



Wzór rekurencyjny ciągu określonego wzorem ogólnym

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Wzór rekurencyjny ciągu określonego wzorem ogólnym

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

Autotematyzm (*mise en abyme*) to technika malarska polegająca na umieszczeniu kopii obrazu na danym obrazie. Często w sposób sugerujący nieskończone powtarzanie sekwencji.



Diego Velázquez, Las meninas, 1656 r.

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

W teorii filmu i literatury autotematyzm odnosi się do techniki umieszczania historii danej opowieści w tej opowieści (np. film o filmie).

Odpowiednikiem autotematyzmu w matematyce jest rekurencja. W tym materiale zajmiemy się znajdowaniem wzoru rekurencyjnego ciągu, określonego wzorem ogólnym.

Twoje cele

- Odkryjesz zależność między kolejnymi wyrazami ciągu opisanego wzorem ogólnym.
- Zapiszesz wzór rekurencyjny ciągu określonego wzorem ogólnym.
- Określisz niektóre własności ciągu określonego rekurencyjnie.

Przeczytaj

Ciąg można określić między innymi poprzez podanie wzoru ogólnego. Można też podać jego pierwszy wyraz (lub kilku początkowych wyrazów) i regułę wyznaczania kolejnych wyrazów, w zależności od poprzednich, czyli określając **definicję rekurencyjną ciągu**.

Definicja: rekurencyjna ciągu

Mówimy, że ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeżeli:

- określony jest pewien skończony zbiór wyrazów tego ciągu (zwykle jest to pierwszy wyraz ciągu lub kilka jego pierwszych wyrazów),
- pozostałe wyrazy ciągu są wyrażone za pomocą poprzednich wyrazów tego ciągu.

Znając określenie rekurencyjne ciągu, jest na ogół trudno znaleźć wzór ogólny ciągu. Znacznie łatwiej jest natomiast zapisać ciąg w sposób rekurencyjny, mając wzór ogólny ciągu.

Przykład 1

Ciąg (a_n) dla $n \geq 1$ określony jest wzorem ogólnym $a_n = (n - 2)(n + 2)$. Określmy ten ciąg rekurencyjnie.

Rozwiązanie

Zapisujemy najpierw wzór ciągu w prostszej postaci.

$$a_n = (n - 2)(n + 2)$$

$$a_n = n^2 - 4$$

Teraz obliczamy wartość pierwszego wyrazu ciągu.

$$a_1 = 1 - 4 = -3$$

Wyznaczamy wyraz a_{n+1} .

$$a_{n+1} = (n + 1)^2 - 4 = n^2 + 2n + 1 - 4$$

Przekształcamy tak wyrażenie, aby wyraz a_{n+1} zapisać w zależności od wyrazu a_n .

$$a_{n+1} = (n^2 - 4) + 2n + 1$$

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 1$$

Zapisujemy wzór rekurencyjny ciągu.

$$\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Przykład 2

W historii matematyki ważną rolę odgrywa ciąg liczbowy (j_n) , zwany ciągiem Jacobsthal – Lucasa, nazwany tak na cześć dwóch znamienitych dziewiętnastowiecznych matematyków – Niemca Ernsta Jacobsthal'a i Francuza Eduarda Lucasa.

Początkowe wyrazy tego ciągu to:

2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, 1025, 2047, 4097, 8191, 16385, 32767, 65537, 131071, 262145, 524287, 1048577,.....

Wzór ogólny ciągu: $j_n = 2^n + (-1)^n$ dla $n \geq 0$.

Znajdziemy wzór rekurencyjny tego ciągu.

Rozwiązanie

Znajdujemy pierwszy wyraz ciągu, czyli w tym przypadku wyraz j_0 , oraz drugi wyraz ciągu, czyli j_1 .

$$j_0 = 2^0 + (-1)^0 = 2$$

$$j_1 = 2^1 + (-1)^1 = 1$$

Wyznaczamy wyraz j_{n+1} .

$$j_{n+1} = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Przekształcamy tak wyrażenie, aby wyraz j_{n+1} zapisać w zależności od wyrazu j_n .

$$j_{n+1} = 2 \cdot 2^n + (-1) \cdot (-1)^n + 2 \cdot (-1)^n - 2 \cdot (-1)^n$$

$$j_{n+1} = [2 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n] - 3 \cdot (-1)^n$$

$$j_{n+1} = 2 \cdot j_n - 3 \cdot (-1)^n$$

Zapisujemy wzór rekurencyjny ciągu.

$$\begin{cases} j_0 = 2 \\ j_1 = 1 \\ j_{n+1} = 2j_n - 3 \cdot (-1)^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Teraz trudniejszy przykład, wymagający nieco zastanowienia.

Przykład 3

Ciąg (a_n) określony jest dla $n \geq 1$ wzorem ogólnym $a_n = \frac{1}{n+1}$. Podamy przykład wzoru rekurencyjnego tego ciągu.

Rozwiązanie

Wyznaczamy pierwszy wyraz tego ciągu.

$$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Zapisujemy wyraz a_{n+1} .

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1+1}$$

Przekształcamy tak wyrażenie, aby wyraz a_{n+1} zapisać w zależności od wyrazu a_n .

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1+1} = \frac{1}{\frac{1}{a_n}+1}$$

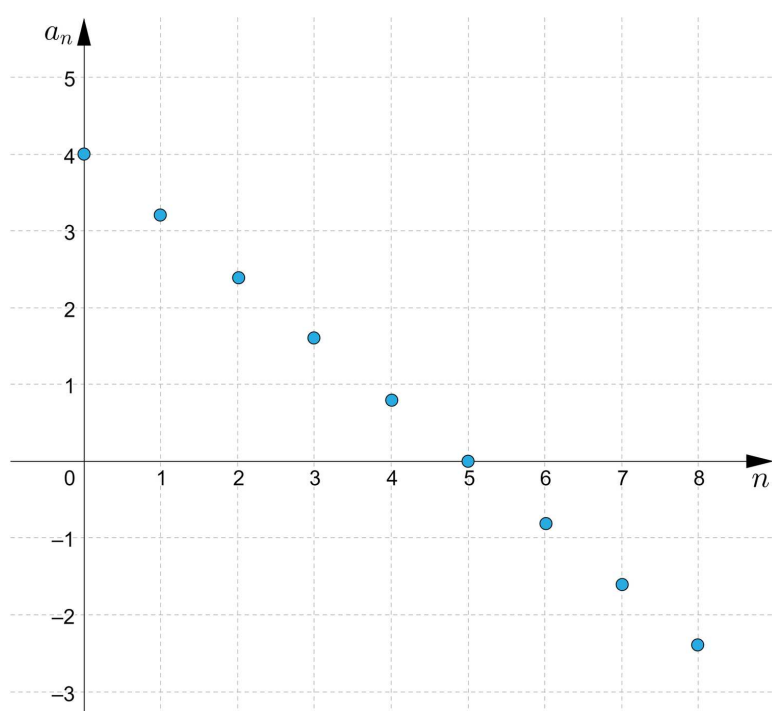
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$$

Zapisujemy wzór rekurencyjny ciągu.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

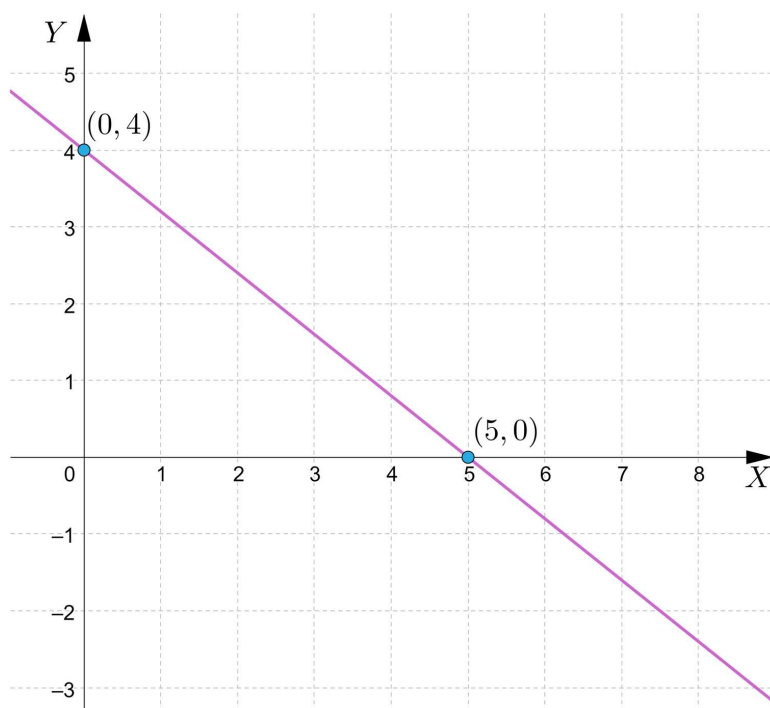
Przykład 4

Na rysunku przedstawiono wykres skończonego ciągu (a_n) . Opiszemy ten ciąg wzorem rekurencyjnym.



Rozwiązanie

Zauważmy, że wyrazy ciągu leżą na prostej.



Wyznamy najpierw równanie tej prostej.

Zapisujemy równanie prostej w postaci kierunkowej.

$y = ax + b$, gdzie a, b to współczynniki liczbowe.

Odcytujemy z wykresu współrzędne dwóch punktów należących do tej prostej, np. $(0, 4)$ i $(5, 0)$ i podstawiamy do równania prostej.

$$4 = a \cdot 0 + b \text{ i } 0 = a \cdot 5 + b.$$

Stąd

$$b = 4 \text{ i } a = -\frac{4}{5}, \text{ czyli } y = -\frac{4}{5}x + 4.$$

Wzór ogólny ciągu:

$$a_n = -0,8n + 4, \text{ gdzie } n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Teraz możemy przystąpić do wyznaczania wzoru rekurencyjnego. Odcytujemy z wykresu wyraz a_0 .

$$a_0 = 4$$

Obliczamy wyraz a_1 .

$$a_1 = -0,8 \cdot 1 + 4 = 3,2$$

Obliczamy a_{n+1} i przekształcamy.

$$a_{n+1} = -0,8(n+1) + 4 = -0,8n + 4 - 0,8$$

$$a_{n+1} = a_n - 0,8$$

Wzór rekurencyjny:

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_1 = 3,2 \\ a_{n+1} = a_n - 0,8, \quad 1 \leq n \leq 7 \end{cases}$$

Podobnie jak wzór ogólny ciągu, wzór rekurencyjny można wyznaczać różnymi sposobami. W zależności od użytego sposobu, ten sam ciąg można opisać różnymi wzorami rekurencyjnymi.

Przykład 5

Określimy dwoma sposobami wzór rekurencyjny ciągu opisanego słownie:

każdej liczbie naturalnej dodatniej przyporządkowany jest jej kwadrat.

Rozwiązanie

Wzór na n -ty wyraz ciągu: $a_n = n^2$.

Wyznaczamy wyraz pierwszy: $a_1 = 1$ oraz wyraz a_{n+1} .

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Ciąg określimy rekurencyjnie na podstawie różnicy:

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1.$$

Otrzymujemy wzór rekurencyjny.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 1, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Wzór rekurencyjny można też uzyskać na podstawie ilorazu.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

Teraz otrzymujemy nieco inny wzór rekurencyjny.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Słownik

definicja rekurencyjna ciągu

mówimy, że ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie, jeżeli:

- określony jest pewien skończony zbiór wyrazów tego ciągu (zwykle jest to pierwszy wyraz ciągu lub kilka jego pierwszych wyrazów),
- pozostałe wyrazy ciągu są wyrażone za pomocą poprzednich wyrazów tego ciągu

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj przykłady zawarte w animacji. Staraj się najpierw samodzielnie rozwiązać podane tam zadania, a następnie porównaj z rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DkO68s31J>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej wzoru rekurencyjnego ciągu określonego wzorem ogólnym.

Polecenie 2

Ciąg Jacobsthala to ciąg (J_n) liczb naturalnych nazwany tak na cześć niemieckiego matematyka Ernesta Jacobsthala. Początkowe wyrazy ciągu to 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 21, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, 5461, ...

Ciąg ten można opisać wzorem ogólnym

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wykaż, że ciąg ten można opisać wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} J_0 = 0 \\ J_1 = 1 \\ J_{n+1} = 2J_n + (-1)^n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ciąg (a_n) dla $n \geq 1$ określony jest wzorem $a_n = 0,5 \cdot (3^n + 1)$. Ten ciąg można określić wzorem rekurencyjnym:

☐ $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 3a_n, n \geq 1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - 2, n \geq 1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n - 1, n \geq 1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3a_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$

Ćwiczenie 2



Ciąg (a_n) dla $n \geq 1$ określony jest wzorem $a_n = \frac{2}{n}$. Ten ciąg określono wzorem

rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = k \\ a_{n+1} = a_n - \frac{k}{n+n^2}, n \geq 1 \end{cases}$

Zatem liczba k jest równa:

☐ 3

☐ 2

☐ 4

☐ 1

Ćwiczenie 3



Każdy z ciągów (a_n) i (b_n) opisany jest dla $n \in \mathbb{N}_+$ za pomocą wzoru ogólnego i wzoru rekurencyjnego. Uzupełnij zapisy, wstawiając odpowiednie liczby.

$$a_n = (n - 1)(n - 3)$$

$$a_1 = \boxed{}$$

$$a_{n+1} = a_n + \boxed{} n - 3, \quad n \geq 1$$

$$b_n = (n + 2)(n + 3)$$

$$b_1 = \boxed{}$$

$$b_{n+1} = \boxed{} b_n, \quad n \geq 1$$

$$\boxed{\frac{n+4}{n+2}} \quad \boxed{0} \quad \boxed{2} \quad \boxed{12}$$

Ćwiczenie 4



Połącz w pary wzór ogólny i wzór rekurencyjny ciągu (a_n) określonego dla $n \geq 1$.

$$a_n = 2n + 3$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_n = 3^{n-1}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + 2n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_n = n(n - 1)$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_n = n(n + 1)$$

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = 2 + a_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Ćwiczenie 5



Ciąg (a_n) dla $n \geq 1$ określony jest wzorem $a_n = (n - 1) \cdot 2^n + 1$. Zaznacz, które zdanie jest prawdziwe, a które fałszywe.

	Prawda	Fałsz
$a_3 = 17$	☐	☐
$a_6 = 320$	☐	☐
$a_5 - 1 = 4 \cdot 2^5$	☐	☐
$a_4 + a_3 = 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^3$	☐	☐
Wzór rekurencyjny $a_1 = 1$ $a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 2^{n+1} - 1, n \geq 1$	☐	☐

Ćwiczenie 6



Ciąg (a_n) określony jest wzorem ogólnym $a_n = n(n + 1)(n - 1)$ dla $n \geq 1$. Ciąg ten określono wzorem rekurencyjnym na dwa sposoby - na podstawie różnicy i na podstawie ilorazu. Uzupełnij te wzory, przeciągając odpowiednie wyrażenia.

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 6$$

$$a_{n+1} = a_n + \boxed{}, n \geq 2$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 6$$

$$a_{n+1} = \boxed{} a_n, n \geq 2$$

$$\frac{n+1}{n-1}$$

$$(n + 2)(n + 1)$$

$$\frac{n-3}{n-1}$$

$$3n(n + 1)$$

$$2n(n + 1)$$

$$\frac{n+2}{n-1}$$

Ćwiczenie 7



Ciąg (a_n) , w którym wyrazy są większe od 2, określony jest wzorem ogólnym $a_n = \frac{n}{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}_+$. Ciąg (b_n) , w którym wyrazy są większe od 2, określony jest wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} b_1 = \frac{1}{2} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2-b_n}, n \geq 1 \end{cases}$$

Wykaż, że ciągi te są równe.

Ćwiczenie 8



Ciąg (a_n) dla $n \geq 0$ określony jest wzorem $a_n = 2^n + 3^n$. Wykaż, że ten ciąg można opisać wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 5 \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n \geq 2 \end{cases}.$$

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzór rekurencyjny ciągu określonego wzorem ogólnym

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony.

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;

2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach

$$\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_n = a_n + \frac{1}{2} \cdot a_n(1 - a_n) \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}.$$

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- odkrywa zależność między kolejnymi wyrazami ciągu opisanego wzorem ogólnym,
- zapisuje wzór rekurencyjny ciągu określonego wzorem ogólnym,
- określa niektóre własności ciągu opisanego wzorem rekurencyjnym,
- prowadzi rozumowania mające na celu zauważenie analogii i wykorzystanie jej do tworzenia wzorów rekurencyjnych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- okienko informacyjne,
- skacząca żaba,
- Smily.

Formy zajęć:

- praca w grupach,
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer,
- karton, mazaki.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

1. Uczniowie metodą skaczącej żaby przypominają wiadomości na temat ciągów. Jeden z uczniów, wskazany przez nauczyciela, przypomina w jaki sposób ze wzoru rekurencyjnego ciągu uzyskać wzór ogólny.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w małych grupach metodą okienka informacyjnego. Zapoznają się z przykładami zapisanymi w sekcjach: Przeczytaj i Animacja.
2. Pozyskane informacje zapisują na dużym arkuszu papieru. Arkusz dzielą na 4 części. W pierwsze okienko wpisują hasło nad którym pracują – zamiana wzoru ogólnego ciągu na wzór rekurencyjny. W drugim okienku zapisują definicję rekurencyjnego opisu ciągu. W trzecim okienku umieszczają opisy poznanych sposobów tworzenia wzorów rekurencyjnych.
3. W czwartym okienku umieszczają pomysły, pytania, zadania dla innych grup.
4. Po prezentacji „okienek” grupy wybierają jeden plakat, który ewentualnie uzupełniają i umieszczają w klasie, aby służył pomocą na następnych lekcjach.
5. W końcowej części tej fazy zajęć, uczniowie rozwiązują zadania przygotowane przez poszczególne grupy.

Faza podsumowująca:

1. Uczniowie podsumowują lekcję metodą Smily. Na plakacie znajduje się schemat służący do oceny lekcji. Uczniowie zaznaczają mazakiem w wybranym przez siebie miejscu kropkę – która ma być odpowiedzią na pytania zadane przez nauczyciela – czy temat lekcji był zrozumiały, czy praca w grupach przebiegała przyjaźnie, itp.
2. Jeden z uczniów omawia wykonany plakat, nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.

Praca domowa:

Wykonanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

[Pojęcie ciągu. Ciąg jako funkcja zmiennej naturalnej](#)

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium

Animację można wykorzystać na zajęciach omawiających własności ciągów liczbowych.