



Jak wyznaczyć najmniejsze/największe pole powierzchni bryły?

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja 3D
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



Jak wyznaczyć najmniejsze/największe pole powierzchni bryły?

Źródło: Esther Jiao, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Poznane dotychczas sposoby rozwiązywania zadań optymalizacyjnych wykorzystasz w tym materiale wyznaczając największe/najmniejsze pole powierzchni brył. Umiesz już wyznaczać pochodną funkcji, ekstremum lokalne funkcji oraz z wyznaczonego ekstremum wskazać maksimum/minimum. W tym materiale nauczysz się opisywać pole powierzchni bryły za pomocą funkcji jednej zmiennej. Analiza tej funkcji pozwoli nam ustalić wymiary bryły o największym/najmniejszym polu powierzchni oraz umożliwi obliczenie tego pola.

Twoje cele

- Wyznaczysz funkcję do sytuacji z zadania.
- Wyznaczysz pochodną funkcji.
- Wyznaczysz dziedzinę funkcji.
- Wyznaczysz ekstremum lokalne funkcji.
- Na podstawie wyznaczonego ekstremum lokalnego funkcji wskażesz maksimum/minimum.

Przeczytaj

W poniższych przykładach zastanowimy się, jak wyznaczyć najmniejsze/największe pole powierzchni bryły. Schemat postępowania jest zawsze taki sam, można go opisać w następujących punktach:

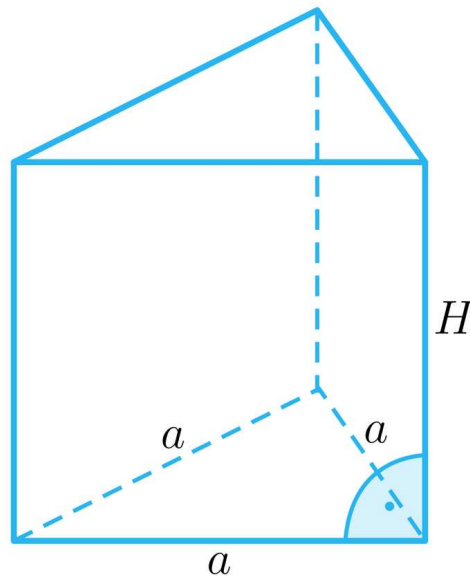
1. Uzależniamy wszystkie potrzebne wymiary od jednej zmiennej
2. Wyznaczamy funkcje opisującą badaną wielkość (np. pole powierzchni bryły)
3. Wyznaczamy dziedzinę funkcji
4. Obliczamy pochodną funkcji
5. Wyznaczamy punkty podejrzane o ekstremum
6. Uzasadniamy maksimum/minimum funkcji
7. Obliczamy największą/najmniejszą wartości funkcji

Przykład 1

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o objętości 4 cm^3 . Wyznamy długość krawędzi podstawy, dla której pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze z możliwych.

Rozwiązanie

Niech a będzie krawędzią podstawy oraz H wysokością graniastosłupa.



Ze wzoru na objętość graniastosłupa $V = P_p \cdot H$ otrzymujemy $4 = P_p \cdot H$. Ponieważ $P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ otrzymujemy, że $H = \frac{16\sqrt{3}}{3a^2}$.

Zapiszmy wzór na pole całkowite

$$P_c = 2P_p + P_b.$$

Podstawiając

$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH.$$

Stąd otrzymujemy funkcję jednej zmiennej opisującą pole powierzchni naszego graniastoslupa w zależności od długości krawędzi podstawy

$$P_c(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{16\sqrt{3}}{a}.$$

Zmienna a musi być dodatnia więc

$$D : a \in (0, \infty).$$

Wyznamy pochodną po zmiennej a .

$$P'_c(a) = a\sqrt{3} - \frac{16\sqrt{3}}{a^2}.$$

Wyznamy miejsce zerowej pochodnej $a^3\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$, stąd $a = 2\sqrt[3]{2}$.

