



Asymptota pozioma wykresu funkcji

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Asymptota pozioma wykresu funkcji

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Prawo powszechnego ciążenia podane przez Isaaca Newtona (1643 - 1727) dotyczy istnienia sił przyciągających między wszystkimi obiektami materialnymi. Dla dwóch ciał o masach M i m zapisujemy je w postaci wzoru $F = G \frac{Mm}{r^2}$, gdzie: F – siła przyciągania grawitacyjnego, G – stała grawitacji, M, m masy oddziałujących ze sobą ciał, a r – odległość między środkami ciał. Wykres funkcji $F(r) = G \frac{Mm}{r^2}$ ma asymptotę poziomą prawostronną o równaniu $F = 0$.

Twoje cele

- Poznasz definicję asymptoty poziomej wykresu funkcji.
- Wyznaczysz równania asymptot poziomych wykresu.
- Wykorzystasz poznane definicje i twierdzenia do rozwiązania zadań.

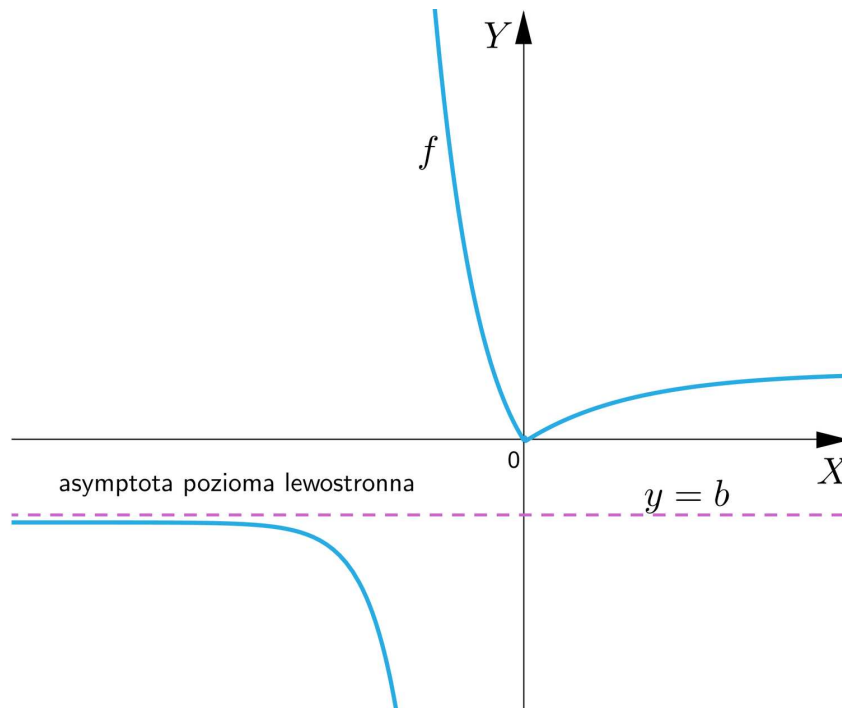
Przeczytaj

Szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej jest asymptota pozioma. Jeżeli współczynnik kierunkowy a asymptoty ukośnej wynosi zero, to asymptotę ukośną $y = b$ nazywamy wówczas asymptotą poziomą.

Definicja: Asymptota pozioma lewostronna wykresu funkcji

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(-\infty, c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą lewostronną wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - b) = 0.$$



Z definicji asymptoty poziomej lewostronnej wynika, że wykres funkcji dla argumentów zmierzających do $(-\infty)$, coraz bardziej zbliża się do asymptoty.

Korzystając z definicji asymptoty ukośnej lewostronnej wykresu funkcji możemy zapisać:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

W naszym przypadku $a = 0$, zatem:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (0 \cdot x + b)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - b) = 0.$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow -\infty} b = b$, to korzystając z twierdzenia o granicy różnicy dwóch granic (z których każda ma granicę właściwą) otrzymujemy:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - b) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - b = 0.$$

Mamy zatem:

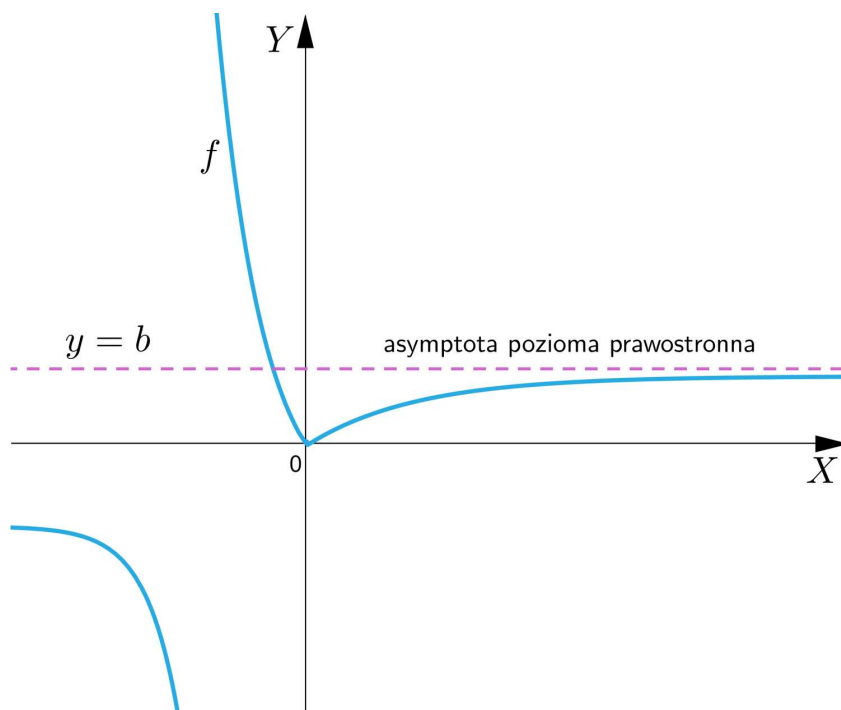
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Prosta $y = b$ jest asymptotą lewostronną poziomą funkcji $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i granica ta jest właściwa.

Definicja: Asymptota pozioma prawostronna wykresu funkcji

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(c, +\infty)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$. Prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą prawostronną wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - b) = 0.$$



Z definicji asymptoty poziomej prawostronnej wynika, że wykres funkcji dla argumentów zmierzających do $+\infty$, coraz bardziej zbliża się do asymptoty.

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - b) = 0$, a $\lim_{x \rightarrow +\infty} b = b$, to korzystając z twierdzenia o granicy różnicy dwóch granic (z których każda ma granicę właściwą) otrzymujemy:

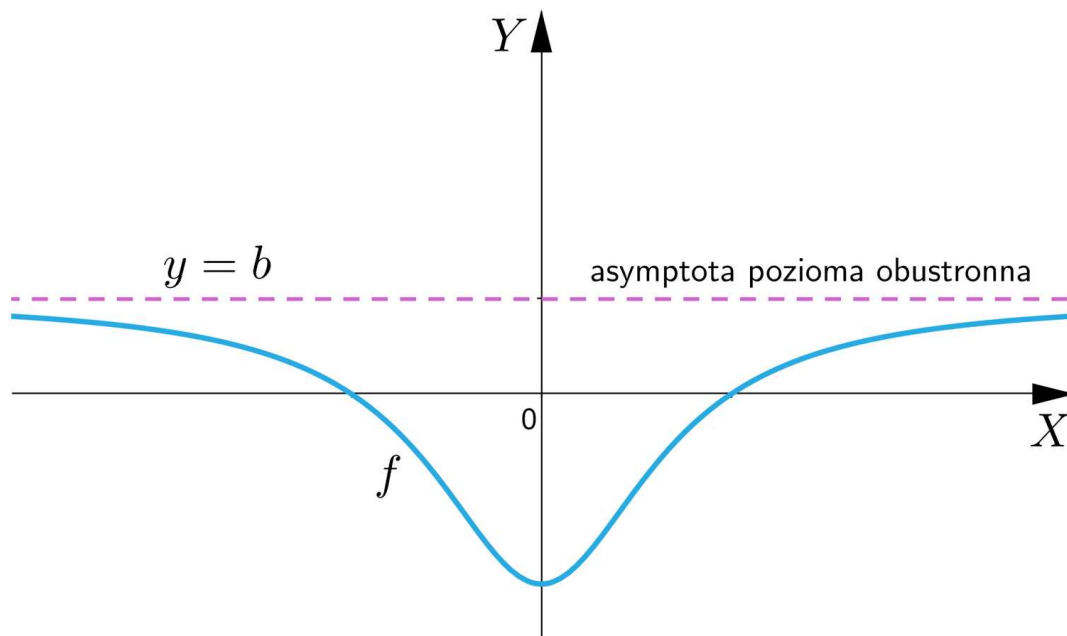
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - b = 0.$$

Mamy zatem:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Prosta $y = b$ jest asymptotą prawostronną poziomą funkcji $f(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i granica ta jest właściwa.

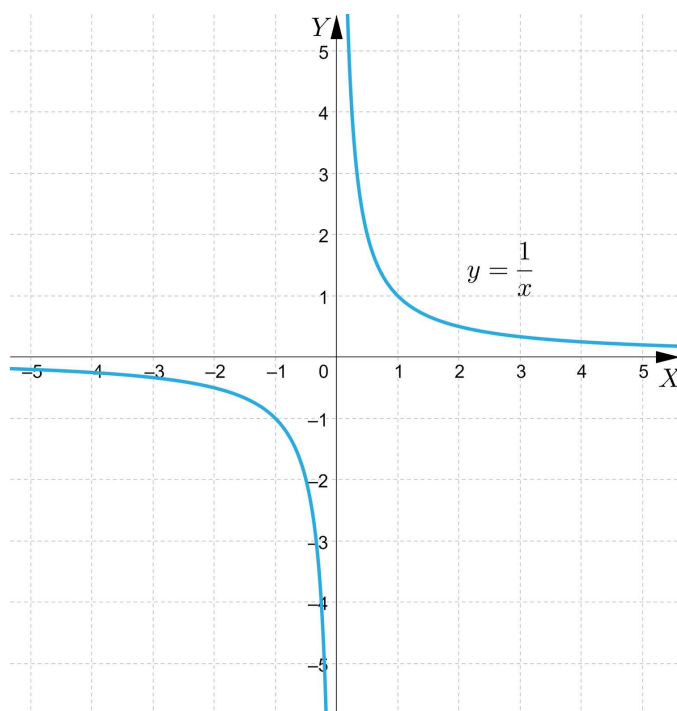
Jeżeli prosta $y = b$ jest jednocześnie asymptotą poziomą prawostronną i lewostronną, to nazywamy ją asymptotą poziomą obustronną wykresu funkcji $f(x)$.



Które z podstawowych funkcji mają asymptoty poziome?

Przykład 1

Rozważmy hiperbolę będącą wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

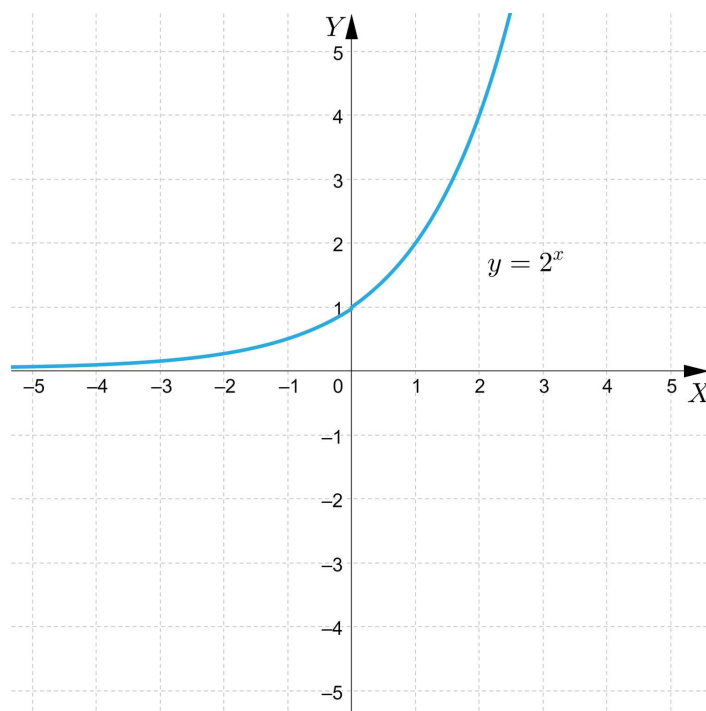


Prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu funkcji f .

Równanie asymptoty odczytaliśmy z rysunku. Skorzystajmy jeszcze z definicji asymptoty poziomej i obliczmy granice: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

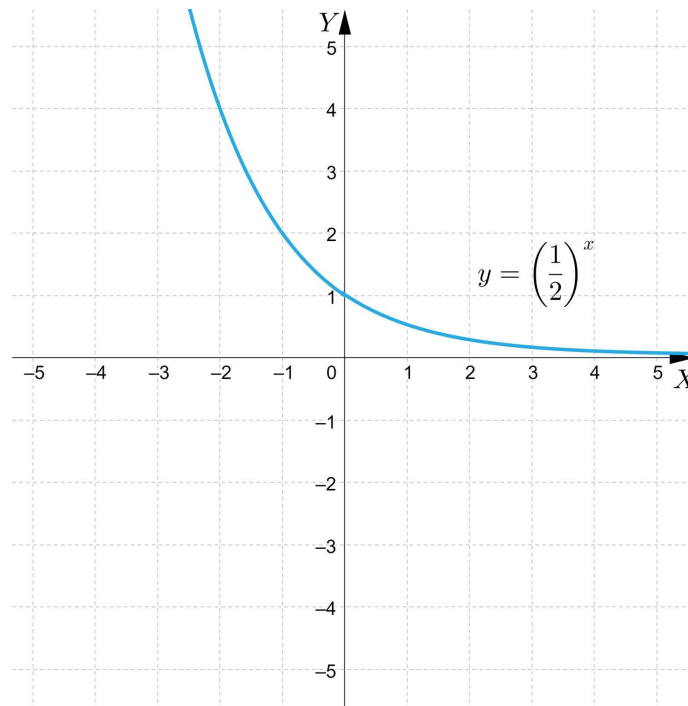
Przykład 2

Rozważmy funkcję wykładniczą $f(x) = 2^x$.



Z rysunku widzimy, że prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą lewostronną wykresu funkcji f , ale nie jest asymptotą prawostronną.

Przyjrzyjmy się teraz wykresowi funkcji $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



Tym razem prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą prawostronną wykresu funkcji g , ale nie jest asymptotą lewostronną.

Przykład 3

Wyznamy równania asymptot poziomych wykresu funkcji $y = \frac{3x^2}{x^2-4}$.

Rozwiązanie

Funkcja jest określona, gdy $x^2 - 4 \neq 0$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, ponieważ rozwiązaniem równania $x^2 - 4 = 0$, są liczby (-2) i 2 .

Prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą lewostronną wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ i granica ta jest właściwa.

Obliczamy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{3}{(1-0)} = 3.$$

Równaniem asymptoty poziomej lewostronnej jest zatem $y = 3$.

Analogicznie szukamy równania [asymptoty poziomej prawostronnej](#).

Obliczamy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{3}{(1-0)} = 3.$$

Równanie asymptoty poziomej prawostronnej ma zatem postać $y = 3$.

Prosta o równaniu $y = 3$ jest asymptotą poziomą obustronną.

Możemy ten przykład rozwiązać korzystając z poniższej własności.

Własność: asymptota pozioma wykresu funkcji

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ daje się przedstawić w postaci $y = b + g(x)$, przy czym spełniony jest warunek $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$, to prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą lewostronną funkcji $y = f(x)$.

Przekształćmy więc wzór: $y = \frac{3x^2}{x^2-4} = \frac{3x^2-12+12}{x^2-4} = \frac{3(x^2-4)+12}{x^2-4} = 3 + \frac{12}{x^2-4}.$

Funkcję $y = \frac{3x^2}{x^2-4}$ możemy zatem zapisać w postaci $y = b + g(x)$, czyli $y = 3 + \frac{12}{x^2-4}.$

Ponieważ $g(x) = \frac{12}{x^2-4}$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^2-4} = 0$, więc prosta $y = 3$ jest asymptotą poziomą prawostronną wykresu funkcji $y = \frac{3x^2}{x^2-4}.$

Podobnie pokazujemy, że prosta $y = 3$ jest **asymptotą poziomą lewostronną**.

Prosta $y = 3$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu funkcji $y = \frac{3x^2}{x^2-4}.$

Przykład 4

Wyznamy równania asymptot wykresu funkcji $y = \frac{2|x|-1}{x-1}.$

Rozwiązanie

Funkcja jest określona dla $x \neq 1$, zatem $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej możemy zapisać:

$$y = \frac{2|x|-1}{x-1} = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{dla } x \geq 0 \\ \frac{-2x-1}{x-1} & \text{dla } x < 0 \end{cases}.$$

Ponieważ funkcja jest nieokreślona dla $x = 1$, obliczamy następujące granice:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2|x|-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x-1} = \left[\frac{2-1}{0^-} \right] = -\infty \text{ oraz } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2|x|-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = \left[\frac{2-1}{0^+} \right] = +\infty,$$

więc prosta $x = 1$ jest asymptotą pionową obustronną wykresu funkcji $y = \frac{2|x|-1}{x-1}.$

Obliczając granice w nieskończoności, podamy równania asymptot poziomych.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x|-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Prosta $y = -2$ jest asymptotą poziomą lewostronną wykresu funkcji $y = \frac{2|x|-1}{x-1}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2|x|-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą prawostronną wykresu funkcji $y = \frac{2|x|-1}{x-1}$.

Wykres funkcji $y = \frac{2|x|-1}{x-1}$ ma następujące asymptoty:

pionową obustronną $x = 1$, poziomą lewostronną $y = -2$ oraz poziomą prawostronną $y = 2$.

Przykład 5

Zbadamy, dla jakiej wartości parametru p prosta $y = -2$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu funkcji:

$$f(x) = \frac{-4x^3 - 2x^2 + 1}{px^3 + x^2}.$$

Dla jakiej wartości parametru p wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej?

Rozwiązanie

Aby znaleźć równanie asymptoty poziomej prawostronnej funkcji f obliczymy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^3 - 2x^2 + 1}{px^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(-4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(p + \frac{1}{x} \right)}.$$

Zatem prosta $y = \frac{-4}{p}$ jest asymptotą poziomą prawostronną wykresu funkcji f .

Analogicznie można pokazać, że jest również granicą lewostronną.

Skoro prosta $y = -2$ ma być asymptotą obustronną wykresu funkcji f , to $p = 2$.

Zauważmy jeszcze, że gdy $p = 0$, to wykres funkcji f nie ma asymptot poziomych.

Słownik

asymptota pozioma lewostronna

prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą lewostronną wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli granica różnicy wartości funkcji $f(x)$ i funkcji liniowej $y = b$ w minus nieskończoności jest równa zero

asymptota pozioma prawostronna

prosta $y = b$ jest asymptotą poziomą prawostronną wykresu funkcji $y = f(x)$, jeżeli granica różnicy wartości funkcji $f(x)$ i funkcji liniowej $y = b$ w plus nieskończoności jest równa zero

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem prezentującym metody obliczania równań asymptot poziomych wykresu funkcji, a następnie rozwiąż zadania.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1Bh1RHdT>

Film nawiązujący do treści dotyczącej asymptot poziomych.

Polecenie 2

Zbadaj istnienie asymptot poziomych wykresu funkcji $y = \frac{x^2}{x^3+27}$.

Polecenie 3

Zapisując funkcję $y = \frac{7x-8}{x-6}$ w postaci $y = b + g(x)$ podaj równanie asymptoty poziomej wykresu tej funkcji.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{3x^2}{3x^2-1}$. Asymptotą poziomą wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu:

☐ $y = 3.$

☐ $y = 1.$

☐ nie ma asymptoty poziomej.

☐ $y = -1.$

Ćwiczenie 2



Do wzoru funkcji dobierz równanie asymptoty poziomej obustronnej jej wykresu.

$k(x) = \frac{5x^2+8}{3x^2+3}$

$y = 2,5$

$g(x) = \frac{5x^2-1}{2x^2+2}$

$y = 0,6$

$f(x) = \frac{2x^2-13}{5x^2+5}$

$y = 0,4$

$h(x) = \frac{3x^2+18}{5x^2+5}$

$y = 1\frac{2}{3}$

Ćwiczenie 3



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{5x-9}{x-3}$. Wybierz zdania prawdziwe.

- ☐ Wzór tej funkcji można zapisać w postaci $f(x) = \frac{6}{x-3} + 5$.
- ☐ Prosta o równaniu $y = 3$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu tej funkcji.
- ☐ Wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej.
- ☐ Prosta o równaniu $y = 5$ jest asymptotą poziomą wykresu tej funkcji.

Ćwiczenie 4



W puste miejsce wstaw odpowiednie liczby całkowite.

- 1) Prosta o równaniu $y = \boxed{}$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{3-x}{x+2}$.
- 2) Prosta o równaniu $y = \boxed{}$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{1-2x}{x+2}$.
- 3) Prosta o równaniu $y = \boxed{}$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu funkcji $f(x) = \frac{x+7}{x+2}$.

Ćwiczenie 5



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{5x^2}{3x^3-24}$. Wybierz zdanie prawdziwe.

- ☐ Asymptotą poziomą obustronną wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $y = -1$.
- ☐ Asymptotą poziomą obustronną wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $y = 0$.
- ☐ Asymptotą poziomą obustronną wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $y = 1$.
- ☐ Asymptotą poziomą obustronną wykresu tej funkcji jest prosta o równaniu $y = 2$.

Ćwiczenie 6



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{3|x|+5}{2x-1}$. Oceń prawdziwość poniższych zdań.

	Prawda	Fałsz
Prosta o równaniu $y = \frac{3}{2}$ jest asymptotą poziomą prawostronną wykresu tej funkcji.	☐	☐
Prosta o równaniu $y = -\frac{3}{2}$ jest asymptotą poziomą lewostronną wykresu tej funkcji.	☐	☐
Prosta o równaniu $y = \frac{3}{2}$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu tej funkcji.	☐	☐

Ćwiczenie 7



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \sqrt{\frac{9x-3}{x-1}}$. Wybierz zdanie prawdziwe.

- ☐ Prosta o równaniu $y = -1$ jest asymptotą poziomą wykresu tej funkcji.
- ☐ Prosta o równaniu $y = 3$ jest asymptotą poziomą wykresu tej funkcji.
- ☐ Prosta o równaniu $y = 9$ jest asymptotą poziomą wykresu tej funkcji.
- ☐ Wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej.

Ćwiczenie 8



Dana jest funkcja opisana wzorem $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x+5}$. Wybierz zdania prawdziwe.

- ☐ Prosta o równaniu $y = -2$ jest asymptotą poziomą lewostronną wykresu tej funkcji.
- ☐ Wykres funkcji f nie ma asymptoty poziomej.
- ☐ Prosta o równaniu $y = 2$ jest asymptotą poziomą prawostronną wykresu tej funkcji.
- ☐ Prosta o równaniu $y = 2$ jest asymptotą poziomą obustronną wykresu tej funkcji.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Asymptota pozioma wykresu funkcji.

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony.

Podstawa programowa:

Zakres rozszerzony:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wie, że asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej,
- zna definicje asymptoty poziomej lewostronnej, prawostronnej wykresu funkcji,
- zna twierdzenia umożliwiające wyliczenie równania asymptoty poziomej wykresu funkcji,
- podaje równania asymptoty poziomej lewostronnej, prawostronnej i obustronnej wykresu funkcji,
- oblicza granice funkcji w nieskończoności korzystając z poznanych własności o granicach,
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania,
- przedstawia pełny tok rozwiązania zadania wraz z uzasadnieniem.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- wykład informacyjny,
- burza mózgów,
- pokaz multimedialny.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do internetu,
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny,
- e-podręcznik.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

- uczniowie przypominają definicję asymptoty ukośnej wykresu funkcji,
- uczniowie podają metody wyznaczania granicy funkcji w nieskończoności,
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

- nauczyciel podaje, że asymptota pozioma jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej,
- uczniowie metodą burzy mózgów podają definicję asymptoty poziomej oraz metodę obliczenia równania asymptoty poziomej,
- nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z wykresami ilustrującymi asymptoty poziome lewostronne, prawostronne i obustronne znajdujące się w sekcji Przeczytaj,
- uczniowie formułują wnioski i zapisują je w zeszycie,
- nauczyciel prezentuje film samouczek i omawia go z uczniami, następnie uczniowie samodzielnie rozwiązują zadania pod filmem,
- chętni uczniowie prezentują rozwiązania zadań na tablicy,
- nauczyciel prosi uczniów aby zapoznali się z przykładem 2 zawartym w sekcji Przeczytaj,
- na forum klasy uczniowie omawiają rozwiązanie przykładu 2, nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości uczniów,

- uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela,
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek i zwracając uwagę na staranność zapisów.

Faza podsumowująca:

- wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych,
- uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień,
- uczniowie sporządzają notatkę w zeszycie: definicje i twierdzenia o asymptocie poziomej wykresu funkcji,
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest wykonanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Wykres funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Materiały zawarte sekcji Film samouczek uczniowie mogą przeanalizować jako pracę własną przed lekcją.