



Obliczanie momentu bezwładności rury względem osi symetrii

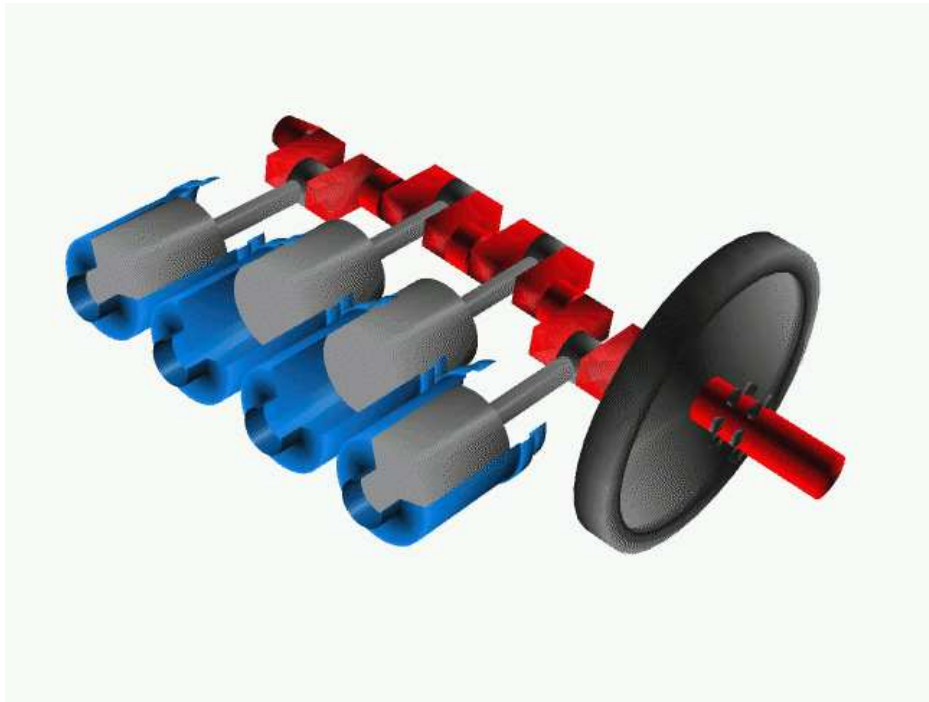
- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Obliczanie momentu bezwładności rury względem osi symetrii

Czy to nie ciekawe?

W technice często spotykamy się z obracającymi się podłużnymi elementami. Przykładem może być wał korbowy w silniku spalinowym, wał napędowy w samochodzie, czy wiertło w wiertarce. Aby poprawnie opisać ich ruch obrotowy, musimy znać ich moment bezwładności. Jak go obliczyć?



Rys. a. Schemat działania wału napędowego w samochodzie [Źródło: NASA [Public domain], [via Wikimedia Commons](#)]

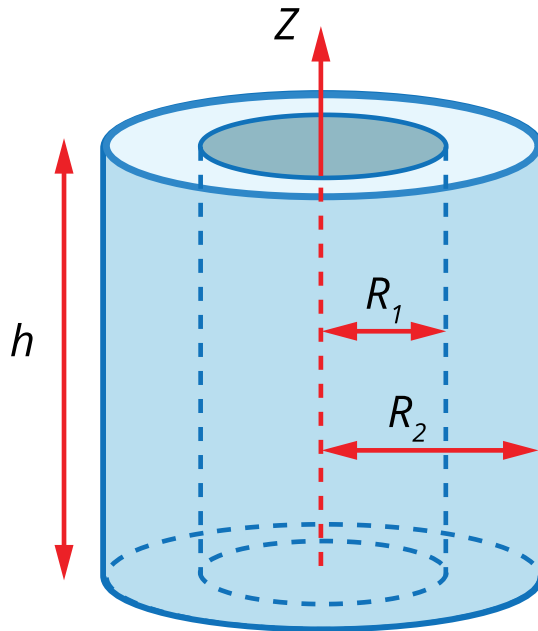
Twoje cele

- dowiesz się, jaki jest moment bezwładności rury o znanej masie względem jej podłużnej osi symetrii,
- wyprowadzisz wyrażenie podające moment bezwładności rury w zależności od jej promieni: zewnętrznego i wewnętrznego,
- przeanalizujesz dwa skrajne przypadki tego wyrażenia, odpowiadające rurze cienkościennej i litemu walcowi.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Jaki będzie **moment bezwładności** walca, który nie będzie cienkościenny, ale będzie rurą, której ścianka ma niezerową grubość? Bryłę tę można nieformalnie nazwać wydrążonym walcem. Oznaczmy jego wewnętrzny promień jako R_1 , a zewnętrzny jako R_2 . Wysokość walca niech będzie równa h (zob. Rys. 1).



