Zastosowania twierdzenia Darboux

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Film samouczek
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Zastosowania twierdzenia Darboux

Źródło: Gerd Altmann from Pixabay, domena publiczna.

W tym materiale przedstawimy zastosowania twierdzenia Darboux. To bardzo użyteczne twierdzenie pozwala szybko sprawdzić, czy badana funkcja posiada miejsce zerowe w zadanym przedziale. Istotnym elementem jest właściwe zastosowanie tego twierdzenia poprzez sprawdzenie jego założeń. Może się bowiem okazać, że bezpośrednie zastosowanie twierdzenia nie jest możliwe i niezbędne jest wykorzystanie intuicji matematycznej do doboru parametrów.

Twoje cele

- Nauczysz się sprawdzać, czy podana funkcja ma miejsce zerowe w zadanym przedziale.
- Nauczysz się wyznaczać przybliżone miejsca zerowe funkcji.

Przeczytaj

Na wstępie zapoznamy się z twierdzeniem Darboux oraz przeanalizujemy je bardzo skrupulatnie.

Twierdzenie: Darboux

Załóżmy, że dana jest funkcja ciągła na przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$, tzn. $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Jeżeli $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje punkt pośredni $c \in (a, b)$ taki, że $f(c) = 0$.

Przeanalizujemy powyższe twierdzenie krok po kroku.

1. Musimy sprawdzić, czy badana funkcja w zadanym przedziale jest ciągła.
2. Zapis $f(a) \cdot f(b) < 0$ oznacza, że na końcach przedziału wartości funkcji mają różne znaki. Nie musimy badać monotoniczności funkcji, bo nie ma to w tym przypadku znaczenia.
3. Istnienie punktu pośredniego $c \in (a, b)$ takiego, że $f(c) = 0$ oznacza, że badana funkcja ma miejsce zerowe należące do przedziału (a, b), jednak w wielu przypadkach możemy nie być w stanie wyznaczyć tej wartości w sposób analityczny.
4. Należy zauważyć, że teza twierdzenia jest implikacją, a to oznacza, że jeśli $f(a) \cdot f(b) > 0$, to nie możemy nic powiedzieć o istnieniu pierwiastka.

Przykład 1

Sprawdzimy czy równanie $4^x - x^2 = 0$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle -1, 1 \rangle$.

Rozwiązanie:

Zauważmy na początku, że w zadanym przedziale funkcja $f(x) = 4^x - x^2$ jest określona i ciągła, bowiem zarówno funkcja wykładnicza jak i wielomian są ciągłe, a zatem ich różnica również jest funkcją ciągłą.

Ponadto:

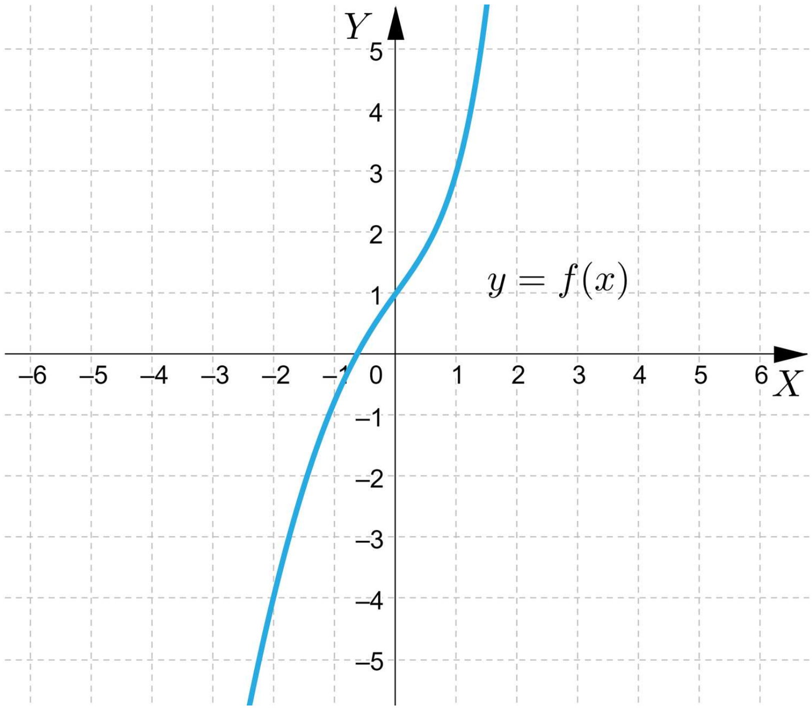
$f(-1) = 4^{-1} - (-1)^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

$f(1) = 4^1 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

Czyli $f(-1) \cdot f(1) < 0$. Zatem na mocy twierdzenia Darboux funkcja $f(x) = 4^x - x^2$ na przedziale $(-1, 1)$ ma miejsce zerowe.