Aby wyznaczyć ekstremum, posłużymy się tabelą, przedziały w tabeli są zależne od dziedziny oraz punktów dla których pochodna się zeruje.

a	$(0, 2\sqrt[3]{2})$	$2\sqrt[3]{2}$	$(2\sqrt[3]{2}, \infty)$
$P'_c(a)$	–	0	+
$P_c(a)$	↘	MIN	↗

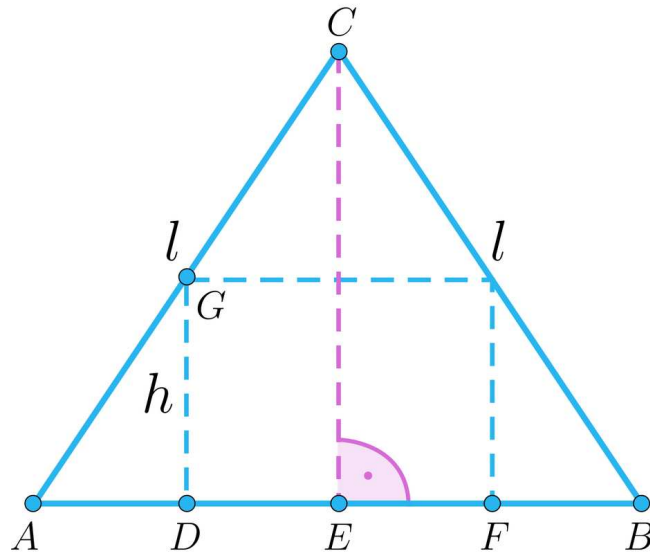
Funkcja osiąga minimum dla $a = 2\sqrt[3]{2}$ cm, zatem pole powierzchni całkowitej graniastoslupa będzie najmniejsze z możliwych, gdy krawędź podstawy będzie miała długość $a = 2\sqrt[3]{2}$ cm.

Przykład 2

W stożek, w którym przekrojem osiowym jest trójkąt równoboczny o tworzącej długości l wpisano walec o możliwie największym polu powierzchni całkowitej. Wyznamy długość promienia podstawy walca.

Rozwiązanie

Naszkieujemy przekrój osiowy stożka.



Oznaczmy:

$$|AC| = |CB| = |AB| = l,$$

$$|CE| = H - \text{wysokość stożka},$$

$$|DE| = |EF| = r - \text{promień podstawy walca}.$$

Przekrojem osiowym stożka jest trójkąt równoboczny, więc $H = \frac{l\sqrt{3}}{2}$.

Z faktu, że $|AB| = l$ oraz $|DE| = r$, mamy

$$|AD| = |FB| = \frac{l}{2} - r.$$

Z podobieństwa trójkątów AEC i ADG otrzymujemy równość:

$$\frac{H}{h} = \frac{|AE|}{|AD|}.$$

Podstawiając oraz wyznaczając wysokość walca, otrzymujemy

$$h = \sqrt{3}\left(\frac{l}{2} - r\right).$$

Wyznamy pole powierzchni całkowitej walca

$$P_c = 2\pi r(r + h).$$

Podstawiając otrzymujemy funkcję jednej zmiennej opisującą pole powierzchni całkowitej walca w zależności od długości promienia jego podstawy.

$$P_c(r) = 2\pi r\left(r + \sqrt{3}\left(\frac{l}{2} - r\right)\right).$$

Następnie wyznaczmy dziedzinę, oczywiście wszystkie zmienne muszą być dodatnie, więc $r > 0$ oraz z wysokości walca $r < \frac{l}{2}$. Zatem

$$D : x \in \left(0, \frac{l}{2}\right).$$

Wyznamy pochodną pola powierzchni całkowitej

$$P'_c(r) = 2\pi\left(r + \sqrt{3}\left(\frac{l}{2} - r\right)\right) + 2\pi r(1 - \sqrt{3}).$$

Wyznaczając miejsce zerowe pochodnej funkcji pola

$$r = \frac{(\sqrt{3}-3)l}{8}.$$

Aby wyznaczyć ekstremum, tworzymy tabelę, przedziały w tabeli są zależne od dziedziny oraz miejsc zerowych pochodnej.

r	$\left(0, \frac{(\sqrt{3}-3)l}{8}\right)$	$\frac{(\sqrt{3}-3)l}{8}$	$\left(\frac{(\sqrt{3}-3)l}{8}, \infty\right)$
$P'_c(r)$	+	0	-
$P_c(r)$	\nearrow	MAX	\searrow

