



Metoda wyznacznikowa rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)

Metoda wyznacznikowa rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Źródło: Jae Rue z Pixabay, domena publiczna.

Autorem prac z teorii wyznaczników jest ur. 31 lipca 1704 roku w Genewie Gabriel Cramer. Ten szwajcarski matematyk i fizyk, profesor Uniwersytetu w Genewie, zajmował się także analizą matematyczną, teorią krzywych algebraicznych oraz historią matematyki. Dzięki podanym przez niego w 1750 roku wzorom, możemy znaleźć rozwiązanie układu równań za pomocą wyznaczników.

Taka metodę rozwiązywania układów równań nazywamy metodą wyznacznikową.



Portret Gabriela Cramera autorstwa Roberta Gardelle'a

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

INTRODUCTION
A
L'ANALYSE
DES
LIGNES COURBES
ALGÈBRIQUES.

Par
GABRIEL CRAMER,
*Professeur de Philosophie & de Mathématiques,
des Académies & Sociétés Royales de Londres,
de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie
de l'Institut de Bologne.*



A GENEVE.
Chez les FRERES CRAMER & CL. PHILIBERT.

M D C C L

Introduction à l'analyse des lignes courbes
algébriques, 1750

Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,
domena publiczna.

Twoje cele

- Przekształcisz układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny.
- Obliczysz wartości wyznaczników.
- Rozwiążesz układ równań liniowych metodą wyznacznikową.
- Korzystając z algorytmu rozwiązywania układu równań metodą wyznacznikową określisz, czy jest to układ oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny.

Przeczytaj

Przypomnijmy najpierw definicję układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Definicja: układ równań z dwiema niewiadomymi

Układem równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy koniunkcję dwóch równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Układ taki przyjmuje postać:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

gdzie a_1 i b_1 oraz a_2 i b_2 nie są równocześnie równe zero. W powyższym układzie x oraz y oznaczają niewiadome, a_1 , a_2 , b_1 oraz b_2 - współczynniki przy niewiadomych odpowiednio x oraz y , natomiast c_1 i c_2 nazywamy wyrazami wolnymi.

Aby zastosować metodę wyznacznikową, musimy jeszcze określić liczbę nazywaną wyznacznikiem. Przyjmujemy poniższą definicję.

Definicja: wyznacznik

Wyznacznikiem $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ nazywiemy liczbę $ad - bc$.

Przykład 1

Obliczmy wyznaczniki:

a. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$,

b. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Rozwiązanie

a. Korzystając z podanego wyżej wzoru, możemy obliczyć wartość [wyznacznika](#).

Możemy też zapamiętać metodę, która pozwala nam obliczać takie wyznaczniki.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

W tym układzie liczb możemy zauważyć, że są one położone na dwóch przekątnych, zaznaczonych tu kolorami pomarańczowym i niebieskim. Aby obliczyć wyznacznik mnożymy liczby znajdujące się na przekątnej zaznaczonej kolorem pomarańczowym i odejmujemy iloczyn liczb zaznaczonych kolorem niebieskim.

A zatem:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = -4 - 4 = -8$$

- b. Od iloczynu liczb znajdujących się na przekątnej zaznaczonej kolorem pomarańczowym, odejmujemy iloczyn liczb położonych na przekątnej zaznaczonej kolorem niebieskim.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 6 + 4 = 10$$

Ważne!

Aby rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

metodą wyznacznikową, musimy obliczyć trzy liczby:

- wyznacznik główny W – utworzony ze współczynników liczbowych znajdujących się przy niewiadomych x i y .

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

- wyznacznik niewiadomej x oznaczany W_x – utworzony poprzez zastąpienie w wyznaczniku głównym kolumny współczynników przy niewiadomej x , kolumną wyrazów wolnych.

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$$

- wyznacznik niewiadomej y oznaczany W_y – utworzony poprzez zastąpienie w wyznaczniku głównym kolumny współczynników przy niewiadomej y , kolumną wyrazów wolnych.

$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

Jeśli wyznacznik główny $W \neq 0$, to taki układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie (jest oznaczony), które możemy wyznaczyć za pomocą wzorów Cramera:

$$x = \frac{W_x}{W} \text{ i } y = \frac{W_y}{W}.$$

Jeśli wyznacznik główny $W = 0$ i $W_x = 0$ i $W_y = 0$, to układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań (jest nieoznaczony).

Jeśli wyznacznik główny $W = 0$ i ($W_x \neq 0$ lub $W_y \neq 0$), to układ równań nie ma rozwiązań (jest sprzeczny).

Przykład 2

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 4x + y = 8 \\ 2x - \frac{1}{2}y = 8 \end{cases}$ metodą wyznacznikową.

Rozwiązanie

1. Zapisujemy i obliczamy wyznacznik główny.

Wypisujemy w odpowiednich kolumnach współczynniki znajdujące się przy niewiadomych x oraz y .

$$W = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Następnie mnożymy liczby umieszczone na przekątnych i odejmujemy odpowiednie iloczyny.

$$W = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot 1 = -2 - 2 = -4$$

2. Zapisujemy i obliczamy wyznacznik niewiadomej x .

W pierwszej kolumnie wyznacznika głównego zastępujemy współczynniki znajdujące się przy niewiadomej x , kolumną wyrazów wolnych.

$$W_x = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 8 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

Następnie mnożymy liczby umieszczone na przekątnych i odejmujemy odpowiednie iloczyny.

$$W_x = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 8 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 8 \cdot 1 = -4 - 8 = -12$$

3. Zapisujemy i obliczamy wyznacznik niewiadomej y .

W drugiej kolumnie wyznacznika głównego zastępujemy współczynniki znajdujące się przy niewiadomej y , kolumną wyrazów wolnych.

$$W_y = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$$

Następnie mnożymy liczby umieszczone na przekątnych i odejmujemy odpowiednie iloczyny.

$$W_y = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 2 \cdot 8 = 32 - 16 = 16$$

Ponieważ wyznacznik główny jest różny od zera, więc możemy wykorzystać wzory Cramera do wyznaczenia rozwiązania tego układu.

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{16}{-4} = -4$$

A zatem rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$.

Przykład 3

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} \frac{4x+y}{3} + 2 = y - 2 \\ 4(x+y) - 1 = 3y - 4x \end{cases}$ metodą wyznacznikową.

Rozwiązanie

Aby rozwiązać bardziej skomplikowany układ dwóch równań liniowych, musimy każde z równań układu doprowadzić do najprostszej postaci. Możemy dodawać do obu stron równania to samo wyrażenie oraz mnożyć obie strony równania przez to samo niezerowe wyrażenie.

Układ musimy uporządkować i doprowadzić do postaci

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Mnożymy obie strony pierwszego równania przez liczbę 3, a w drugim równaniu opuszczamy nawias.

$$\begin{cases} \frac{4x+y}{3} + 2 = y - 2 \quad | \cdot 3 \\ 4(x+y) - 1 = 3y - 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + y + 6 = 3y - 6 \\ 4x + 4y - 1 = 3y - 4x \end{cases}$$

Przenosimy niewiadome x oraz y na lewą stronę równań, a wyrazy wolne na prawą stronę równań i redukujemy wyrazy podobne w każdym z nich.

$$\begin{cases} 4x - 2y = -12 \\ 8x + y = 1 \end{cases}$$

Możemy jeszcze w pierwszym równaniu podzielić obie strony przez 2.

$$\begin{cases} 2x - y = -6 \\ 8x + y = 1 \end{cases}$$

Obliczamy wyznacznik główny.

$$W = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 8 = 10$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej x .

$$W_x = \begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 1 = -5$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej y .

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 48 = 50$$

Ponieważ $W \neq 0$, więc układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wyznaczamy wartości niewiadomych x i y , korzystając ze wzorów.

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{50}{10} = 5$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 5 \end{cases}$.

Przykład 4

$$\text{Rozwiążemy układ równań } \begin{cases} -\sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 8 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Skorzystamy z metody wyznacznikowej.

Rozwiązanie

Obliczamy wyznacznik główny.

$$W = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej x .

$$W_x = \begin{vmatrix} 8 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 8\sqrt{3} + 4$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej y .

$$W_y = \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 8 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2\sqrt{6} - 16\sqrt{2}$$

Ponieważ $W \neq 0$, więc układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wyznaczamy wartości niewiadomych x i y , korzystając ze wzorów.

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{8\sqrt{3}+4}{1}$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{-2\sqrt{6}-16\sqrt{2}}{1}$$

Rozwiązaniem układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 8\sqrt{3} + 4 \\ y = -2\sqrt{6} - 16\sqrt{2} \end{cases}$.

Możemy zauważyć, że metoda ta pozwala łatwo wyznaczyć rozwiązanie równania nawet wtedy, gdy są nim liczby niewymierne.

Przykład 5

Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} 5x - 4y = 10 \\ -10x + 8y = -20 \end{cases}$ metodą wyznaczkową.

Rozwiązanie

Obliczamy wyznacznik główny.

$$W = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -10 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej x .

$$W_x = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -20 & 8 \end{vmatrix} = 80 - 80 = 0$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej y .

$$W_y = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ -10 & -20 \end{vmatrix} = -100 + 100 = 0$$

$$W = 0 \text{ i } W_x = 0 \text{ i } W_y = 0$$

Oznacza to, że układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

Jest to układ równań nieoznaczony.

Przykład 6

Rozwiążemy układ równań metodą wyznaczkową.

$$\begin{cases} 5x - 4y = 10 \\ -10x + 8y = 20 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Obliczamy wyznacznik główny.

$$W = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -10 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej x .

$$W_x = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 20 & 8 \end{vmatrix} = 80 + 80 = 160$$

Obliczamy wyznacznik niewiadomej y .

$$W_y = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix} = 100 + 100 = 200$$

$$W = 0 \text{ i } (W_x \neq 0 \text{ oraz } W_y \neq 0)$$

A zatem ten układ równań jest sprzeczny i nie posiada rozwiązania.

Słownik

układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi

$$\text{układ równań postaci } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

wyznacznik

$$\text{liczba postaci } \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przykładami zastosowania metody wyznacznikowej do rozwiązywania układów równań, przedstawionymi w animacji. Następnie wykonaj samodzielnie polecenie 2.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1DYrAe54>

0361A Film nawiązujący do treści materiału na temat metod wyznacznikowego rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Polecenie 2

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 5x - 10y = 7 \\ -3x - 2y = 4 \end{cases}$ metodą wyznacznikową.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Doprowadź układ równań
$$\begin{cases} \frac{x+y}{3} - \frac{x-y}{2} = 1 \\ 2(x+y) + 3(x-y) = 2 \end{cases}$$
 do najprostszej postaci i rozwiąż metodą wyznacznikową. Zapisz rozwiązanie w najprostszej postaci.

Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} \sqrt{7}x + (\sqrt{7} + 2)y = 4 \\ (\sqrt{7} - 2)x - \sqrt{7}y = 6 \end{cases}.$$

Dla nauczyciela

Autor: Beata Wojciechowska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Metoda wyznacznikowa rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi; podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,
- kompetencje cyfrowe,
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca układ równań tak, aby otrzymać układ równoważny,
- oblicza wartości wyznaczników stopnia drugiego,
- rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą wyznacznikową,
- rozpoznaje układy równań oznaczone, nieoznaczone i sprzeczne oraz ich interpretację geometryczną,
- tworzy i wykorzystuje algorytmy rozwiązywania układów równań liniowych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm.

Metody i techniki nauczania:

- analiza przypadku,
- dyskusja,
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem animacji.

Formy pracy:

- praca całego zespołu klasowego,
- praca w grupach,
- praca w parach.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami i dostępem do Internetu, słuchawki,
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale,
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć oraz wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.
2. Uczniowie przypominają sobie w grupach wiadomości i umiejętności związane z rozwiązywaniem układów równań.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w parach metodą analizy przypadku. Analizują przykłady zawarte w części „Przeczytaj” .
2. Przedstawiciele grup krótko omawiają pojęcie wyznaczników oraz poznaną metodę.
3. Uczniowie wspólnie z nauczycielem omawiają animację i konsultują wykonanie umieszczonego pod nią polecenia.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 1-4.
5. Nauczyciel kontroluje pracę grup, wyjaśnia wątpliwości.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń krótko podsumowuje najważniejsze informacje z lekcji.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 5-8.

Materiały pomocnicze:

[Rozwiązywanie układów równań metodą wyznacznikową w arkuszu kalkulacyjnym](#)

Wskazówki metodyczne:

Animacja może być wykorzystana przez uczniów do powtórzenia wiadomości z lekcji oraz utrwalenia wyznacznikowej metody rozwiązywania układów równań. Można wykorzystać ją również na przykład na zajęciach poświęconych rozwiązywaniu zadań tekstowych na układy równań.