Objętość stożka

Objętość stożka

Źródło: Sigmund, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Czasami stożek definiuje się jako bryłę ograniczoną przez powierzchnię stożkową, której krzywa kierująca jest zamknięta, oraz przez płaszczyznę przecinającą powierzchnię stożkową. W stożku, oprócz pola powierzchni całkowitej, możemy wyznaczać również objętość, czyli miarę, którą zajmuje ta bryła w przestrzeni trójwymiarowej. Objętością stożków zajmowali się m.in. Archimedes, Demokryt, czy Eudoksos. Wyjaśnienie zależności między objętością walca oraz stożka możemy znaleźć w XII księdze *Elementów* Euklidesa. W materiale podamy wzór na objętość stożka oraz pokażemy jego zastosowanie. Opierając się na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

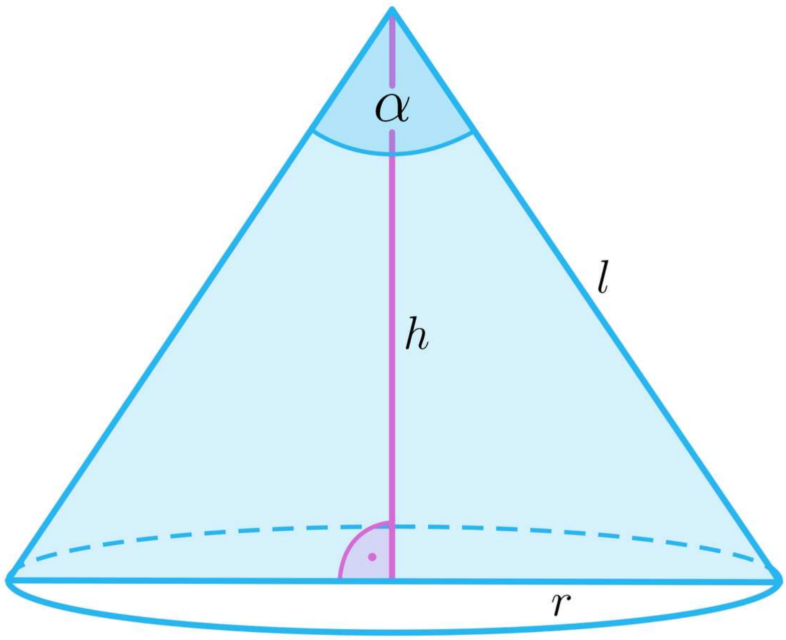
- Obliczysz objętość stożka, gdy dany jest promień podstawy oraz wysokość.
- Wyznaczysz objętość stożka, jeżeli dane są zależności pomiędzy odcinkami w stożku.
- Wykorzystasz wzór na objętość stożka do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy podstawowe pojęcia związane ze stożkiem.

> **Definicja: Stożek**
>
> Stożek to bryła przestrzenna, którą otrzymujemy przez obrót trójkąta prostokątnego wokół jednej z jego przyprostokątnych.

W stożku stosujemy oznaczenia takie, jak na poniższym rysunku:

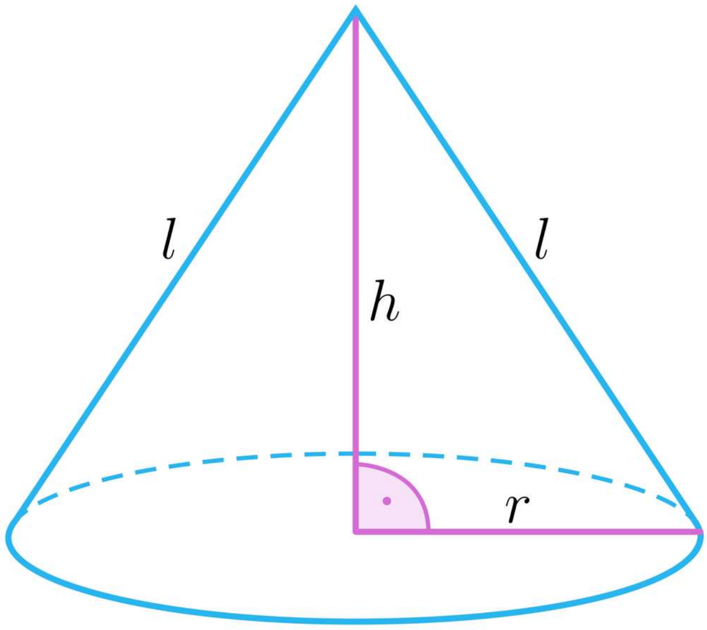


r – promień podstawy stożka,
l – tworząca stożka,
h – wysokość stożka,
α – kąt rozwarcia stożka.

