Wykorzystanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień osadzonych w kontekście praktycznym

Wykorzystanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień osadzonych w kontekście praktycznym

Źródło: Jon Tyson, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Własności funkcji kwadratowej możemy wykorzystać w wielu sytuacjach z życia codziennego. Do zagadnień osadzonych w kontekście praktycznym, w których wykorzystuje się własności funkcji kwadratowej możemy zaliczyć m.in. wyznaczanie wymiarów działki, czy ruch jednostajnie przyspieszony prostoliniowy. W materiale omówimy kilka przykładów, które wykorzystują własności oraz wykres funkcji kwadratowej.

Będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne, bazując na części teoretycznej materiału i podanych przykładach.

Twoje cele

- Przeanalizujesz sposoby rozwiązywania zadań problemowych z użyciem własności funkcji kwadratowej.
- Dobierzesz odpowiednią postać wzoru funkcji kwadratowej do rozwiązywanego zagadnienia.
- Zastosujesz własności funkcji kwadratowej do rozwiązywania zagadnień praktycznych.
- Wykorzystasz zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

Przypomnijmy definicję funkcji kwadratowej.

Definicja: Funkcja kwadratowa

Funkcję określoną na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdzie:
$a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

nazywamy funkcją kwadratową.

Funkcja kwadratowa ma wiele ciekawych własności, które mają zastosowanie w rozwiązywaniu problemów praktycznych.

W przedstawionych przykładach wykorzystamy niektóre własności funkcji kwadratowej:

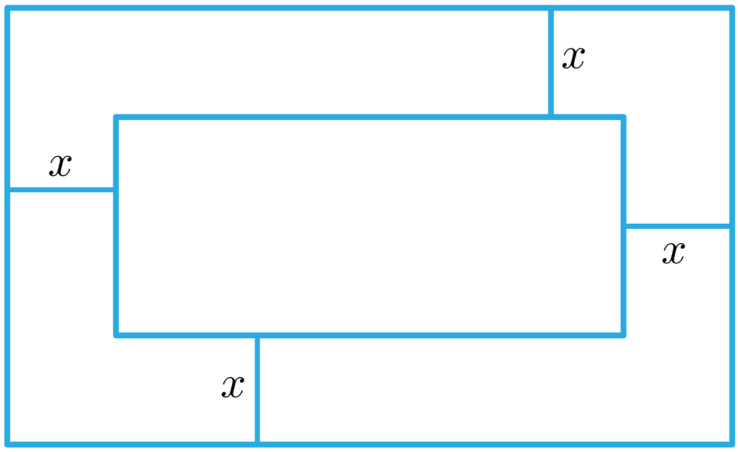
- istnienie wartości najmniejszej lub największej funkcji kwadratowej,
- postać ogólną, kanoniczną, iloczynową wzoru funkcji kwadratowej,
- miejsca zerowe oraz oś symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej,
- zastosowanie funkcji kwadratowej w interpretowaniu zjawisk fizycznych.

Przykład 1

Zdjęcie oprawiono w ramę o zewnętrznych wymiarach 9 dm i 6 dm tak, że pole powierzchni widocznej części zdjęcia wynosi 18 dm^2. Obliczymy szerokość tej ramy.

Rozwiązanie:

Wykonujemy rysunek pomocniczy i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Jeżeli przez x oznaczymy szerokość ramy w dm, to $6 - x > 0$ oraz $9 - x > 0$.

Zatem $x \in (0, 6)$.

Do wyznaczenia wartości x rozwiązujemy równanie:

$(9 - 2x) \cdot (6 - 2x) = 18$

$54 - 18x - 12x + 4x^2 - 18 = 0$

$2x^2 - 15x + 18 = 0$

$\Delta = 225 - 8 \cdot 18 = 81$

$x_1 = \frac{15-9}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{15+9}{4} = \frac{24}{4} = 6$

Ponieważ $x \in (0, 6)$, zatem rama ma szerokość $\frac{3}{2}$ dm.

Przykład 2

Drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym opisuje wzór $s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$, gdzie v_0 - prędkość poczatkowa ciała w $\frac{m}{s}$, a - przyspieszenie w $\frac{m}{s^2}$, s - długość przebytej drogi w m, t - czas trwania ruchu w s. Wyznaczymy z tego wzoru czas trwania ruchu.

Rozwiązanie:

Do wyznaczenia czasu t wykorzystamy podany wzór:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Wzór ten możemy przekształcić do następującej postaci:

$$at^2 + 2v_0 t - 2s = 0$$

Wyznaczamy t:

$$\Delta = (2v_0)^2 - 4 \cdot a \cdot (-2s) = 4{v_0}^2 + 8as$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4{v_0}^2 + 8as} = 2\sqrt{{v_0}^2 + 2as}$$

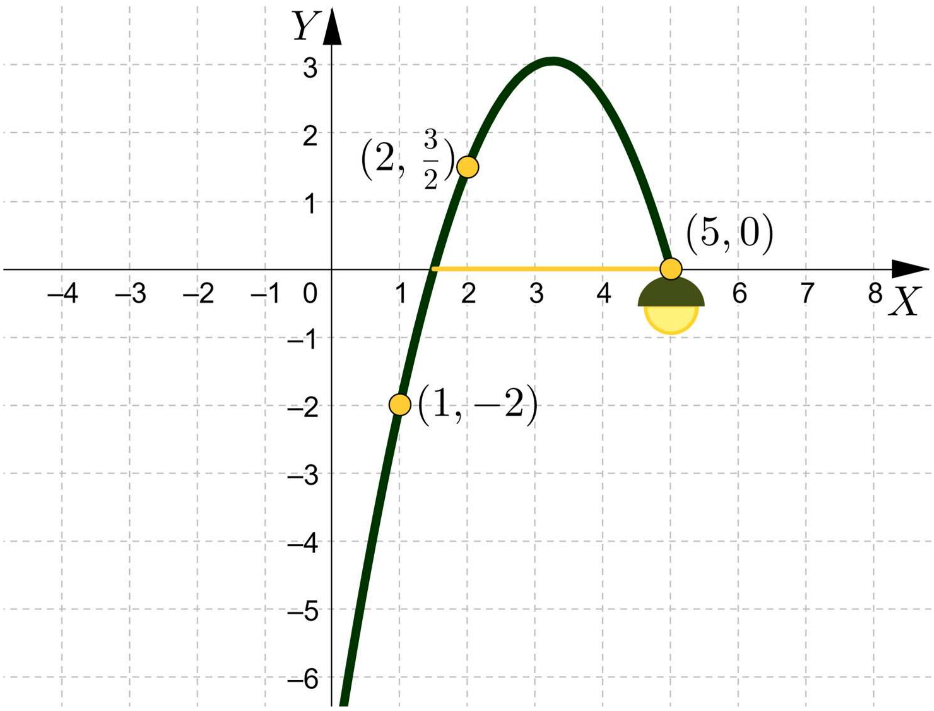
$$t_1 = \frac{-2v_0 - 2\sqrt{{v_0}^2 + 2as}}{2} = -v_0 - \sqrt{{v_0}^2 + 2as} < 0$$

$$t_2 = \frac{-2v_0 + 2\sqrt{{v_0}^2 + 2as}}{2} = -v_0 + \sqrt{{v_0}^2 + 2as} > 0$$

Zatem czas trwania ruchu ciała można wyznaczyć ze wzoru $t = -v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2as}\ [s]$.

Przykład 3

Na rysunku przedstawiono schemat ulicznej latarni. Słup, podtrzymujący latarnię został zaprojektowany na kształt paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej. Do latarni zamocowano pręt (w kolorze żółtym), jak na rysunku (bokowi jednej kratki odpowiada 1 m) .



Wyznaczymy długość pręta, który zamocowano do latarni.

Rozwiązanie:

Możemy przyjąć, że długość pręta jest równa odległości pomiędzy miejscami zerowymi pewnej funkcji kwadratowej, której wykres przedstawiono na rysunku.

Z paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej odczytujemy współrzędne zaznaczonych punktów:

$(1, -2)$, $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ oraz $(5, 0)$.

Jeżeli wykorzystamy postać ogólną wzoru funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, to do wyznaczenia wartości a, b, c rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} -2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ \frac{3}{2} = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 0 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = a + b + c \\ 3 = 8a + 4b + 2c \\ 0 = 25a + 5b + c \end{cases}$$

Zatem $a = -1, b = \frac{13}{2}, c = -\frac{15}{2}$.

Jeżeli p jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem odpowiedniej funkcji kwadratowej oraz x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej, to:

$$p = \frac{x_1+x_2}{2}$$

Zatem do wyznaczenia wartości x_1 rozwiązujemy równanie:

$$\frac{-\frac{13}{2}}{-2} = \frac{x_1+5}{2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2}$$

Wobec tego szukana długość pręta wynosi:

$$5 - \frac{3}{2} = 3,5\ [m]$$

Przykład 4

Sklep sprzedaje dziennie 16 zabawek. Zysk ze sprzedaży jednej sztuki wynosi 40 zł. Wiadomo, że obniżenie ceny o każde 5 zł, powoduje wzrost sprzedaży o 4 sztuki dziennie. Obliczymy, ile powinna wynosić cena zabawki, aby zysk był największy.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

x - liczba obniżek ceny zabawki,

$5x$ - obniżka x raz ceny zabawki za każdym razem o 5 $zł$

$4x$ - wielkość opisująca wzrost liczby sprzedanych zabawek po x obniżkach ceny zabawki

Niech funkcja f wyraża dzienny zysk ze sprzedaży.

Zatem:

$f(x) = (40 - 5x) \cdot (16 + 4x)$, gdzie $x \in \langle 0, 8 \rangle$

$f(x) = 640 + 160x - 80x - 20x^2 = -20x^2 + 80x + 640$

Wykres tej funkcji leży na paraboli o ramionach skierowanych do góry.

Zatem funkcja osiąga wartość największą w punkcie, który jest wierzchołkiem paraboli.

Wobec tego $p = \frac{-80}{2 \cdot (-20)} = 2$.

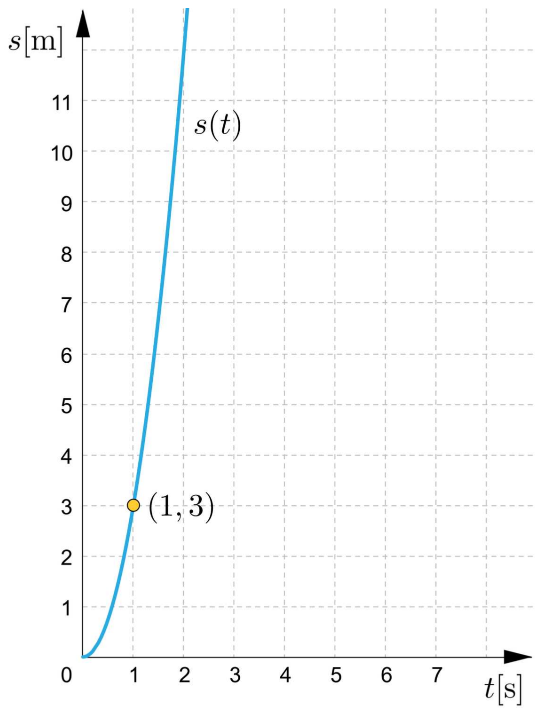
Zatem należy dwukrotnie obniżyć cenę, aby zysk był największy.

Cena powinna wynosić:

$(40 - 5 \cdot 2)$ zł $= 30$ zł

Przykład 5

Na wykresie przedstawiono zależność drogi od czasu w ruchu jednostajnie przyspieszonym prostoliniowym. Drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym prostoliniowym określamy wzorem $s(t) = \frac{a \cdot t^2}{2}$, gdzie s oznacza przebytą drogę w czasie t, zaś a – przyspieszenie. Zakładamy, że ciało przed rozpoczęciem ruchu znajdowało się w stanie spoczynku.



a) Na podstawie wykresu wyznaczymy wartość przyspieszenia a.

b) Obliczymy długość drogi, jaką pokonało ciało w czasie 50 s.

Rozwiązanie:

a) Zauważmy, że do wykresu funkcji przedstawionego na rysunku należy punkt o współrzędnych $(1, 3)$.

Zatem do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$3 = \frac{a \cdot 1^2}{2}$

$a = 6 \ \frac{m}{s^2}$

b) Jeżeli $t = 50$ s, to:

$s(50) = \frac{6 \cdot 50^2}{2} = 7500$

W ciągu 50 s ciało pokonało drogę długości 7500 m.

Przykład 6

Cena wynajmu autobusu na wycieczkę wynosi 1500 zł. Gdyby 5 uczestników zrezygnowało z wycieczki, to każdy z pozostałych zapłaciłby 10 zł więcej. Obliczymy, ilu uczestników zapisało się na wycieczkę.

Rozwiązanie:

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

x – liczba uczestników,

y – koszt wynajmu autobusu na jednego uczestnika.

Do wyznaczenia wartości x i y rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 1500 \\ (x - 5) \cdot (y + 10) = 1500 \end{cases}$$

Zauważmy, że każde z równań możemy zapisać w postaci równania wymiernego.

$$\begin{cases} y = \frac{1500}{x} \\ xy + 10x - 5y - 50 = 1500 \end{cases}$$

$1500 + 10x - 5 \cdot \frac{1500}{x} - 50 = 1500$

$10x^2 - 50x - 7500 = 0$

$x^2 - 5x - 750 = 0$

$\Delta = 25 + 4 \cdot 750 = 3025$

$x_1 = \frac{5-55}{2} = -25$

$x_2 = \frac{5+55}{2} = 30$

Ponieważ $x > 0$, zatem $x = 30$.

Na wycieczkę zapisało się 30 uczestników.

Słownik

funkcja kwadratowa

funkcja określona na zbiorze $\mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

gdzie:
$a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

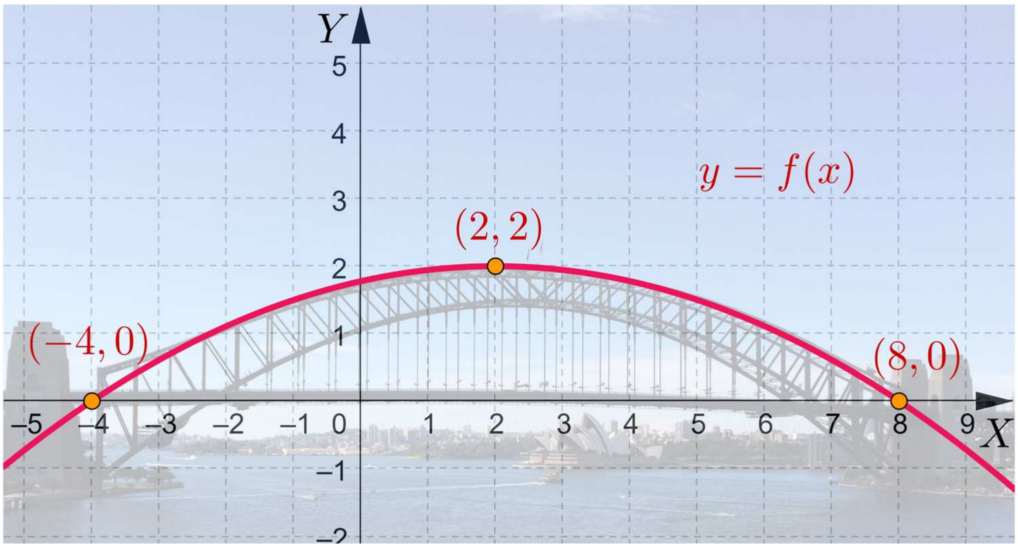
Infografika

Polecenie 1

Zapoznaj się z infografiką, na której przedstawiono konstrukcję mostu. Most został zaprojektowany w postaci fragmentu paraboli, będącej wykresem funkcji f. Wykres funkcji f zaczyna się w punkcie o współrzędnych $(-8, -1)$, a kończy się w punkcie o współrzędnych $(10, -1)$. Odległość pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami na osi X wynosi $100\ m$.

Polecenie 2

Most został zaprojektowany w postaci fragmentu paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej f tak, jak na poniższym rysunku.



Na podstawie danych z rysunku, wyznacz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

Sprawdź się

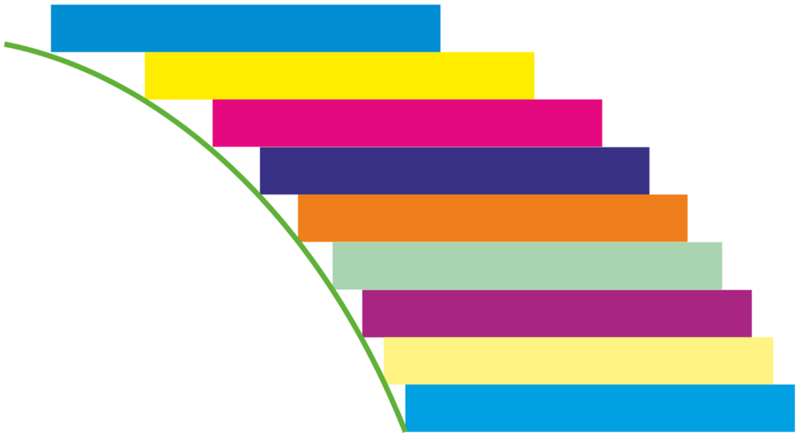
Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Wstaw w tekst odpowiednie liczby.



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Pole powierzchni prostokątnego ogródka wynosi $270\ \mathrm{m}^2$. Oblicz wymiary ogródka, jeżeli różnią się one o $3\ \mathrm{m}$.

Ćwiczenie 7

W 2020 roku na uroczystości urodzinowej, ktoś zapytał jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: jeżeli mój wiek sprzed 20 lat pomnożę przez mój wiek za 34 lata, to otrzymam rok mojego urodzenia. Oblicz, ile lat ma jubilat.

Ćwiczenie 8

Z prostokątnego arkusza papieru o nierównoległych bokach długości $40\ \text{cm}$ i $30\ \text{cm}$ odcinamy na rogach kwadraty tak, aby po sklejeniu otrzymać otwarte pudełko na prezenty. Oblicz, jaka powinna być długość boków wycinanych kwadratów, aby pole powierzchni bocznej pudełka było największe.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykorzystanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień osadzonych w kontekście praktycznym

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:
11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- analizuje sposoby rozwiązywania zadań problemowych z użyciem własności funkcji kwadratowej;
- wybiera odpowiednią postać wzoru funkcji kwadratowej do rozwiązywanego zagadnienia;
- stosuje własności funkcji kwadratowej oraz jej wykres do rozwiązywania zagadnień praktycznych;
- wykorzystuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda tekstu przewodniego;
- metoda krokodyla.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Wykorzystanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień osadzonych w kontekście praktycznym” oraz cele, wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie metodą tekstu przewodniego analizują treści z sekcji „Przeczytaj”. Po zapoznaniu się z każdym z przykładów zgłaszają pytania i napotkane ewentualne problemy, które omawiane są na forum klasy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Infografika”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 z sekcji „Sprawdź się” na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.
5. Zadania numer 6, 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się” uczniowie wykonują indywidualnie metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu

rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci ogólnej

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Infografika” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie zdobytej wiedzy na temat wykorzystania własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień osadzonych w kontekście praktycznym.
- „Infografikę” można wykorzystać do określania własności funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu.