



Znajdowanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Źródło: 132369, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

W tym materiale wykorzystamy współrzędne szczególnych punktów wykresu funkcji kwadratowej do wyznaczenia jej wzoru w trzech postaciach: ogólnej, iloczynowej (o ile istnieje) i kanonicznej. Nie każda funkcja kwadratowa ma miejsca zerowe, ale każda parabola, która jest wykresem tej funkcji, ma wierzchołek oraz inne punkty szczególne np. punkt przecięcia wykresu z osią Y . Do realizacji celów tej lekcji niezbędna będzie umiejętność odczytywania własności funkcji z wykresu.

Twoje cele

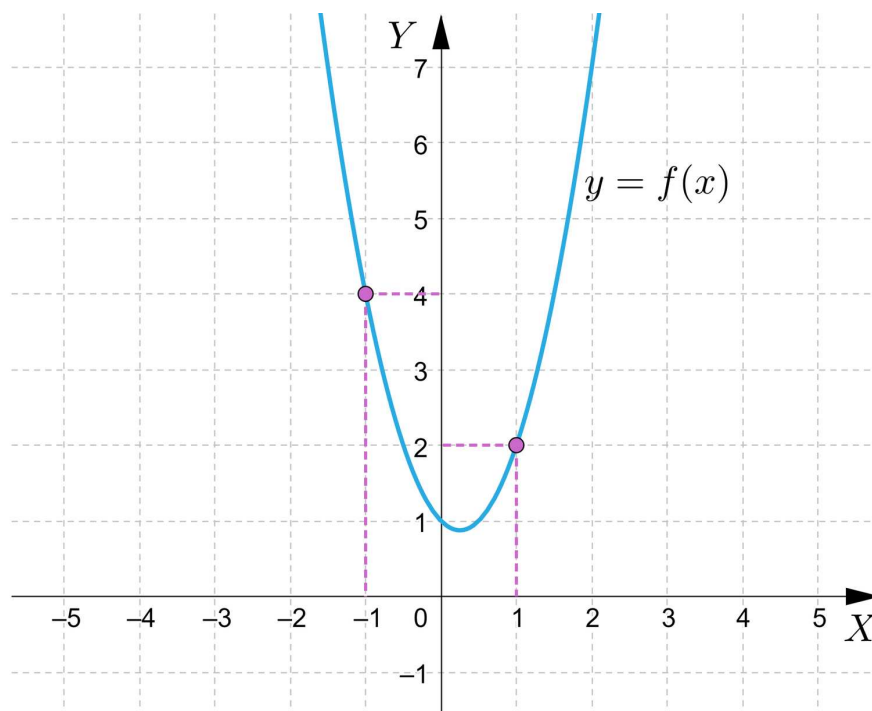
- Odczytasz współrzędne punktów szczególnych funkcji kwadratowej z jej wykresu.
- Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej wyznacysz wzór tej funkcji w postaci ogólnej.
- Wyznacysz wzór funkcji kwadratowej, korzystając z jej wykresu oraz postaci kanonicznej.
- Wykorzystasz dane z wykresu funkcji kwadratowej do wyznaczenia wzoru tej funkcji w postaci iloczynowej.

Przeczytaj

W kolejnych przykładach omówimy, jak wyznaczyć wzór **funkcji kwadratowej** na podstawie jej wykresu oraz specjalnie zadanych warunków.

Przykład 1

Wyznamy wzór **funkcji kwadratowej** z wykorzystaniem postaci ogólnej, jeżeli jej wykresem jest parabola przedstawiona na poniższym rysunku.



Dana jest postać ogólna tej funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Z powyższego wykresu odczytujemy, że punkt przecięcia wykresu funkcji z osią rzędnych to punkt o współrzędnych $W = (0, 1)$.

Zatem po podstawieniu do postaci ogólnej otrzymujemy, że $c = 1$.

Wzór funkcji zapisujemy w postaci: $f(x) = ax^2 + bx + 1$.

Znajdujemy współrzędne dwóch punktów, które należą do wykresu funkcji. Są to np. $(1, 2)$ i $(-1, 4)$.

Podstawiamy współrzędne tych punktów do wzoru $f(x) = ax^2 + bx + 1$.

Otrzymujemy: $f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 = 2$

$f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 = 4$.

