Zastosowania twierdzenia Darboux

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Źródło: Gerd Altmann from Pixabay, domena publiczna.

W tym materiale przedstawimy zastosowania twierdzenia Darboux. To bardzo użyteczne twierdzenie pozwala szybko sprawdzić, czy badana funkcja posiada miejsce zerowe w zadanym przedziale. Istotnym elementem jest właściwe zastosowanie tego twierdzenia poprzez sprawdzenie jego założeń. Może się bowiem okazać, że bezpośrednie zastosowanie twierdzenia nie jest możliwe i niezbędne jest wykorzystanie intuicji matematycznej do doboru parametrów.

Twoje cele

- Nauczysz się sprawdzać, czy podana funkcja ma miejsce zerowe w zadanym przedziale.
- Nauczysz się wyznaczać przybliżone miejsca zerowe funkcji.

Przeczytaj

Na wstępie zapoznamy się z twierdzeniem Darboux oraz przeanalizujemy je bardzo skrupulatnie.

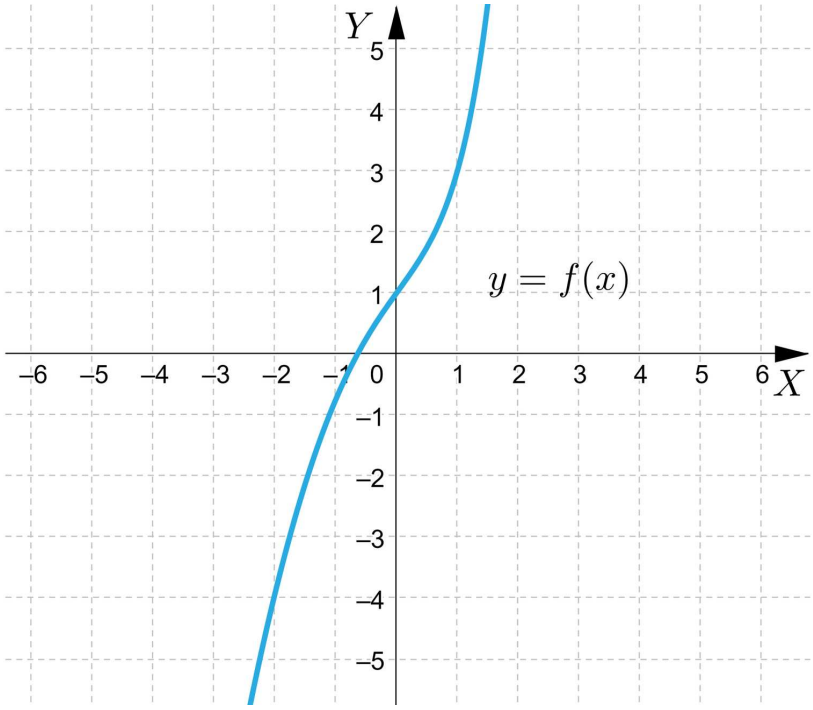
> **Twierdzenie: Darboux**
>
> Załóżmy, że dana jest funkcja ciągła na przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$, tzn. $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Jeżeli $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje punkt pośredni $c \in (a, b)$ taki, że $f(c) = 0$.

Przeanalizujemy powyższe twierdzenie krok po kroku.

1. Musimy sprawdzić, czy badana funkcja w zadanym przedziale jest ciągła.
2. Zapis $f(a) \cdot f(b) < 0$ oznacza, że na końcach przedziału wartości funkcji mają różne znaki. Nie musimy badać monotoniczności funkcji, bo nie ma to w tym przypadku znaczenia.
3. Istnienie punktu pośredniego $c \in (a, b)$ takiego, że $f(c) = 0$ oznacza, że badana funkcja ma miejsce zerowe należące do przedziału (a, b), jednak w wielu przypadkach możemy nie być w stanie wyznaczyć tej wartości w sposób analityczny.
4. Należy zauważyć, że teza twierdzenia jest implikacją, a to oznacza, że jeśli $f(a) \cdot f(b) > 0$, to nie możemy nic powiedzieć o istnieniu pierwiastka.

> **Przykład 1**
>
> Sprawdzimy czy równanie $4^x - x^2 = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle -1, 1\rangle$.
>
> **Rozwiązanie:**
>
> Zauważmy na początku, że w zadanym przedziale funkcja $f(x) = 4^x - x^2$ jest określona i ciągła, bowiem zarówno funkcja wykładnicza jak i wielomian są ciągłe, a zatem ich różnica również jest funkcją ciągłą.
>
> Ponadto:
>
> $f(-1) = 4^{-1} - (-1)^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$
>
> $f(1) = 4^1 - 1^2 = 4 - 1 = 3$
>
> Czyli $f(-1) \cdot f(1) < 0$. Zatem na mocy twierdzenia Darboux funkcja $f(x) = 4^x - x^2$ na przedziale $(-1, 1)$ ma miejsce zerowe.
>
> Rozwiązanie tego równania jest dość skomplikowane, na szczęście nie jest wymagane wskazanie dokładnego rozwiązania, a jedynie sprawdzenie, czy takie rozwiązanie istnieje.

Analizując wykres funkcji:



utwierdzamy się w przekonaniu o istnieniu rozwiązania równania

$4^x - x^2 = 0.$

Twierdzenie Darboux należy stosować w umiejętny sposób i w razie potrzeby odpowiednio modyfikować przedział, na którym szukamy rozwiązania.

Przykład 2

Zbadamy czy funkcja $f(x) = x^6 + 4x^4 - 20x^2 - 48$ ma pierwiastki należące do przedziału $\langle -3, 3\rangle$.

Rozwiązanie:

Badana funkcja jako wielomian jest ciągła na całym zbiorze liczb rzeczywistych, czyli w szczególności na przedziale $\langle -3, 3\rangle$.

Z drugiej strony

$f(-3) = 825 > 0$ oraz $f(3) = 825 > 0.$

Na podstawie twierdzenia Darboux nie można wyciągnąć jednoznacznych wniosków o istnieniu pierwiastków w przedziale $(-3, 3)$. Wystarczy jednak zauważyć, że $f(0) = -48 < 0$, zatem

$f(-3) \cdot f(0) < 0,$

czyli na przedziale $(-3, 0)$ funkcja ma miejsce zerowe oraz

$f(0) \cdot f(3) < 0,$

co oznacza, że również na przedziale $(0, 3)$ funkcja ma miejsce zerowe.

Reasumując, funkcja f ma co najmniej 2 pierwiastki należące do przedziału $(-3, 3)$.

Po zapisaniu funkcji w nieco innej postaci

$f(x) = \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 6\right)\left(x^2 + 2\right)$

okazuje się, że funkcja ma dokładnie 2 miejsca zerowe, które można łatwo wyznaczyć:

$f(x) = 0$, gdy $\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 6\right)\left(x^2 + 2\right) = 0$, skąd: $x = 2$ lub $x = -2$.

Twierdzenie Darboux jest podstawą metody równego podziału, inaczej zwanej bisekcją, która pozwala na poszukiwanie miejsc zerowych dowolnej funkcji ciągłej w przedziale $\langle a, b\rangle$, dla której $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dzięki algorytmowi znajdujemy przybliżone rozwiązanie ze z góry zadaną dokładnością – ustalamy $\varepsilon > 0$ i szukamy przybliżonego rozwiązania, które różni się od rozwiązania właściwego o co najwyżej $\varepsilon > 0$.

Algorytm bisekcji sprowadza się do następujących kroków:

1. Sprawdzamy, czy $x_1 = \frac{a+b}{2}$ jest pierwiastkiem, czyli $f(x_1) = 0$. Jeśli tak, to algorytm się kończy, a x_1 jest szukanym rozwiązaniem.
2. W przeciwnym razie, dopóki nie osiągamy zakładanej dokładności, czyli $|a - b| > \varepsilon$, to:
   a) jeśli $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, to przyjmujemy $a_1 = a$ oraz $b_1 = \frac{a+b}{2}$,
   b) jeśli $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f(b) < 0$, to przyjmujemy $a_1 = \frac{a+b}{2}$ oraz $b_1 = b$
3. Ponawiamy procedurę dla przedziału (a_1, b_1) otrzymując przedział (a_2, b_2)...
4. Po osiągnięciu zakładanej dokładności, jako rozwiązanie przyjmujemy $x_0 \approx \frac{a+b}{2}$.