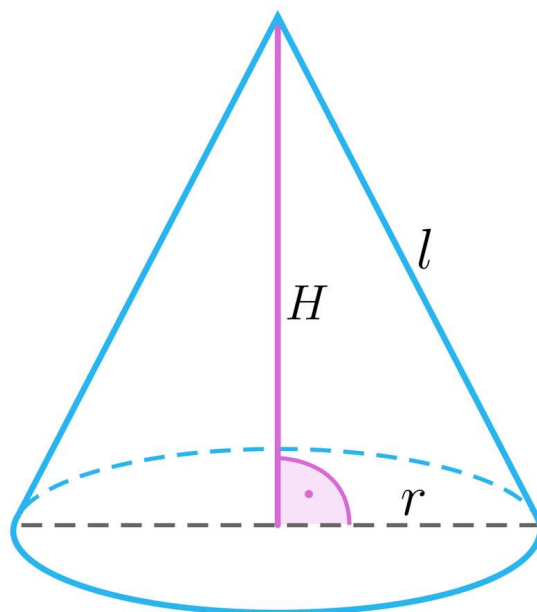
Funkcja osiąga maksimum w punkcie $r = \frac{(\sqrt{3}-3)l}{8}$, zatem walec o możliwie największym polu powierzchni całkowitej ma promień podstawy $r = \frac{(\sqrt{3}-3)l}{8}$.

Przykład 3

Objętość stożka wynosi $V\pi$. Wyznamy długości wysokości oraz promienia stożka, dla których pole powierzchni bocznej jest najmniejsze z możliwych.

Rozwiązanie

Naszkuje rzut stożka.



Rozpiszemy wzór na objętość

$$V = \frac{1}{3}P_p H = \frac{1}{3}\pi r^2 H.$$

Wyznaczając promień oraz podstawiając objętość daną w treści zadania, otrzymujemy

$$r = \sqrt{\frac{3V}{H}}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa

$$l^2 = r^2 + H^2.$$

Skąd po podstawieniu otrzymujemy

$$l = \sqrt{H^2 + \frac{3V}{H}}.$$

Wyznamy pole powierzchni bocznej stożka

$$P_b = \pi r l.$$

Podstawiając wcześniej wyznaczone wielkości, otrzymujemy funkcje jednej zmiennej opisującą pole powierzchni bocznej stożka w zależności od jego wysokości

$$P_b(H) = \pi \sqrt{\frac{3V}{H}} \sqrt{H^2 + \frac{3V}{H}} = \sqrt{3VH\pi^2 + \frac{9V^2\pi^2}{H^2}}.$$

Wyznamy dziedzinę

$$D : H \in (0, \infty).$$

Zauważmy, że funkcja $P_b(H)$ osiąga najmniejszą wartość wówczas, gdy wyrażenie pod pierwiastkiem osiąga najmniejszą wartość. Rozważmy

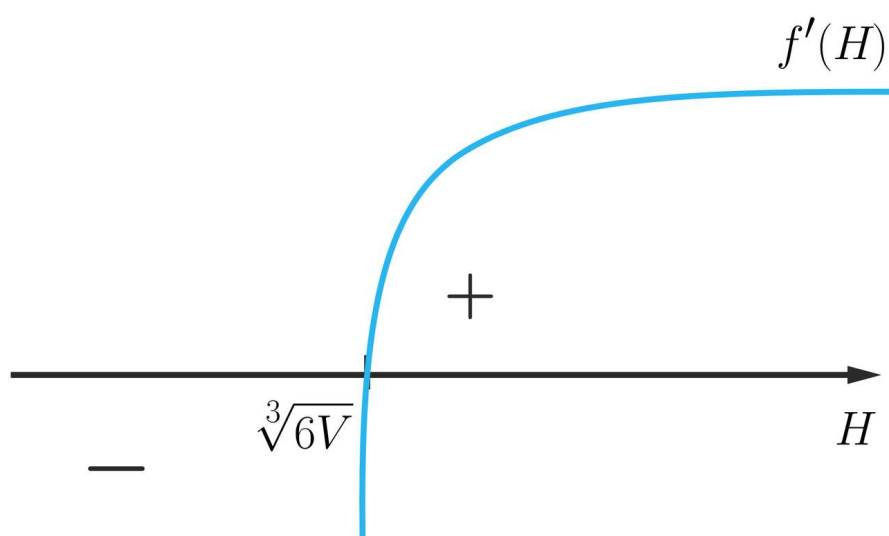
$$f(H) = 3VH\pi^2 + \frac{9V^2\pi^2}{H^2}.$$

Wyznamy pochodną

$$f'(H) = 3V\pi^2 - \frac{18V^2\pi^2}{H^3}.$$

Miejsce zerowe pochodnej wynosi $H = \sqrt[3]{6V}$.

