $L = (0, 2)$.

Podstawiamy współrzędne punktów K i L do równania okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Otrzymujemy układ równań z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} (2 - a)^2 + (0 - b)^2 = 4 \\ (0 - a)^2 + (2 - b)^2 = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu sprowadza się do równania

$$(2 - a)^2 + b^2 = a^2 + (2 - b)^2, \text{ z czego otrzymujemy, że } a = b.$$

Podstawiamy tę zależność do jednego z równań i otrzymujemy: $(2 - a)^2 + a^2 = 4$.

Po przekształceniach mamy równanie $2a^2 - 4a = 0$, zatem $a = 0$ lub $a = 2$ i jednocześnie $b = 0$ lub $b = 2$.

Otrzymujemy w związku z tym dwa równania okręgów, spełniających podane warunki:

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ lub } (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4.$$

Przykład 8

Wyznamy równanie okręgu przechodzącego przez punkt $P = (1, 2)$, stycznego do obu osi układu współrzędnych.

Zauważmy, że środek S musi mieć współrzędne $S = (r, r)$.

Podstawiając współrzędne środka oraz podany punkt do równania okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ otrzymujemy równanie:

$$(1 - r)^2 + (2 - r)^2 = r^2.$$

Z równania otrzymujemy, że $r = 1$ lub $r = 5$. Zatem mamy dwa okręgi spełniające warunki zadania:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ lub } (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Słownik

okrąg

zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, które leżą w odległości równej promieniowi od ustalonego punktu, nazywanego środkiem okręgu

postać kanoniczna równania okręgu

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, gdzie $S = (a, b)$ - środek okręgu, r - promień okręgu

Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, a następnie wykonaj polecenie.

Polecenie 2

a) Wyznacz środek i promień okręgu o równaniu $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 18$.

b) Napisz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (4, -2)$ i promieniu $r = 2\sqrt{3}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary równanie okręgu z odpowiadającym mu środkiem i promieniem:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

$$S = (-2, 3) \text{ i } r = 2\sqrt{3}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

$$S = (2, 3) \text{ i } r = 4$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 12$$

$$S = (2, -3) \text{ i } r = 4$$

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 12$$

$$S = (-2, -3) \text{ i } r = 2\sqrt{3}$$

Ćwiczenie 2



Okrąg o środku w punkcie $S = (-5, -1)$ i promieniu $r = 3$ ma równanie:

☐ $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$

☐ $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 3$

☐ $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$

Ćwiczenie 3



Dany jest okrąg o równaniu $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 20$. Zatem:

☐ do okręgu należy punkt o współrzędnych $(5, 6)$ ☐ do okręgu należy punkt o współrzędnych $(7, 2)$

☐ $S = (3, 2) \text{ i } r = 2\sqrt{5}$

☐ $S = (-3, -2) \text{ i } r = 20$

Ćwiczenie 7



Pogrupuj elementy zgodnie z podanym opisem:

Okręgi o środkach o obu współrzędnych ujemnych:

$$(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 12$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

$$(x - 9)^2 + (y - 3)^2 = 3$$

Okręgi o środkach o obu współrzędnych dodatnich:

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$$

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$$

Ćwiczenie 8



Uzupełnij tekst odpowiednimi liczbami:

Jeżeli równanie $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = m^2 - m$ opisuje okrąg, wówczas wartość parametru m należy do przedziału $(-\infty, \boxed{}) \cup (\boxed{}, \infty)$.

Jeżeli $m = \boxed{}$ lub $m = \boxed{}$ to promień okręgu jest równy $\sqrt{30}$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Równanie okręgu w postaci kanonicznej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Cele nauczania - wymagania ogólne:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzór na postać kanoniczną równania okręgu;
- wyznacza równanie okręgu, gdy ma podany środek i promień;
- określa promień i środek okręgu na podstawie jego równania;
- wykorzystuje postać kanoniczną równania okręgu do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Infografika” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat – „Równanie okręgu w postaci kanonicznej”, wskazuje cele zajęć oraz ustala z nimi kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

[Długość okręgu](#)

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać medium w sekcji „Infografika” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, żeby móc samodzielnie rozwiązać zadania w temacie „Równanie okręgu w postaci kanonicznej”.