Rozwiązanie tego równania jest dość skomplikowane, na szczęście nie jest wymagane wskazanie dokładnego rozwiązania, a jedynie sprawdzenie, czy takie rozwiązanie istnieje.

Analizując wykres funkcji:



utwierdzamy się w przekonaniu o istnieniu rozwiązania równania

$4^x - x^2 = 0.$

Twierdzenie Darboux należy stosować w umiejętny sposób i w razie potrzeby odpowiednio modyfikować przedział, na którym szukamy rozwiązania.

Przykład 2

Zbadamy czy funkcja $f(x) = x^6 + 4x^4 - 20x^2 - 48$ ma pierwiastki należące do przedziału $\langle -3, 3 \rangle$.

Rozwiązanie:

Badana funkcja jako wielomian jest ciągła na całym zbiorze liczb rzeczywistych, czyli w szczególności na przedziale $\langle -3, 3 \rangle$.

Z drugiej strony

$f(-3) = 825 > 0$ oraz $f(3) = 825 > 0.$

Na podstawie twierdzenia Darboux nie można wyciągnąć jednoznacznych wniosków o istnieniu pierwiastków w przedziale $(-3, 3)$. Wystarczy jednak zauważyć, że $f(0) = -48 < 0$, zatem

$f(-3) \cdot f(0) < 0,$

czyli na przedziale $(-3, 0)$ funkcja ma miejsce zerowe oraz

$f(0) \cdot f(3) < 0$,

co oznacza, że również na przedziale $(0, 3)$ funkcja ma miejsce zerowe.

Reasumując, funkcja f ma co najmniej 2 pierwiastki należące do przedziału $(-3, 3)$.

Po zapisaniu funkcji w nieco innej postaci

$f(x) = \left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 6\right)\left(x^2 + 2\right)$

okazuje się, że funkcja ma dokładnie 2 miejsca zerowe, które można łatwo wyznaczyć:

$f(x) = 0$, gdy $\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 6\right)\left(x^2 + 2\right) = 0$, skąd: $x = 2$ lub $x = -2$.

Twierdzenie Darboux jest podstawą metody równego podziału, inaczej zwanej bisekcją, która pozwala na poszukiwanie miejsc zerowych dowolnej funkcji ciągłej w przedziale $\langle a, b\rangle$, dla której $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dzięki algorytmowi znajdujemy przybliżone rozwiązanie ze z góry zadaną dokładnością – ustalamy $\varepsilon > 0$ i szukamy przybliżonego rozwiązania, które różni się od rozwiązania właściwego o co najwyżej $\varepsilon > 0$.

Algorytm bisekcji sprowadza się do następujących kroków:

1. Sprawdzamy, czy $x_1 = \frac{a+b}{2}$ jest pierwiastkiem, czyli $f(x_1) = 0$. Jeśli tak, to algorytm się kończy, a x_1 jest szukanym rozwiązaniem.
2. W przeciwnym razie, dopóki nie osiągamy zakładanej dokładności, czyli $|a - b| > \varepsilon$, to:
   a) jeśli $f(a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, to przyjmujemy $a_1 = a$ oraz $b_1 = \frac{a+b}{2}$,
   b) jeśli $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f(b) < 0$, to przyjmujemy $a_1 = \frac{a+b}{2}$ oraz $b_1 = b$
3. Ponawiamy procedurę dla przedziału (a_1, b_1) otrzymując przedział (a_2, b_2)...
4. Po osiągnięciu zakładanej dokładności, jako rozwiązanie przyjmujemy $x_0 \approx \frac{a+b}{2}$.

Przykład 3

Wyznaczymy pierwiastek równania $x^5 - x + 1 = 0$ w przedziale $\langle -2, 2\rangle$ z dokładnością do $\frac{1}{16}$.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy $f(x) = x^5 - x + 1$, $f(-2) = -32 + 2 + 1 = -29 < 0$, $f(2) = 32 - 2 + 1 = 31 > 0$, czyli w badanym przedziale jest pierwiastek. Zauważamy, że $x_1 = \frac{-2+2}{2} = 0$ i $f(0) = 1 > 0$. Stąd szukany pierwiastek należy do przedziału $(-2, 0)$. Zatem

$x_1 = \frac{-2+0}{2} = -1$, $f(-1) = -1 + 1 + 1 = 1 > 0$.