Przykład 3

Wyznaczymy pierwiastek równania $x^5 - x + 1 = 0$ w przedziale $\langle -2, 2\rangle$ z dokładnością do $\frac{1}{16}$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $f(x) = x^5 - x + 1$, $f(-2) = -32 + 2 + 1 = -29 < 0$,
$f(2) = 32 - 2 + 1 = 31 > 0$, czyli w badanym przedziale jest pierwiastek. Zauważamy, że $x_1 = \frac{-2+2}{2} = 0$ i $f(0) = 1 > 0$. Stąd szukany pierwiastek należy do przedziału $(-2, 0)$. Zatem

$x_1 = \frac{-2+0}{2} = -1$, $f(-1) = -1 + 1 + 1 = 1 > 0$.

Skoro $f(0) \cdot f(-2) < -1$, to miejsce zerowe należy do przedziału $(-2, -1)$.

Postępując analogicznie w kolejnych krokach, otrzymujemy:

$x_1 = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2}, f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{243}{32} + \frac{3}{2} + 1 < 0 \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

$x_1 = \frac{-\frac{3}{2}-1}{2} = -\frac{5}{4}, f\left(-\frac{5}{4}\right) < 0 \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{5}{4}, -1\right)$

$x_1 = \frac{-\frac{5}{4}-1}{2} = -\frac{9}{8}, f\left(-\frac{9}{8}\right) > 0 \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

$x_1 = \frac{-\frac{5}{4}-\frac{9}{8}}{2} = -\frac{19}{16}, f\left(-\frac{19}{16}\right) < 0 \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{19}{16}, -\frac{9}{8}\right),$

ale $\left|-\frac{19}{16} + \frac{9}{8}\right| = \frac{1}{16}$, czyli jako rozwiązanie przyjmujemy środek przedziału i ostatecznie mamy:

$x_0 \approx \frac{-\frac{9}{8}-\frac{19}{16}}{2} = -\frac{37}{32}.$

Słownik

pierwiastek równania

pierwiastkiem równania nazywamy wszystkie liczby rzeczywiste spełniające analizowane równanie

funkcja ciągła na przedziale

funkcję $f(x)$ nazywamy ciągłą na przedziale (a, b) jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$, tzn. istnieje granica

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

i granica ta jest równa wartości funkcji w tym punkcie, czyli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami zaprezentowanymi w filmie i wykonaj polecenia znajdujące się poniżej.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DfIoK51ZZ

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zastosowania twierdzenia Darboux.

Polecenie 2

Wiadomo, że wykres ciągłej funkcji $f(x)$ przechodzi przez punkty $(-5,5)$; $(-2,-5)$; $(0,0)$; $(2,-6)$; $(5,6)$. Wyznaczyć ile co najmniej rozwiązań należących do przedziału $\langle -5,5\rangle$ mają równania:

a) $f(x)=\frac{\pi}{2}$

b) $f(x)=-\sqrt{3}$

Polecenie 3

Wykaż, że funkcja $f(x)=\frac{x^5+x^3+1}{x^2+2}$ ma co najmniej jeden pierwiastek należący do przedziału $(-2,2)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Zaznacz przedziały, w których funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

funkcja	$(-0,5;\ 2)$	$(-1;\ 1)$	$(-5;\ 5)$	$(1;\ 10)$
$f(x) = 2x + 3$	☐	☐	☐	☐
$f(x) = x^2 + 5x - 6$	☐	☐	☐	☐
$= x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{9}{8}$	☐	☐	☐	☐
$f(x) = \sin x$	☐	☐	☐	☐

Ćwiczenie 2

Wskaż przedziały, na których badana funkcja ma miejsca zerowe.

$f(x) = x^4 - 23\,x^2 + 18\,x + 40$
$A = \langle 0; 5\rangle\ B = \langle -2; 2\rangle\ C = \langle 0; 10\rangle\ D = \langle -1; 1\rangle$

$f(x) = x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 3$
$A = \langle 0; 5\rangle\ B = \langle -2; 2\rangle\ C = \langle 0; 10\rangle\ D = \langle -1; 1\rangle$

$f(x) = \frac{\sin x}{(x^2+1)(x^4+2)}$
$A = \langle 0; 5\rangle\ B = \langle -2; 2\rangle\ C = \langle 0; 10\rangle\ D = \langle -1; 1\rangle$

$f(x) = \frac{2^x - 2}{x^2+3+\cos x}$
$A = \langle 0; 5\rangle\ B = \langle -2; 2\rangle\ C = \langle 0; 10\rangle\ D = \langle -1; 1\rangle$

Ćwiczenie 3

Wyznacz miejsce zerowe funkcji z dokładnością do $\frac{1}{10}$ należące do danego przedziału (skorzystaj z metody bisekcji i podaj przybliżone rozwiązanie).

$f(x) = \frac{3x^3-9{,}9x^2+10{,}89x-3{,}993}{x^2+2}$, $f(x) = 2^x - 3x$, $f(x) = x^2 - \sin x$, $x \in (1;2)$, $x \in (0;1)$, $x \in (0,5;1)$

funkcja	przedział	miejsce zerowe
$f(x) = \frac{3x^3-9{,}9x^2+10{,}89x-3{,}993}{x^2+2}$	$x \in (1;2)$	
$f(x) = 2^x - 3x$	$x \in (0;1)$	
$f(x) = x^2 - \sin x$	$x \in (0,5;1)$	

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Korzystając z twierdzenia Darboux wykazać, że funkcja $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$ ma dwa pierwiastki należące do przedziału $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Uszereguj kolejność operacji.

- Sprawdzamy dodatkowo wartość w zerze $f(0) = \frac{-1\cdot 1}{-2\cdot 2} > 0$
- $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = -2$
- Badamy dziedzinę funkcji, w tym celu szukamy miejsc zerowych mianownika
- $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{\left(-\frac{3}{2}-2\right)\left(-\frac{3}{2}+2\right)} < 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}+2\right)} < 0$
- W przedziale $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ jest jeden pierwiastek. W przedziale $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ jest drugi pierwiastek
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

Ćwiczenie 6

Rozważmy funkcję $f : \langle -3, 3\rangle \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 33$. Wskaż zdanie prawdziwe.

- Funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.
- Funkcja f jest stała, gdyż $f(3) = f(-3)$.
- Funkcja ma przynajmniej dwa miejsca zerowe.
- Funkcja f nie posiada miejsca zerowego, gdyż $f(3) = f(-3)$.

Ćwiczenie 7

Korzystają z twierdzenia Darboux, podaj przybliżenie liczby $\sqrt{3}$ z dokładnością do $\frac{1}{16}$.

Ćwiczenie 8

Rozważmy cztery funkcje w ich naturalnych dziedzinach. Zastanów się, czy mają one miejsca zerowe. Dopasuj wzory funkcji do właściwych opisów.

$f(x) = x^2 + 4$	Brak miejsc zerowych - funkcja jest ciągła w swojej dziedzinie, ale dziedziną nie jest przedział.
$f(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$	Brak miejsc zerowych - funkcja nie jest ciągła.
$f(x) = \sqrt{7}x^2 + 3\sqrt{3}x + 1$	Brak miejsc zerowych - funkcja spełnia wszystkie założenia twierdzenia Darboux, ale przyjmuje tylko wartości dodatnie.
$f(x) = \frac{1}{x}$	Funkcja ma miejsce zerowe gdyż jest ciągła, określona na przedziale oraz $f(0) > 0$ oraz $f(-1) < 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Krystyna i Adam Kiersztyn

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowania twierdzenia Darboux

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprawdza istnienie pierwiastków dowolnej funkcji ciągłej w zadanym przedziale
- wyznacza przybliżone miejsce zerowe funkcji w zadanym przedziale

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja,
- rozmowa kierowana,

- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji, a następnie wraz z uczniami określa cele i kryteria sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 5-osobowych grupach zapoznają się z informacjami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj". Każda z grup tworzy własną mapę myśli na temat zastosowania twierdzenia Darboux. Uczniowie porównują swoje prace i omawiają z nauczycielem różnice w interpretacji zagadnienia.
2. Uczniowie w parach analizują rozwiązanie przykładów w sekcji „Przeczytaj".
3. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się". Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach po dwa pierwsze przykłady z ćwiczeń numer 3 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
5. Uczniowie wykonują wybrane przykłady z ćwiczeń 6-8 z sekcji „Sprawdź się". Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się".

2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Zastosowanie twierdzenia Darboux” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują zadanie 4 oraz pozostałe do wykonania przykłady z zadań 3,5-8.

Materiały pomocnicze:

- Wykres funkcji

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może zostać wykorzystana jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem