Przesunięcie okręgu o wektor

Przesunięcie okręgu o wektor

Źródło: Dawid Zawiła, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

Umiejętność posługiwania się wektorami jest przydatna w codziennym życiu, choć ten, kto jej używa, nie zawsze uświadamia sobie, czym się posługuje.

Wyobraź sobie, że znajoma pyta Cię o drogę do miejsca, w którym byłeś zaledwie tydzień temu, znasz zatem trasę, a mapę masz w głowie. Bez większego zastanowienia kierujesz koleżankę $30\ \text{km}$ na zachód aż do miejsca X, a następnie $50\ \text{km}$ na południe aż do miejsca Y i na dodatek podajesz jej czas, jaki może jej to zająć. Posłużyłeś się zatem wektorami.

Źródło: Mihis Alex, dostępny w internecie: www.pexels.com, domena publiczna.

W tym materiale poznasz zasady przesunięcia okręgu o wektor w układzie współrzędnych.

Twoje cele

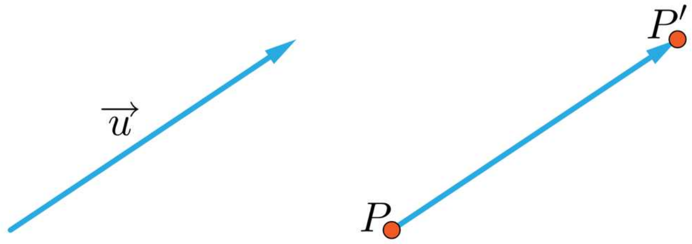
- Utrwalisz wiadomości dotyczące wektorów.
- Obliczysz współrzędne obrazów punktów po przesunięciu o wektor.

- Napiszesz równanie okręgu będącego obrazem danego okręgu w przesunięciu o wektor.
- Zastosujesz poznane wzory do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

Przypomnijmy, że przesunięciem (translacją) o wektor $\overrightarrow{u}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi P płaszczyzny (przestrzeni) takiego punktu P', że:

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{u}.$$

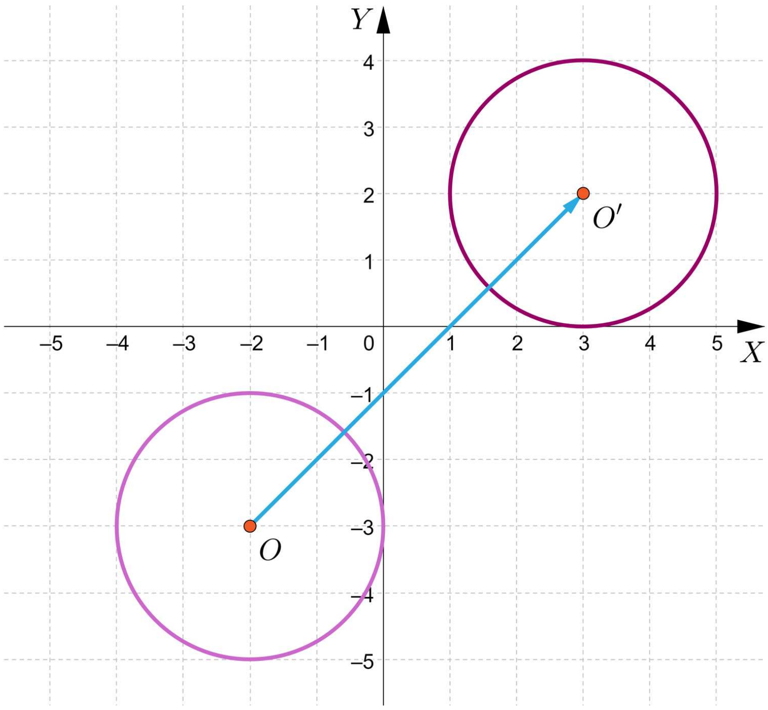


Aby określić równanie obrazu okręgu w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{u} = [p,\ q]$ wykorzystamy związki między współrzędnymi punktu i jego obrazu w przesunięciu o ten wektor.

Jeśli $\overrightarrow{u} = [p,\ q]$ to obrazem punktu $P = (x,\ y)$ jest taki punkt $P' = (x',\ y')$, że $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{u}$, więc

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}.$$

Napiszemy teraz równanie obrazu K' okręgu K o równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{u} = [p,\ q]$.



Ponieważ przesunięcie o wektor jest izometrią, to obrazem okręgu jest okrąg o tym samym promieniu. Wykorzystamy związki między współrzędnymi punktu i jego obrazu w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{u} = [p,\ q]$:

$$\begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$$

i podstawimy je do równania okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Otrzymamy równanie jego obrazu w postaci $(x' - p - a)^2 + (y' - q - b)^2 = r^2$.

Zapisując to równanie w postaci: $(x' - (p+a))^2 + (y' - (q+b))^2 = r^2$, możemy wyciągnąć następujący wniosek:

Obrazem okręgu o równaniu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ **w przesunięciu o wektor** $\overrightarrow{u} = [p,\ q]$ **jest okrąg o równaniu**

$$(x - (p+a))^2 + (y - (q+b))^2 = r^2.$$

Środek tego okręgu ma współrzędne: $O' = (p+a,\ q+b)$.

Przykład 1

Wyznaczymy równania obrazów okręgów o równaniach

a) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$,

b) $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 15 = 0$,

w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{u} = [2,\ 3]$.

Rozwiązanie:

Ad a)

Okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$ ma środek w punkcie $(3,\ \ -2)$ i promień długości $r = 6$.

Obraz środka tego okręgu jest punktem, którego współrzędne są równe:

$a' = 3 + 2 = 5$ oraz $b' = -2 + 3 = 1$.

Zatem równanie obrazu okręgu ma postać: $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 36$.

Ad b)

Aby wyznaczyć równanie obrazu okręgu $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 15 = 0$, określimy współrzędne środka tego okręgu.

W tym celu przekształcamy jego równanie następująco:

$x^2 - 12x + 36 - 36 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 15 = 0$

$(x-6)^2 + (y+2)^2 = 25$.

Okrąg o równaniu $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 25$ ma środek w punkcie $(6,\ \ -2)$ i promień długości $r = 5$.

Obraz środka tego okręgu jest punktem o współrzędnych

$a' = 6 + 2 = 8$ oraz $b' = -2 + 3 = 1$.

Równanie obrazu okręgu ma postać: $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Przykład 2

Okrąg o równaniu $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 100$ przesunięto o wektor $\overrightarrow{u} = [12,\ q]$.

Wyznaczymy wartość q, dla której okrąg i jego obraz są styczne zewnętrznie.

Rozwiązanie:

Okrąg o równaniu $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 100$ ma środek w punkcie $O = (1,\ 3)$ i promień długości $r = 10$.

Obraz tego okręgu ma równanie $(x-a')^2 + (y-b')^2 = 100$.

Współrzędne środka O' okręgu będącego obrazem okręgu o środku $O = (1,\ 3)$ obliczymy w oparciu o wzory $a' = a + p$ i $b' = b + q$, czyli dla $a = 1$, $b = 3$ i $\overrightarrow{u} = [12,\ q]$ otrzymujemy

$a' = 1 + 12 = 13$ i $b' = 3 + q$.

Odległość między środkami okręgów K i K' jest równa długości wektora $\overrightarrow{u}$.

Jeżeli $\overrightarrow{u} = [p,\ q]$ to długość wektora wyraża wzór: $\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Ponieważ $\overrightarrow{u} = [12,\ q]$ to jego długość możemy zapisać następująco: $\left|\overrightarrow{u}\right| = \sqrt{12^2 + q^2}$.

Długość wektora $\overrightarrow{u}$ jest odległością między środkami obu okręgów: $\left|\overrightarrow{u}\right| = |OO'|$, więc $|OO'| = \sqrt{12^2 + q^2}$.

Okręgi są styczne zewnętrznie, gdy odległość między ich środkami jest równa sumie długości ich promieni.

$|OO'| = r_1 + r_2$, stąd $|OO'| = 20$.

Otrzymujemy równanie: $\sqrt{144 + q^2} = 20$.

Podnosimy obie strony tego równania do kwadratu: $144 + q^2 = 400$, stąd:
$q^2 = 400 - 144 = 256$.

Rozwiązaniami równania $q^2 = 256$ są liczby $q_1 = 16$ lub $q_2 = -16$.

Okrąg i jego obraz są styczne zewnętrznie, gdy $q = 16$ lub $q = -16$.

Przykład 3

Okrąg K' jest obrazem okręgu K o równaniu $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 25$ w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{u} = [-7,\ 1]$. Napiszemy równania stycznych do okręgu K poprowadzonych ze środka okręgu K'.

Rozwiązanie:

Okrąg K o równaniu $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 25$ ma środek w punkcie $O = (8,\ 1)$ i promień długości $r = 5$.

Okrąg K' o równaniu $(x - a')^2 + (y - b')^2 = 25$ ma środek $O' = (a',\ b')$ i promień długości $r = 5$.

Obliczamy współrzędne środka okręgu K': $a' = 8 + (-7) = 1$ i $b' = 1 + 1 = 2$.

Zatem $O' = (1,\ 2)$.

Wykorzystamy wzór $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ na odległość punktu $(x_0,\ y_0)$ od prostej $Ax+By+C=0$.

Zapiszemy równania stycznych w postaci $y=mx+n$.

Styczne te przechodzą przez punkt O' $=(1,\ 2)$, ich równania są więc postaci $y-2=m(x-1)$.

Aby skorzystać ze wzoru na odległość punktu od prostej równanie $y-2=m(x-1)$ zapisujemy w postaci $mx-y+2-m=0$.

Ze wzoru na odległość punktu od prostej obliczamy odległość środka okręgu $O=(8,\ 1)$ od prostej o równaniu $mx-y+2-m=0$ i otrzymujemy:

$d=\frac{|m\cdot 8+(-1)\cdot 1+2-m|}{\sqrt{m^2+1^2}}=\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$.

Z warunku styczności okręgu i prostej: $d=r$ wynika, że $\frac{|7m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=5$.

Ponieważ dla każdego $m\in\mathbb{R}$: $\sqrt{m^2+1}\neq 0$ to równanie możemy pomnożyć stronami przez $\sqrt{m^2+1}$.

Otrzymujemy równanie $|7m+1|=5\sqrt{m^2+1}$.

Podnosimy obie strony równania do kwadratu:

$(|7m+1|)^2=25\left(m^2+1\right)$

czyli

$49m^2+14m+1=25m^2+25$.

Ostatecznie otrzymujemy równanie kwadratowe postaci: $12m^2+7m-12=0$.

Wyróżnik trójmianu kwadratowego wynosi: $\Delta=49-4\cdot 12\cdot(-12)=625$, stąd $\sqrt{\Delta}=25$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby:

$m_1=\frac{-7-25}{2\cdot 12}=\frac{-32}{24}=-\frac{4}{3}$ lub $m_2=\frac{-7+25}{2\cdot 12}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$.

Po podstawieniu ich do równania $mx-y+2-m=0$ otrzymujemy równania prostych

$-\frac{4}{3}x-y+2-\left(-\frac{4}{3}\right)=0$, czyli $-4x-3y+10=0$

oraz

$\frac{3}{4}x-y+2-\frac{3}{4}=0$ czyli $3x-4y+5=0$.

Odpowiedź:

Styczne do okręgu K poprowadzone ze środka okręgu K' mają równania:
$-4x - 3y + 10 = 0$ lub $3x - 4y + 5 = 0$.

Słownik

przesunięcie (translacja) o wektor

przesunięcie o wektor $\overrightarrow{u}$ to przyporządkowanie każdemu punktowi P płaszczyzny (przestrzeni) takiego punktu P', że $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{u}$

izometria

przekształcenie płaszczyzny, które zachowuje odległości między punktami

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją dotyczącą wyznaczania równania obrazu okręgu w przesunięciu o wektor a następnie rozwiąż polecenia.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DXgXyhb5K

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej przesunięcia okręgu o wektor.

Polecenie 2

Wyznacz współrzędne wektora, o który należy przesunąć okrąg o równaniu $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$, aby otrzymać okrąg o równaniu $(x+4)^2 + (y+5)^2 = 25$.

Polecenie 3

Okrąg K' jest obrazem okręgu K o równaniu $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ w przesunięciu o wektor $\overrightarrow{u} = [6,\ 8]$. Określ wzajemne położenie okręgu oraz jego obrazu.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.
Obrazem okręgu o równaniu $x^2 + (y-2)^2 = 1$ w przesunięciu o wektor $[5,\ 1]$ jest okrąg o równaniu:

- $(x+5)^2 + (y+3)^2 = 1$
- $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 1$
- $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$
- $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 1$

Ćwiczenie 2

Połącz w pary równanie okręgu K_1 z równaniem okręgu K_2 tak, aby okrąg K_2 był obrazem okręgu K_1 w przesunięciu o wektor $[-1,\ 3]$.

$K_1:\ (x-3)^2 + (y+2)^2 = 15$	$K_2:\ (x-1)^2 + y^2 = 15$
$K_1:\ (x-2)^2 + (y+3)^2 = 15$	$K_2:\ (x+3)^2 + (y-6)^2 = 15$
$K_1:\ (x+3)^2 + (y-2)^2 = 15$	$K_2:\ (x+4)^2 + (y-5)^2 = 15$
$K_1:\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 15$	$K_2:\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 15$

Ćwiczenie 3

Przeciągnij poprawną odpowiedź w puste pole.

Okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 50 = 0$ należy przesunąć o wektor ______, aby otrzymać okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 24 = 0$.

$[14, \ -6]$ $[-3, \ 7]$ $[6, \ -14]$ $[3, \ -7]$

Ćwiczenie 4

Dany jest okrąg K_1 o równaniu $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$. Określ liczbę punktów wspólnych okręgu K_1 i jego obrazu w przesunięciu o podany wektor. Wpisz poprawne liczby w puste pola.

1. Liczba punktów wspólnych okręgu K_1 i jego obrazu w przesunięciu o wektor $[-3, \ 4]$ wynosi ______.
2. Liczba punktów wspólnych okręgu K_1 i jego obrazu w przesunięciu o wektor $[4, \ -4]$ wynosi ______.
3. Liczba punktów wspólnych okręgu K_1 i jego obrazu w przesunięciu o wektor $\left[-5, \ \sqrt{3}\right]$ wynosi ______.

Ćwiczenie 5

Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.
Okrąg o równaniu $K_1 : \ (x-2)^2 + (y-5)^2 = 625$ przesunięto o wektor o współrzędnych $[-14, \ q]$. Okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie do swojego obrazu tylko wtedy, gdy:

- $q = -48$
- $q = 24$ lub $q = -24$
- $q = 24$
- $q = -48$ lub $q = 48$

Ćwiczenie 6

Okrąg o równaniu $K_1 : \ x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$ przesunięto o wektor o współrzędnych $[p, \ 6]$.
Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Jeśli $p = -9$, to okrąg K_1 ma dwa punkty wspólne ze swoim obrazem.
- [ ] Okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie do swojego obrazu, gdy $p = 8$ lub $p = -8$.
- [ ] Jeśli okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie do swojego obrazu, to odległość między środkami tych okręgów wynosi $4\sqrt{2}$.
- [ ] Jeśli okrąg K_1 jest styczny zewnętrznie do swojego obrazu, to odległość między środkami tych okręgów wynosi 10.

Ćwiczenie 7

Obrazem okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 6px - 3 = 0$ w przesunięciu o pewien wektor jest okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 8py + 4 = 0$.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

	Prawda	**Fałsz**
Wektor ten może mieć współrzędne $[-1, \ 4]$.	○	○
Wektor ten może mieć współrzędne $[1, \ -4]$.	○	○
Wektor ten może mieć współrzędne $[3, \ 4]$.	○	○
Wektor ten może mieć współrzędne $[-3, \ -4]$.	○	○

Ćwiczenie 8

Obrazem okręgu K_1 o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ w przesunięciu o wektor $[-4,\ 8]$ jest okrąg K_2.
Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Równanie stycznej do okręgu K_1 poprowadzonej ze środka okręgu K_2 może mieć postać $y = -3$.
- [ ] Równanie stycznej do okręgu K_1 poprowadzonej ze środka okręgu K_2 może mieć postać $y = \frac{4}{3}x + 2,75$.
- [ ] Równanie stycznej do okręgu K_1 poprowadzonej ze środka okręgu K_2 może mieć postać $y = -\frac{3}{4}x + 2,75$.
- [ ] Równanie stycznej do okręgu K_1 poprowadzonej ze środka okręgu K_2 może mieć postać $x = -3$.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przesunięcie okręgu o wektor

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu;

3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;

4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2 + (x-b)^2 = r^2$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;

2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;

3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- posługuje się pojęciem wektora
- oblicza współrzędne wektora
- zna definicję przesunięcia o wektor
- podaje związki między współrzędnymi punktu i jego obrazu w przesunięciu o wektor
- podaje równanie obrazu okręgu w przesunięciu o wektor
- planuje czynności mające doprowadzić do wyznaczenia równania okręgu będącego obrazem okręgu o danym równaniu
- potrafi określić wzajemne położenie dwóch okręgów
- stosuje warunki na styczność okręgu z prostą i styczność dwóch okręgów
- kształci umiejętność stosowania metod geometrii analitycznej
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania posługując się poznanymi twierdzeniami i definicjami
- kształci umiejętność stosowania metod geometrii analitycznej
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania posługując się poznanymi twierdzeniami i definicjami
- analizuje zadania oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- metoda odwróconej klasy
- pokaz multimedialny
- burza mózgów

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu
- projektor multimedialny
- e–podręcznik
- arkusze papieru, pisaki

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

aaa

Faza wstępna:

1. Uczniowie podają związki między współrzędnymi punktu i jego obrazu w przesunięciu o wektor.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 3–osobowe grupy.
2. Każda z grup otrzymuje zadanie polegające na analizie materiału zawartego w sekcji „Przeczytaj”.
3. Uczniowie w grupach analizują przykłady zawarte w sekcji „Przeczytaj”.
4. Uczniowie na forum klasy podają metodę wyznaczenia równania obrazu okręgu po przesunięciu o wektor.
5. Uczniowie oglądają animację i omawiają go wraz z nauczycielem, następne samodzielnie rozwiązują zadania pod animacją.
6. Uczniowie rozwiązują ćwiczenia interaktywne wskazane przez nauczyciela.
7. Nauczyciel kontroluje pracę uczniów udzielając im wskazówek.

Faza podsumowująca:

1. Wybrani uczniowie prezentują rozwiązania ćwiczeń interaktywnych wskazanych przez nauczyciela.
2. Uczniowie określają co było dla nich trudne lub niezrozumiałe a nauczyciel udziela wyjaśnień.
3. Uczniowie formułują wnioski do zapamiętania.
4. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych, które nie zostały rozwiązane na lekcji.

Materiały pomocnicze:

- Pojęcie wektora
- Współrzędna wektora na osi liczbowej
- Przykłady
- Wzajemne położenie dwóch okręgów

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel może poprosić uczniów aby zapoznali się, przed lekcją, z animacją, umożliwi to wystąpienie na lekcji w roli ekspertów.