Naszkujey wykre pochodnej.



Aby wyznaczyć ekstremum, tworzymy tabelę, przedziały w tabeli są zależne od dziedziny oraz miejsc zerowych pochodnej.

H	$(0, \sqrt[3]{6V})$	$\sqrt[3]{6V}$	$(\sqrt[3]{6V}, \infty)$
$f'(H)$	-	0	+
$f(H)$	\searrow	MIN	\nearrow

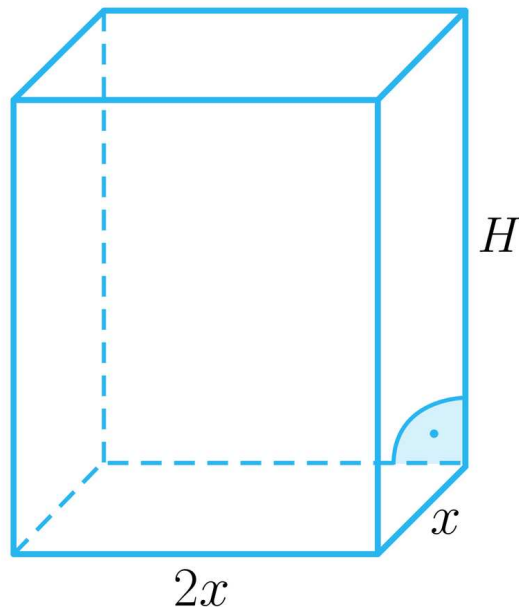
Funkcja osiąga minimum w punkcie $H = \sqrt[3]{6V}$. Zatem pole powierzchni bocznej stożka będzie najmniejsze z możliwych, gdy $H = \sqrt[3]{6V}$ oraz $r = \frac{\sqrt[3]{3V}}{\sqrt{2}}$.

Przykład 4

Dany jest prostopadłościan o objętości 4, w którym jedna krawędź podstawy jest dwa razy dłuższa od drugiej oraz suma długości krawędzi jest mniejsza od 38. Wyznamy wymiary prostopadłościanu, którego pole powierzchni całkowite jest najmniejsze z możliwych.

Rozwiązanie

Oznaczmy



Ze wzoru na objętość $V = 2x^2H$ oraz z sumy długości krawędzi $12x + 4H < 38$.

Wyznaczając wysokość, otrzymujemy $H = \frac{2}{x^2}$.

Podstawiając do nierówności oraz mnożąc obustronnie przez x^2 , otrzymujemy $12x^3 - 38x^2 + 8 < 0$.

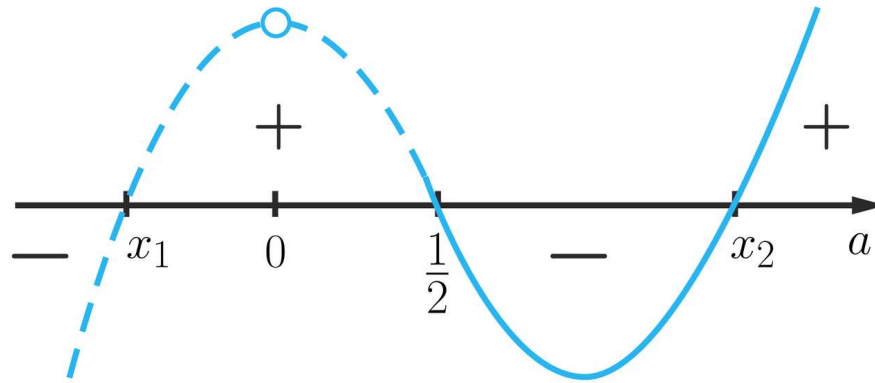
Możemy zauważyć, że miejscem zerowym powyższego wielomianu jest $\frac{1}{2}$. Wykonamy dzielenie wielomianów [schematem Hornera](#).

$w(x)$	12	(-38)	0	8
Działania	przepisujesz	$12 \cdot \frac{1}{2} - 38$	$(-32) \cdot \frac{1}{2} + 0$	$(-16) \cdot \frac{1}{2} + 8$
$\frac{1}{2}$	12	(-32)	(-16)	0

Po dzieleniu otrzymujemy wielomian $12x^2 - 32x - 16$.

Z trójmianu kwadratowego wyznaczmy miejsca zerowe, otrzymujemy $x_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{7} + \frac{4}{3}$ oraz $x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{7} + \frac{4}{3}$.

Ostatecznie otrzymaliśmy trzy miejsca zerowe wyjściowego wielomianu, naszkicujemy wykres.



Zmienna x jest krawędzią, więc musi być dodatnia oraz nierówność musi być mniejsza od zera więc z wykresu możemy odczytać dziedzinę

$$D : x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\sqrt{7} + \frac{4}{3} \right).$$

Następnie wyznaczmy pole powierzchni całkowitej

$$P_c = 2P_p + P_b = 4x^2 + 6xH.$$

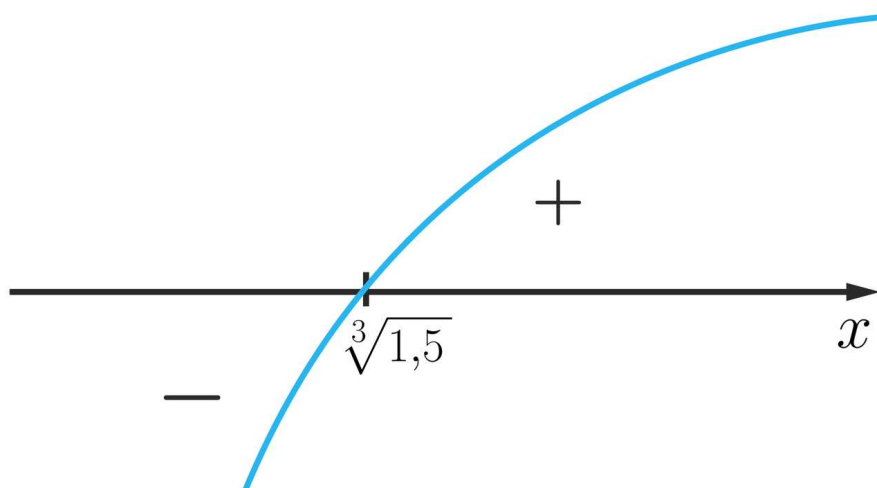
Podstawiając, otrzymujemy funkcję zmiennej x opisującą pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu w zależności od długości jednej z krawędzi podstawy.

$$P_c(x) = 4x^2 + \frac{12}{x}.$$

Wyznaczamy pochodną

$$P'_c(x) = 8x - \frac{12}{x^2}.$$

Miejszem zerowym pochodnej jest $x = \sqrt[3]{1,5}$. Należy do dziedziny. Naszkicujemy wykres pochodnej.



Aby wyznaczyć ekstremum, tworzymy tabelę, przedziały w tabeli są zależne od dziedziny oraz miejsc zerowych pochodnych

x	$(\frac{1}{2}, \sqrt[3]{1,5})$	$\sqrt[3]{1,5}$	$(\sqrt[3]{1,5}, \frac{2}{3}\sqrt{7} + \frac{4}{3})$
$P'_c(x)$	–	0	+
$P_c(x)$	\searrow	MIN	\nearrow

Funkcja osiąga minimum w punkcie $x = \sqrt[3]{1,5}$. Wyznaczmy $H = \frac{2}{\sqrt[3]{1,5^2}}$. Wymiary prostopadłościanu, którego pole powierzchni całkowite jest najmniejsze z możliwych, to $2\sqrt[3]{1,5} \times \sqrt[3]{1,5} \times \frac{2}{\sqrt[3]{1,5^2}}$.

Słownik

twierdzenie Pitagorasa

gdy trójkąt jest prostokątny, to suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej

schemat Hornera

algorytm dzielenia wielomianu $w(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ przez dwumian postaci $x - a$. Dzielenie wykonuje się tworząc tabelkę. W pierwszym wierszu tabeli wpisujemy współczynniki wielomianu, w drugim wierszu wykonujemy działania. W dolnym wierszu w pierwszej komórce wpisuje się miejsce zerowe dwumianu. W drugiej komórce przepisuje się współczynnik przy najwyższej potędze wielomianu, a następnie wyniki obliczeń

$w(x)$	a_n	a_{n-1}	...	a_1	a_0
Działania	przepisujesz	$a \cdot a_n + a_{n-1}$...	$a \cdot a_2 + a_1$	$a \cdot a_1 + a_0$
a	a_n	wynik powyższego działania	...	wynik powyższego działania	wynik powyższego działania

Animacja 3D

Polecenie 1

Zapoznaj się uważnie z poniższą animacją 3D, a następnie wykonaj polecenia.



Wystąpił błąd

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący wyznaczania najmniejszego i największego pola powierzchni bryły.

Polecenie 2

Polecenie 3

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny o objętości 36. Wiedząc, że pole powierzchni całkowite jest najmniejsze z możliwych wyznacz to pole.

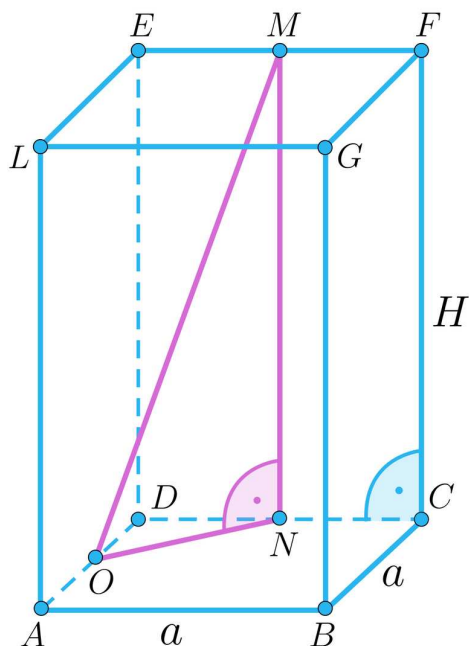
Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



W graniastopie prawidłowym czworokątnym punkty O , N i M są, odpowiednio, środkami odcinków AD , DC i EF .



Rozważmy trójkąt prostokątny OMN . Przeciwprostokątna otrzymanego trójkąta wynosi 20 cm. Wiedząc, że pole powierzchni bocznej graniastopu jest największe z możliwych wyznacz to pole.

Ćwiczenie 8



W graniastopie prawidłowym czworokątnym o objętości $4\sqrt{2}$ wpisano stożek o jak najmniejszym polu powierzchni bocznej.

Dla nauczyciela

Autor: Alicja Dembczak-Kołodziejczyk

Przedmiot: Matematyka

Temat: Jak wyznaczyć najmniejsze/największe pole powierzchni bryły?

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy. Zakres podstawowy.

Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

XIII. Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

- 4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu o funkcji złożonej;
- 5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
- 6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne za pomocą pochodnej.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- podaje opis matematyczny danej sytuacji w postaci funkcji
- wyznacza dziedzinę otrzymanej funkcji
- wyznacza pochodną funkcji
- wyznacza ekstremum lokalne funkcji

- wskazuje w wyznaczonym ekstremum czy funkcja osiąga wartość największą lub najmniejszą
- wyciąga wnioski na podstawie zrealizowanych przykładów

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- odwrócona lekcja

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w parach
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie w domu zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat lekcji i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na małe grupy. Uczniowie wymieniają się informacjami pozyskanymi w domu.
2. Nauczyciel wyświetla zawartość sekcji „Animacja 3D”, czyta treść polecenia nr 1 – „Zapoznaj się uważnie z poniższą animacją 3D, a następnie wykonaj polecenia”. Po zapoznaniu się uczniów z materiałem omawia ewentualne problemy związane z jego zrozumieniem. Uczniowie w grupach rozwiązują polecenie nr 2 w sekcji „Animacja 3D”. Wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie. Nauczyciel, w razie potrzeby, uzupełnia informacje.

3. W następnym kroku uczniowie wykonują w grupach zadania z ćwiczeń interaktywnych.
4. Wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby uzupełnia informacje.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują w domu tylko wybrane ćwiczenia albo te, których uczniowie nie zdążyli zrobić z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- [Pochodna i monotoniczność funkcji](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację 3D można wykorzystać jako wstęp do zajęć, utrwalając w ten sposób schemat rozwiązania zadań optymalizacyjnych.