Tworzymy układ równań:
$$\begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ a - b + 1 = 4 \end{cases}$$

Przekształcamy układ do postaci
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

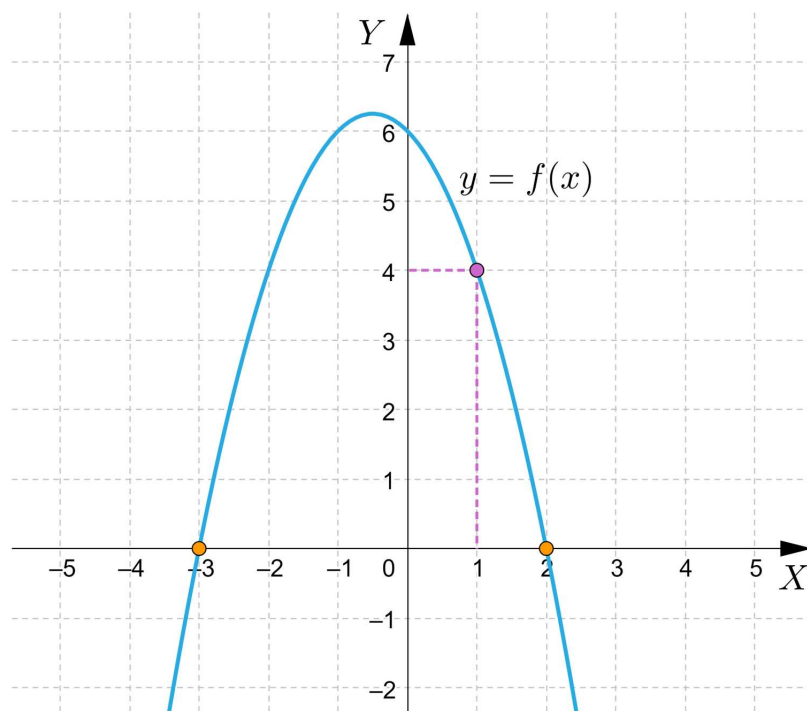
Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy: $a = 2$ i $b = -1$.

Zatem szukany wzór funkcji jest postaci $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

W celu znalezienia wzoru **funkcji kwadratowej** w postaci ogólnej, wystarczy znać współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji oraz współrzędne dwóch punktów, które należą do jej wykresu.

Przykład 2

Wyznamy wzór **funkcji kwadratowej** z wykorzystaniem postaci iloczynowej, jeżeli jej wykresem jest parabola przedstawiona na poniższym rysunku.



Z wykresu możemy odczytać miejsca zerowe tej funkcji. Są nimi liczby (-3) oraz 2 .

Ponieważ funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe, więc możemy wykorzystać jej postać iloczynową $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Po podstawieniu do postaci iloczynowej miejsc zerowych otrzymujemy, że $f(x) = a(x + 3)(x - 2)$

Z wykresu odczytujemy współrzędne punktu, który należy do paraboli, która jest wykresem tej funkcji: $(1, 4)$.

Podstawiamy współrzędne odczytanego punktu do postaci iloczynowej i otrzymujemy równanie $4 = a(1 + 3)(1 - 2)$, co po rozwiązaniu daje $a = -1$.

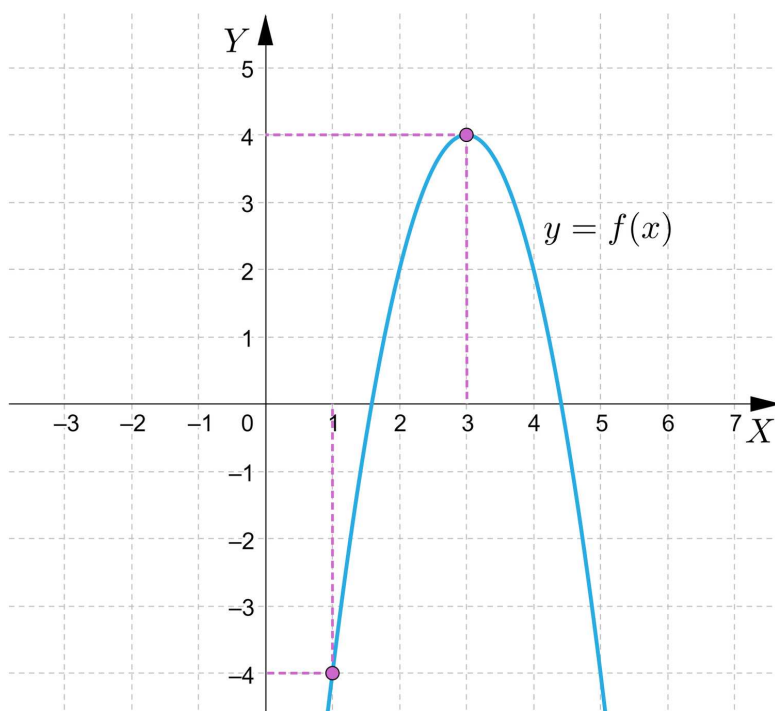
Wzór szukanej funkcji jest postaci $f(x) = -(x + 3)(x - 2)$.

Postać ogólna tej funkcji wyraża się wzorem $f(x) = -x^2 - x + 6$.

W omówionym przykładzie nie było możliwe odczytanie dokładnych współrzędnych wierzchołka, dlatego oprócz miejsc zerowych wyznaczyliśmy współrzędne innego punktu, który należy do paraboli.

Przykład 3

Wyznamy wzór **funkcji kwadratowej** w postaci kanonicznej, jeżeli jej wykresem jest parabola przedstawiona na poniższym rysunku.



Postać kanoniczna funkcji kwadratowej wyraża się wzorem $f(x) = a(x - p)^2 + q$.

Odczytujemy współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji:
 $W = (3, 4)$.

Otrzymujemy, że $p = 3$ oraz $q = 4$.

Po podstawieniu do postaci kanonicznej otrzymujemy, że $f(x) = a(x - 3)^2 + 4$.

Do wykresu podanej funkcji należy punkt $(1, -4)$.

Podstawiamy współrzędne tego punktu do wzoru funkcji i mamy, że
 $-4 = a \cdot (1 - 3)^2 + 4$.

Zatem $a = -2$.

Wzór szukanej funkcji w postaci kanonicznej jest postaci $f(x) = -2(x - 3)^2 + 4$.

Jeżeli znamy współrzędne wierzchołka paraboli oraz dowolnego punktu, który do niej należy, wówczas wzór funkcji kwadratowej otrzymamy z postaci kanonicznej.

Przykład 4

Wiadomo, że do wykresu funkcji kwadratowej należą punkty $(2, 4)$ oraz $(6, 4)$. Wykres tej funkcji przecina oś Y w punkcie $(0, 22)$. Wyznamy wzór tej funkcji w postaci ogólnej.

Ponieważ dla $x = 2$ oraz dla $x = 6$ funkcja kwadratowa przyjmuje te same wartości, zatem wartość pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji wynosi $p = \frac{2+6}{2} = 4$.

Do rozwiązania wykorzystamy postać ogólną $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Jeśli $p = 4$, to $\frac{-b}{2a} = 4$, czyli $b = -8a$.

Ponieważ punkt przecięcia z osią Y wynosi $(0, 22)$, zatem wartość współczynnika $c = 22$.

Funkcja przyjmuje postać $f(x) = ax^2 - 8ax + 22$.

Po podstawieniu współrzędnych punktu $(2, 4)$ otrzymujemy równanie $4 = a \cdot 2^2 - 8a \cdot 2 + 22$.

Z równania mamy, że $a = \frac{3}{2}$, więc $b = -12$.

Otrzymujemy, że funkcja wyraża się wzorem $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 22$.

Ważne!

Jeżeli dane są dwa punkty należące do tej samej paraboli o pierwszych współrzędnych x_1 oraz x_2 , które leżą w tym samym odległościach od współrzędnej p wierzchołka, wówczas $p = \frac{x_1+x_2}{2}$.

Przykład 5

Wyznamy wzór funkcji kwadratowej, wiedząc że do jej wykresu należą punkty $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$, $C(2, -4)$.