Pole powierzchni całkowitej stożka obliczamy ze wzoru:

$$P_c = \pi r^2 + \pi r l.$$

Objętość stożka



Objętość V dowolnego stożka obliczamy ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h.$$

Ponieważ podstawa stożka jest kołem o promieniu długości r, zatem:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

Ważne!

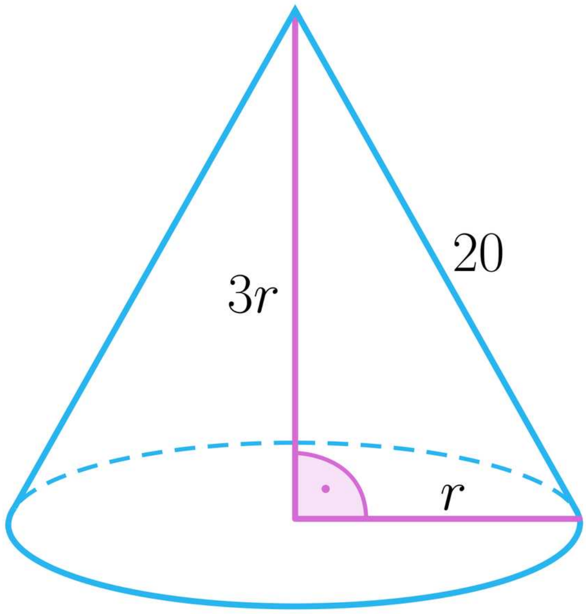
Objętość walca jest równa objętości trzech stożków o tym samym promieniu podstawy i wysokości.

Przykład 1

Wyznaczymy objętość stożka, w którym wysokość jest trzy razy dłuższa niż promień podstawy, a tworząca ma długość 20.

Rozwiązanie

Narysujmy stożek i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia.



Ponieważ promień podstawy, wysokość i tworząca stożka tworzą trójkąt prostokątny, zatem, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, układamy i rozwiązujemy równanie:

$r^2 + (3r)^2 = 20^2$

$10r^2 = 400$

$r^2 = 40$, czyli $r = 2\sqrt{10}$.

Wysokość stożka jest równa $3r = 6\sqrt{10}$, zatem objętość tego stożka wynosi:

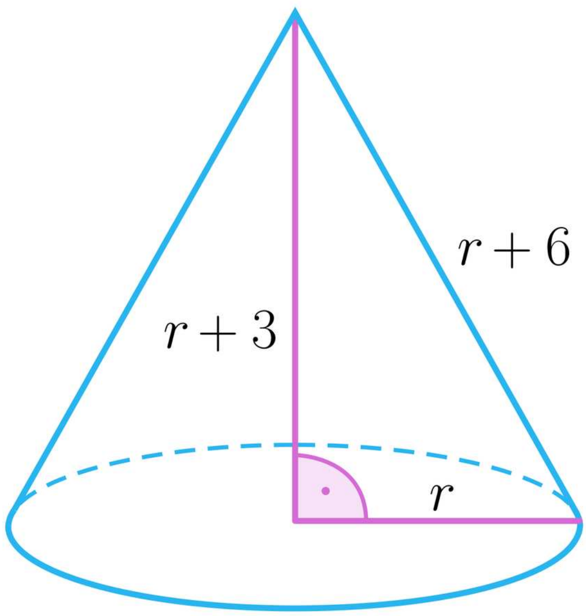
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{10}\right)^2 \cdot 6\sqrt{10} = 80\pi\sqrt{10}$.

Przykład 2

Obliczymy objętość stożka, w którym promień podstawy, wysokość i tworząca w kolejności ich występowania tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 3.

Rozwiązanie

Narysujmy stożek i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:



Promień, wysokość oraz tworząca stożka tworzą trójkąt prostokątny, korzystamy zatem z twierdzenia Pitagorasa i rozwiązujemy równanie:

$r^2 + (r+3)^2 = (r+6)^2$

$r^2 + r^2 + 6r + 9 = r^2 + 12r + 36$

$r^2 - 6r - 27 = 0.$

Zatem $r = 9$.

Wobec tego wysokość stożka jest równa $r + 3 = 12$.

Objętość stożka wynosi:

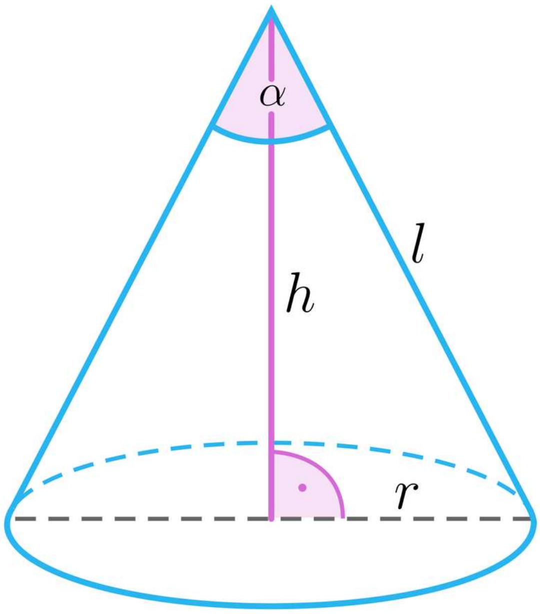
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 324\pi.$

Przykład 3

Obliczymy objętość stożka, w którym cosinus kąta rozwarcia wynosi $\frac{3}{4}$, a tworząca ma długość 4.

Rozwiązanie

Narysujmy stożek i wprowadźmy odpowiednie oznaczenia:



Z zadania wynika, że długość tworzącej $l = 4$ oraz $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

Do wyznaczenia długości promienia r podstawy stożka wykorzystamy twierdzenie cosinusów.

Zatem:

$(2r)^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4}$

$4r^2 = 16 + 16 - 24$

$4r^2 = 8$, czyli $r^2 = 2$

$r = \sqrt{2}$.

Długość wysokości stożka obliczymy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$r^2 + h^2 = l^2$

$\left(\sqrt{2}\right)^2 + h^2 = 4^2$

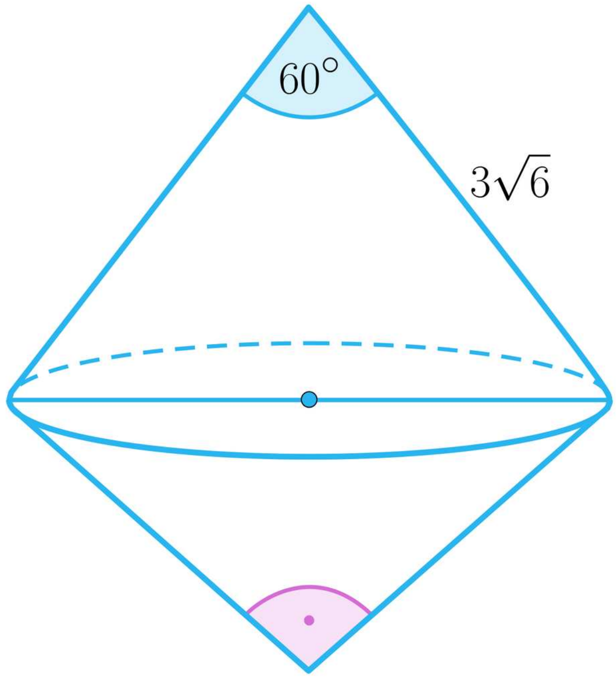
$h^2 = 14$, czyli $h = \sqrt{14}$.

Objętość tego stożka jest równa:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{14} = \frac{2\sqrt{14}}{3}\pi$.