Skoro $f(0) \cdot f(-2) < -1$, to miejsce zerowe należy do przedziału $(-2, -1)$.

Postępując analogicznie w kolejnych krokach, otrzymujemy:

$x_1 = \frac{-2-1}{2} = -\frac{3}{2}$, $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{243}{32} + \frac{3}{2} + 1 < 0 \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

$x_1 = \frac{-\frac{3}{2}-1}{2} = -\frac{5}{4}$, $f\left(-\frac{5}{4}\right) < 0 \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{5}{4}, -1\right)$

$x_1 = \frac{-\frac{5}{4}-1}{2} = -\frac{9}{8}$, $f\left(-\frac{9}{8}\right) > 0 \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$

$x_1 = \frac{-\frac{5}{4}-\frac{9}{8}}{2} = -\frac{19}{16}$, $f\left(-\frac{19}{16}\right) < 0 \Rightarrow x_0 \in \left(-\frac{19}{16}, -\frac{9}{8}\right)$,

ale $\left|-\frac{19}{16} + \frac{9}{8}\right| = \frac{1}{16}$, czyli jako rozwiązanie przyjmujemy środek przedziału i ostatecznie mamy:

$x_0 \approx \frac{-\frac{9}{8}-\frac{19}{16}}{2} = -\frac{37}{32}$.

Słownik

pierwiastek równania

pierwiastkiem równania nazywamy wszystkie liczby rzeczywiste spełniające analizowane równanie

funkcja ciągła na przedziale

funkcję $f(x)$ nazywamy ciągłą na przedziale (a, b) jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in (a, b)$, tzn. istnieje granica

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

i granica ta jest równa wartości funkcji w tym punkcie, czyli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami zaprezentowanymi w filmie i wykonaj polecenia znajdujące się poniżej.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DfIoK51ZZ

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej zastosowania twierdzenia Darboux.

Polecenie 2

Wiadomo, że wykres ciągłej funkcji $f(x)$ przechodzi przez punkty $(-5, 5)$; $(-2, -5)$; $(0, 0)$; $(2, -6)$; $(5, 6)$. Wyznaczyć ile co najmniej rozwiązań należących do przedziału $\langle -5, 5\rangle$ mają równania:

a) $f(x) = \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = -\sqrt{3}$

Polecenie 3

Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x^5+x^3+1}{x^2+2}$ ma co najmniej jeden pierwiastek należący do przedziału $(-2, 2)$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Korzystają z twierdzenia Darboux, podaj przybliżenie liczby $\sqrt{3}$ z dokładnością do $\frac{1}{16}$.

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Krystyna i Adam Kiersztyn

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowania twierdzenia Darboux

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, poziom rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- sprawdza istnienie pierwiastków dowolnej funkcji ciągłej w zadanym przedziale
- wyznacza przybliżone miejsce zerowe funkcji w zadanym przedziale

Strategie nauczania:

- konstruktywizm,
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja,
- rozmowa kierowana,

- mapa myśli.

Formy pracy:

- praca indywidualna,
- praca w parach,
- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi wybraną osobę o odczytanie tematu lekcji, a następnie wraz z uczniami określa cele i kryteria sukcesu.
2. Prowadzący prosi uczniów, aby zgłaszali swoje propozycje pytań do tematu. Jedna osoba może zapisywać je na tablicy. Gdy uczniowie wyczerpią pomysły, a pozostały jakieś ważne kwestie do poruszenia, nauczyciel je dopowiada.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w 5-osobowych grupach zapoznają się z informacjami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Każda z grup tworzy własną mapę myśli na temat zastosowania twierdzenia Darboux. Uczniowie porównują swoje prace i omawiają z nauczycielem różnice w interpretacji zagadnienia.
2. Uczniowie w parach analizują rozwiązanie przykładów w sekcji „Przeczytaj”.
3. Prowadzący zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach po dwa pierwsze przykłady z ćwiczeń numer 3 i 5. Następnie wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.
5. Uczniowie wykonują wybrane przykłady z ćwiczeń 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Nauczyciel ponownie odczytuje temat lekcji: „Zastosowanie twierdzenia Darboux” i inicjuje krótką rozmowę na temat kryteriów sukcesu. Czego się uczniowie nauczyli? Na koniec prosi chętnego ucznia o podsumowanie.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują zadanie 4 oraz pozostałe do wykonania przykłady z zadań 3,5-8.

Materiały pomocnicze:

- Wykres funkcji

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może zostać wykorzystana jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem