Przykłady. Część II

Obliczanie długości odcinków i pola trójkąta z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych. Wyprowadzenie wzoru na pole trójkąta. Zależność pomiędzy długościami odcinków, które wyznacza wysokość na przeciwprostokątnej - dowód.
Ilustracja - wzór na długość przekątnej kwadratu.

Przykłady. Część II

Sinus kąta można rozważać także dla kąta prostego oraz rozwartego. Wówczas

$$\sin 90^\circ = 1$$

i jeżeli α
jest kątem ostrym, to

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Z powyższych równości i z wcześniejszych przykładów wynika, że pole dowolnego trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między nimi.

Twierdzenie: 4

Pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch jego boków i sinusa kąta zawartego między tymi bokami.
Przy oznaczeniach takich jak na rysunku

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin\gamma.$$

Przykład 1

W trójkącie ABC
dane są długości boków: $|BC| = 6$
, $|AC| = 4$
. Kąt ACB
ma miarę 120°
. Na boku AB
leży taki punkt D
, że $|\measuredangle ACD| = 60^\circ$
. Obliczymy długość odcinka CD
.
Zauważmy, że pole trójkąta ABC
jest równe sumie pól trójkątów ADC
i BDC
.
Ponadto

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = 6\sqrt{3}.$$

Oznaczmy $|CD| = x$
. Wtedy pola trójkątów ADC
i BDC
możemy zapisać za pomocą x
.

$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}x$$

$$P_{BDC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} x.$$

Otrzymujemy równanie

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}x = 6\sqrt{3},$$

skąd

$$x = \frac{12}{5}.$$

Zatem

$$|CD| = 2{,}4.$$

Przykład 2

W trójkącie prostokątnym ABC
kąt przy wierzchołku C
jest prosty, a punkt D
jest spodkiem wysokości poprowadzonej na przeciwprostokątną z wierzchołka C
. Wykażemy, że

$$|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|.$$

Oznaczmy przez α
miarę kąta BAC
.

Wówczas w trójkącie ABC

$$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|},$$

a w trójkącie ACD

$$\cos\alpha = \frac{|AD|}{|AC|}.$$

Stąd

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|},$$

czyli

$$|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|.$$

W ten sposób dowód został zakończony.

Przykład 3

W trójkącie prostokątnym ABC
przyprostokątne mają długości $|BC| = 14{,}8$
i $|AC| = 11{,}1$
. Kwadrat $DEFG$
jest wpisany w trójkąt ABC
tak, że bok DE
leży na przeciwprostokątnej AB
, a wierzchołki F

i G
leżą na przyprostokątnych odpowiednio BC
i AC
. Obliczymy długość boku tego kwadratu.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ABC
obliczamy długość boku AB
.

$$|AB|^2 = (11{,}1)^2 + (14{,}8)^2$$

$$|AB|^2 = 342{,}25$$

Ponieważ $|AB| > 0$
, to

$$|AB| = 18{,}5.$$

Oznaczmy przez x
długość boku kwadratu $DEFG$
, a przez α
miarę kąta BAC
.
Stąd

$$|\measuredangle CGF| = \alpha, |\measuredangle EFB| = \alpha.$$

Każdy z trójkątów prostokątnych ADG
, GCF
oraz FEB
jest zatem podobny do trójkąta ABC
. Wobec tego stosunki długości boków w tych trójkątach możemy wyrazić za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta α
.
W trójkącie ABC

$$\sin\alpha = \frac{14{,}8}{18{,}5} = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{11{,}1}{18{,}5} = \frac{3}{5}.$$

W trójkącie ADG

$$\sin\alpha = \frac{x}{|AG|},$$

a w trójkącie CGF

$$\cos\alpha = \frac{|CG|}{x}.$$

Wynika z tego, że

$$\frac{x}{|AG|} = \frac{4}{5}, \frac{|CG|}{x} = \frac{3}{5},$$

skąd

$$|AG| = \frac{5}{4}x, |CG| = \frac{3}{5}x.$$

Ale $|AG| + |CG| = |AC|$

, więc $\frac{5}{4}x + \frac{3}{5}x = \frac{111}{10}$

, a zatem $\frac{37}{20}x = \frac{111}{10}$

, czyli $x = 6$

.

Zatem długość boku kwadratu $DEFG$ jest równa 6

.