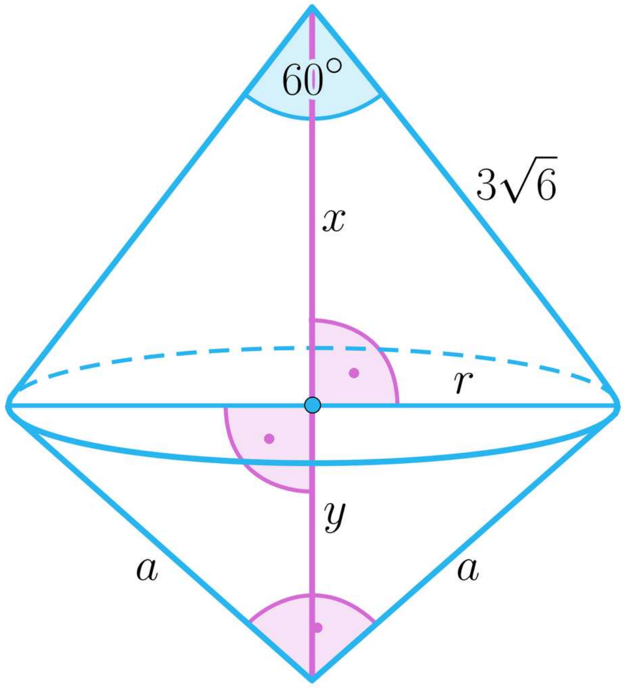
Przykład 4

Obliczymy objętość bryły będącej sumą dwóch wypukłych stożków z rysunku:



Rozwiązanie

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia, jak na poniższym rysunku:



Zauważmy, że:

$r = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ oraz $x = \frac{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

W stożku o tworzącej długości a zachodzi zależność $y = r = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Zatem objętość V omawianej bryły jest równa:

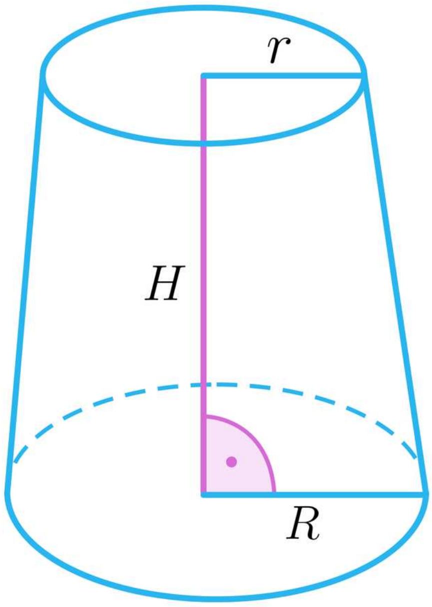
$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot x + \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot y = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot(x+y).$

Wobec tego:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{9\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}\right) = \left(\frac{81\sqrt{2}}{4} + \frac{27\sqrt{6}}{4}\right)\pi.$

Ciekawostka

Na rysunku przedstawiono stożek ścięty, w którym R i r są promieniami podstaw, a H jego wysokością.



Objętość stożka ściętego z rysunku obliczamy ze wzoru:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot H \cdot \left(r^2 + r \cdot R + R^2\right).$$

Przykład 5

Obliczymy długość promienia dolnej podstawy w stożku ściętym o objętości 30π, jeżeli promień górnej podstawy ma długość 3, a wysokość stożka 9.

Rozwiązanie

Z treści zadania wynika, że:

$V = 30\pi,$

$r = 3,$

$H = 9.$

Po podstawieniu tych danych do wzoru na objętość stożka ściętego:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot H \cdot \left(r^2 + r \cdot R + R^2\right).$

Do wyznaczenia wartości R rozwiązujemy równanie:

$30\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9 \cdot \left(3^2 + 3 \cdot R + R^2\right).$

Równanie przekształcamy do postaci:

$R^2 + 3R - 1 = 0,$

$\Delta = 9 + 4 = 13,$

$R_1 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} < 0,$

$R_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} > 0.$

Zatem promień dolnej podstawy stożka ściętego jest równy $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