Rozwiązanie

Wykorzystujemy wzór funkcji kwadratowej i podstawiamy do niego współrzędne poszczególnych punktów.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$A(-2, 0) \text{ stąd } 0 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$$

$$B(1, 3) \text{ stąd } 3 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$C(2, -4) \text{ stąd } -4 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

Otrzymujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi:

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ a + b + c = 3 \\ 4a + 2b + c = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2b - 4a \\ a + b + 2b - 4a = 3 \\ 4a + 2b + 2b - 4a = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2b - 4a \\ -3a + 3b = 3 \\ 4b = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2b - 4a \\ -3a + 3b = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2b - 4a \\ -3a + 3 \cdot (-1) = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2b - 4a \\ -3a = 6 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2b - 4a \\ a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) \\ a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 6 \\ a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Wzór funkcji kwadratowej ma postać $f(x) = -2x^2 - x + 6$.

$$\begin{cases} c = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) \\ a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Słownik

funkcja kwadratowa

funkcja, której wzór można zapisać w postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, a następnie wykonaj polecenie.

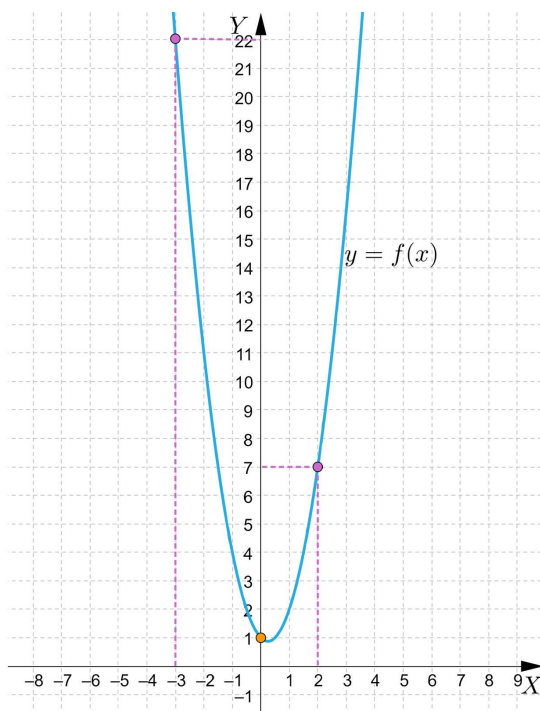
Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DgUUAoRdm>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej znajdowania wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu.

Polecenie 2

Na podstawie prezentacji rozwiąż poniższe zadanie:

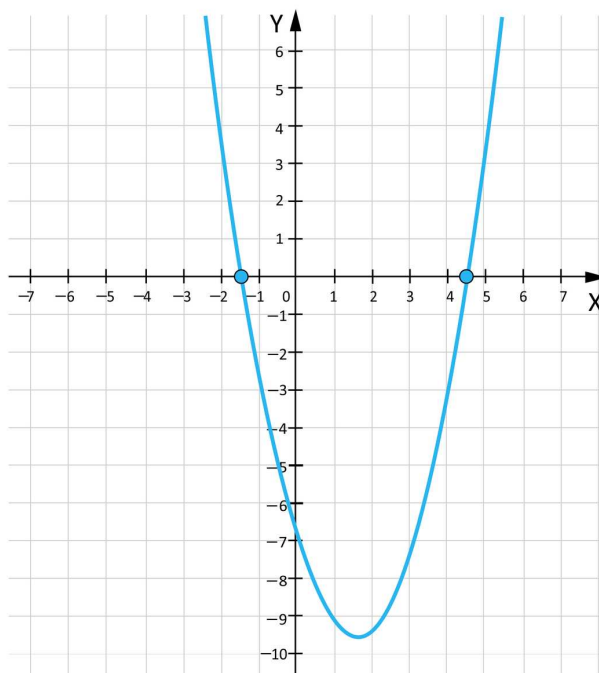
Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, której wykres przedstawiono na rysunku.



Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8





Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Znajdowanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odczytuje punkty szczególne funkcji kwadratowej z wykresu,
- wyznacza wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej i kanonicznej na podstawie informacji z wykresu,
- wykorzystuje dane z wykresu funkcji kwadratowej do wyznaczenia wzoru tej funkcji w postaci iloczynowej.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Znajdowanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują 3 zadania z rozwiązaniami dotyczące wyznaczenia wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu, z wykorzystaniem postaci wzoru funkcji kwadratowej: ogólnej, iloczynowej i kanonicznej.
- Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Animacja” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w zakresie znajdowania wzoru funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu.
- Animacja może być pomocna na zajęciach poświęconych różnym postaciom wzoru funkcji kwadratowej.