Słownik

stożek

bryła powstała w wyniku obrotu płaszczyzny trójkąta prostokątnego o kąt pełny względem osi przechodzącej przez jedną z przyprostokątnych tego trójkąta

walec

bryła obrotowa, która powstaje przez obrót prostokąta dookoła osi zawierającej jeden z jego boków

Galeria zdjęć interaktywnych

Polecenie 1

Zapoznaj się z galerią zdjęć interaktywnych, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Zdjęcie trzecie. Napis, obliczmy długość tworzącej stożka o objętości $9 \cdot \pi$, jeżeli promień podstawy stożka jest równy $\sqrt{3}$. Dane, $V = 9 \cdot \pi$. $r = \sqrt{3}$. Szukane, l. Rozwiązanie,
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \mathrm{r}^2 \cdot \mathrm{h}$. $9 \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \mathrm{h}$. $h = 9$. $l^2 = r^2 + h^2$.
$l^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 9^2 = 3 + 81 = 84$. $l = 2 \cdot \sqrt{21}$

Polecenie 2

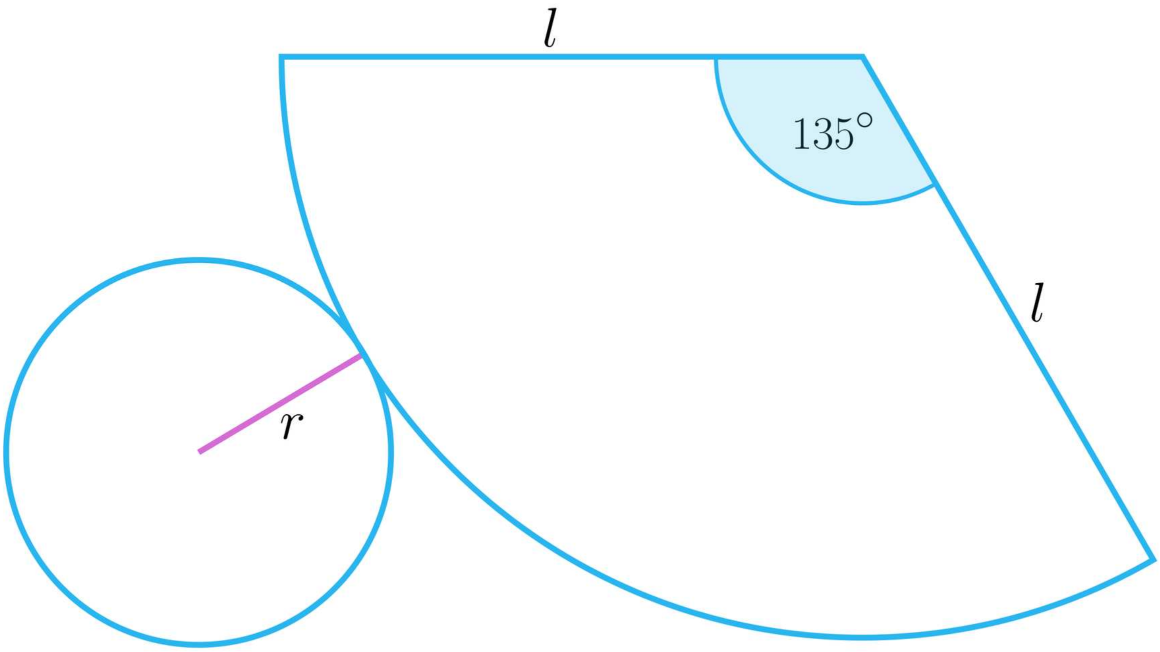
Oblicz objętość stożka, w którym długość promienia podstawy jest o 2 mniejsza od długości wysokości, a długość tworzącej stożka jest o 2 większa od długości tej wysokości.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Na rysunku przedstawiono siatkę pewnego stożka.

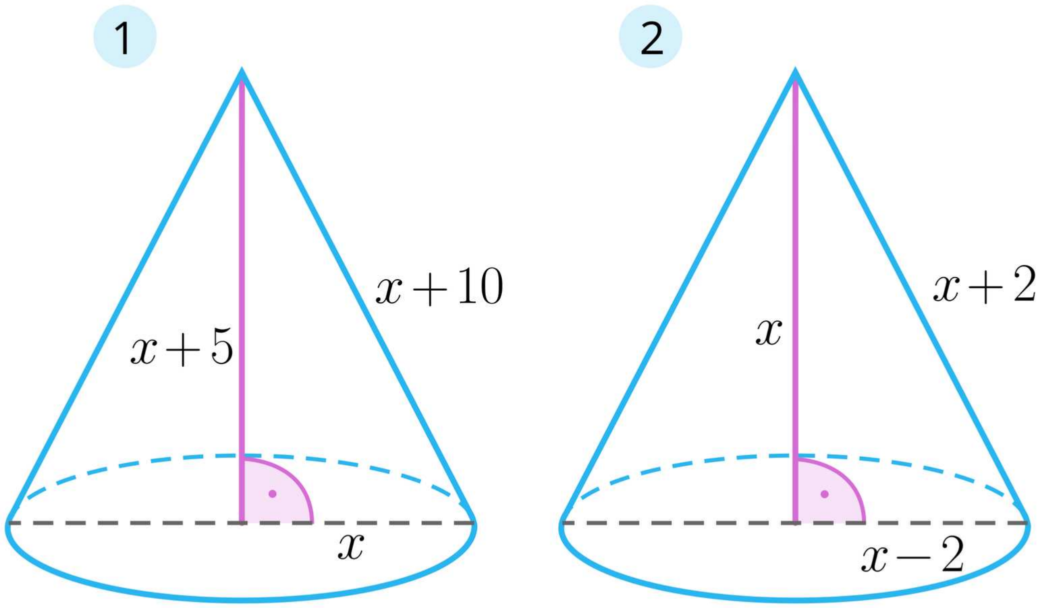


Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono stożki.



Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Oblicz objętość stożka, jeżeli wiadomo, że jego kąt rozwarcia ma miarę 90°, a pole trójkąta, którego dwa boki są tworzącymi stożka, a trzeci bok jest średnicą podstawy wynosi P.

Ćwiczenie 7

Promień podstawy stożka jest równy r. Tworząca stożka jest cztery razy dłuższa od promienia podstawy. Wyznacz objętość tego stożka.

Ćwiczenie 8

Dany jest stożek o polu powierzchni bocznej $16\pi\sqrt{2}$ i polu powierzchni całkowitej $16\pi\sqrt{2}+8\pi$. Oblicz objętość tego stożka.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość stożka

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza objętość stożka, gdy dany jest promień podstawy oraz wysokość;
- wyznacza objętość stożka, jeżeli dane są zależności pomiędzy odcinkami w stożku;
- wykorzystuje wzór na objętość stożka do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda krokodyla;
- burza mózgów;
- liga zadaniowa;
- metoda puzzli eksperckich.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Wskazanie przez nauczyciela tematu: „Objętość stożka” i celów zajęć, przejście do wspólnego ustalenia kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Praca w grupach metodą puzzli eksperckich. Poproszeni przed lekcją wybrani uczniowie przygotowują materiały dotyczące istoty i sposobu wyznaczania długości odcinków w stożku, potrzebnych do obliczenia objętości stożka, korzystając z epodręcznika. Ich zadaniem jest przekazanie zdobytych informacji grupom, tak aby każdy uczeń potrafił obliczyć dane wielkości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”, a następnie wybrany uczeń omawia ich wykonanie na forum klasy krok po kroku.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 3-5 na czas (od łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże ćwiczenia jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Objętość stożka” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Nauczyciel sprawdza, czego się uczniowie nauczyli. Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie i – jeśli to potrzebne – uzupełnia informacje.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Objętość stożka”).

Materiały pomocnicze:

- Bryły obrotowe - stożek

Wskazówki metodyczne:

- Nauczyciel może wykorzystać materiał w sekcji „Galeria zdjęć interaktywnych” do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego treścią i przygotowują do pracy na zajęciach tak, aby samodzielnie rozwiązać zadania dotyczące obliczania objętości stożka.