Rys. 1. Rura o grubej ściance – promień wewnętrzny R_1 , promień zewnętrzny R_2 , wysokość h .

Na początek wyobraźmy sobie lity (tj. niewydrążony) walec o promieniu R_2 . Jego moment bezwładności oznaczmy jako I_{w2} . Podzielmy teraz walec na dwie części: wewnętrzny o promieniu R_1 oraz rurę o promieniu wewnętrznym R_1 i zewnętrznym R_2 . Momenty bezwładności wewnętrznego walca i rury oznaczmy odpowiednio: I_{w1} oraz I_x .

Z addytywności momentu bezwładności wynika następujący związek między momentem bezwładności rury i momentami bezwładności obydwu walców (więcej na ten temat dowiesz się po przeczytaniu materiału pt. *Masa i moment bezwładności punktu materialnego i bryły sztywnej*):

$$I_x = I_{w2} - I_{w1}.$$

Ponieważ wiemy, że **moment bezwładności** litego walca o masie m i promieniu R wynosi $I_w = \frac{1}{2}mR^2$ (więcej na ten temat dowiesz się po przeczytaniu materiału pt. *Momenty bezwładności ciał dla różnych jednorodnych brył*), możemy napisać:

$$I_x = I_{w2} - I_{w1} = \frac{1}{2}m_2R_2^2 - \frac{1}{2}m_1R_1^2,$$

gdzie m_1 i m_2 oznaczają masy obydwu walców.

Powyższy wzór można znacząco uprościć. W tym celu założmy, że rura jest wykonana z jednorodnego materiału o gęstości ρ . Oczywiście to samo założenie dotyczy obydwu walców. Dzięki temu założeniu masy wszystkich elementów badanego układu można zastąpić iloczynami odpowiednich objętości i gęstości:

$$m_1 = \pi R_1^2 h \rho,$$

$$m_2 = \pi R_2^2 h \rho,$$

wobec tego masa rury wynosi

$$m_x = m_2 - m_1 = \pi h \rho (R_2^2 - R_1^2),$$

Podstawiając wyrażenia opisujące masy walców (m_1 i m_2) do wzoru na **moment bezwładności** rury, dostajemy:

$$I_x = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 - \frac{1}{2} m_1 R_1^2 = \frac{1}{2} \pi R_2^2 h \rho R_2^2 - \frac{1}{2} \pi R_1^2 h \rho R_1^2 = \frac{1}{2} \pi h \rho (R_2^4 - R_1^4).$$

Następnie, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ dla R_2^2 oraz R_1^2 , dostajemy:

$$I_x = \frac{1}{2} \pi h \rho (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} \pi h \rho (R_2^2 - R_1^2) (R_1^2 + R_2^2).$$

W końcu, wykorzystując w ostatniej zależności wcześniej zapisane wyrażenie na masę rury m_x dostajemy:

$$I_x = \frac{1}{2} \pi h \rho (R_2^2 - R_1^2) (R_1^2 + R_2^2) = \frac{1}{2} m_x (R_1^2 + R_2^2).$$

Podsumowując: **Moment bezwładności rury o masie m_x , promieniu wewnętrznym R_1 i promieniu zewnętrznym R_2 jest równy $I_x = \frac{1}{2} m_x (R_1^2 + R_2^2)$.**

Zwróćmy uwagę na dwa skrajne przypadki rozmiarów rury:

- Jeśli promień wewnętrzny wynosi , 0, otrzymamy pełny walec o promieniu podstawy R_2 . W takiej sytuacji wzór opisujący moment bezwładności rury upraszcza się do wzoru opisującego moment bezwładności litego walca $I_w = \frac{1}{2} m R_2^2$.
- Jeśli promień R_1 będzie w przybliżeniu równy R_2 , czyli rura będzie miała bardzo cienką ściankę, to otrzymamy:
 $I_x = \frac{1}{2} m_x (R_1^2 + R_2^2) \approx \frac{1}{2} m_x (R_1^2 + R_1^2) = \frac{1}{2} m_x 2 R_1^2 = m_x R_1^2$. Uzyskany wzór opisuje **moment bezwładności** cienkościennej obręczy (zob. materiał pt. *Momenty bezwładności ciał dla różnych jednorodnych brył*).

Słowniczek

Moment bezwładności

(*ang.: moment of inertia*) miara bezwładności ciała w ruchu obrotowym względem określonej, ustalonej osi obrotu.

Film samouczek

Obliczanie momentu bezwładności rury o masie m względem osi symetrii

Obejrzyj film samouczek, z którego dowiesz się, w jaki sposób „grubość ścianki” rury wpływa na wielkość jej momentu bezwładności.

Polecenie 1

Przeprowadź analogiczne obliczenia dla bardzo cienkiej rury o promieniu wewnętrznym równym 0,99 promienia zewnętrznego. Jak bardzo wynik różni się od wyniku dla obręczy?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



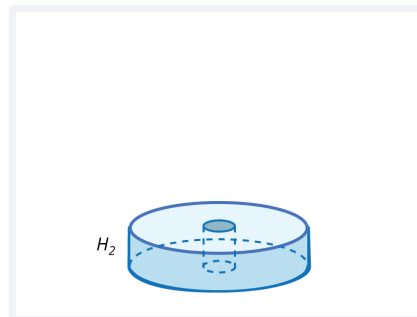
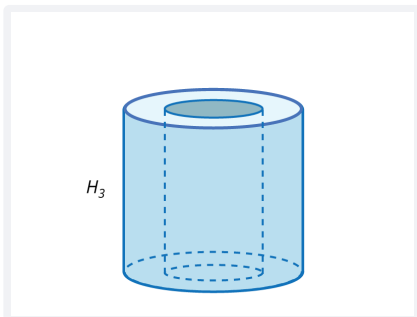
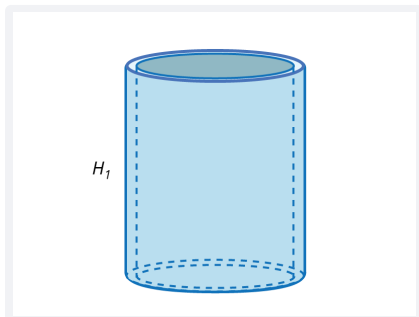
Uzupełnij wzór na moment bezwładności rury o masie m , promieniu wewnętrznym R_1 i promieniu zewnętrznym R_2 .

$$I_x = \boxed{} m (R_1^2 \boxed{} R_2^2)$$

Ćwiczenie 2



Poniższe ilustracje przedstawiają rury o takiej samej masie i takim samym promieniu zewnętrznym. Uporządkuj te ilustracje zgodnie z malejącym momentem bezwładności rur, które są na nich przedstawione.



Ćwiczenie 3



Rura ma masę $m = 1$ kg, promień zewnętrzny $R = 64$ mm i ścianki grubości $\Delta R = 2$ mm. Jaki jest jej moment bezwładności? Podaj odpowiedź w odpowiednich jednostkach i z dokładnością do jednej cyfry znaczącej.

$kg \cdot m^2$

Ćwiczenie 4



Promień zewnętrzny rury o masie m jest dwa razy większy niż jej promień wewnętrzny R . Jaki jest moment bezwładności tej rury? Zapisz wynik jako ułamek zwykły (w formacie x/y).

Odpowiedź: mR^2

Ćwiczenie 5



Z żelaza i miedzi wykonano dwie rury o tych samych rozmiarach (promieniu wewnętrznym, promieniu zewnętrznym i długości). Która z nich ma większy moment bezwładności:

☐ rura z żelaza

☐ nie można tego ustalić bez znajomości wartości wymiarów

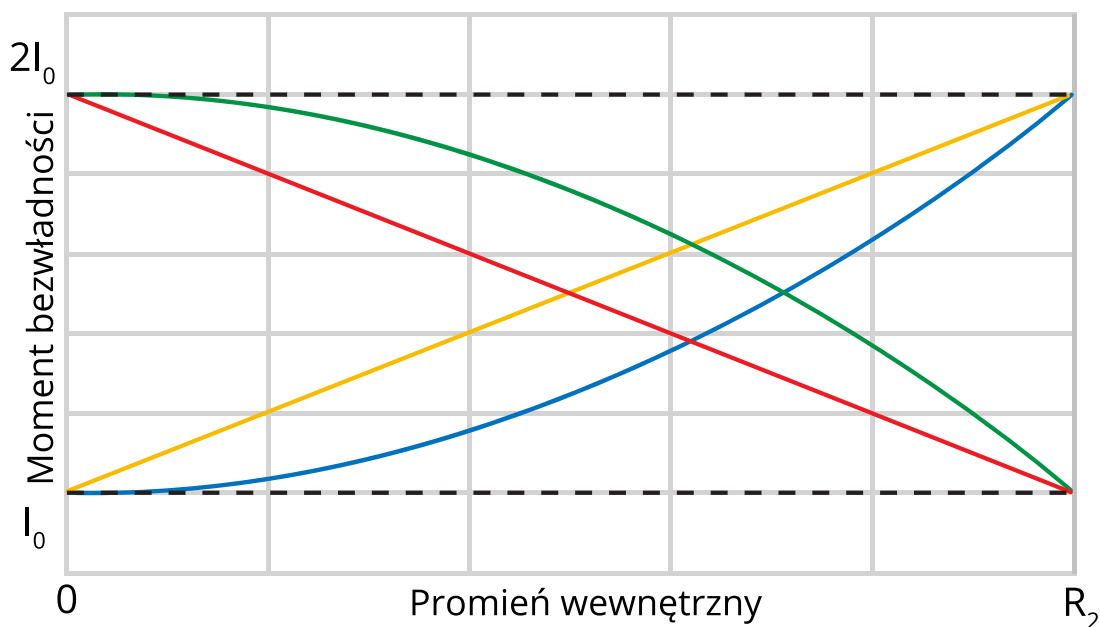
☐ obie mają taki sam moment bezwładności, ponieważ mają te same wymiary

☐ rura z miedzi

Ćwiczenie 6



Rura o masie m , promieniu wewnętrznym R_1 i promieniu zewnętrznym R_2 została włożona do prasy hydraulicznej. Jest ona zgniatana w taki sposób, że zachowuje swój promień zewnętrzny, ale zmniejsza się jej promień wewnętrzny (oraz długość). Który wykres prawidłowo pokazuje zmianę jej momentu bezwładności? Na wykresie $I_0 = mR_2^2/2$.



☐ żółty

☐ zielony

☐ czerwony

☐ niebieski

Ćwiczenie 7



Obliczając moment bezwładności cienkich rur, przyjmujemy, że we wzorze

$I_x = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$ promień zewnętrzny R_2 równa się promieniowi wewnętrznemu R_1 .

Założmy, że mamy rurę o $R_2 = 64$ mm, $R_1 = 62$ mm, czyli o grubości $\Delta R = 2$ mm. Oblicz jej masę na dwa sposoby - dokładnie, jako różnicę masy dwóch walców, i w przybliżeniu, jako masę cienkiej obręczy. Podaj, jaki jest stosunek tych mas (dokładnej do przybliżonej), z dokładnością do trzech cyfr znaczących.

Odpowiedź:

Ćwiczenie 8



Oceń, jak duży błąd popełnimy, jeśli obliczając moment bezwładności rury o promieniu zewnętrznym R i grubości ΔR , potraktujemy ją jako cienkościenną obręcz? Wykonaj obliczenia dla rury o parametrach: $R = 64 \text{ mm}$ i $\Delta R = 2 \text{ mm}$:

☐ rzędu 20%

☐ to zależy od pozostałych parametrów rury

☐ rzędu 3%

☐ rzędu 1%

Dla nauczyciela

Konspekt (scenariusz) lekcji

Imię i nazwisko autora:	Dariusz Aksamit
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Obliczanie momentu bezwładności rury o masie m względem osi symetrii
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 2) posługuje się materiałami pomocniczymi, w tym tablicami fizycznymi i chemicznymi oraz kartą wybranych wzorów i stałych fizykochemicznych; 16) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zgodnie z zasadami zaokrąglania oraz zachowaniem liczby cyfr znaczących wynikającej z dokładności pomiaru lub z danych. III. Mechaniki bryły sztywnej. Uczeń: 2) stosuje pojęcie bryły sztywnej; opisuje ruch obrotowy bryły sztywnej wokół osi.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. wyjaśnia od czego zależy moment bezwładności rury o masie m względem osi symetrii. 2. oblicza i porównuje momenty bezwładności rur dla różnych parametrów.
Strategie i metody nauczania:	Strategia Kształcenia Wyprzedzającego
Formy zajęć:	- praca indywidualna, - dyskusja grupowa.
Środki dydaktyczne:	komputer z rzutnikiem lub tablety do dyspozycji każdego ucznia
Materiały pomocnicze:	brak
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Nauczyciel przypomina definicję momentu bezwładności i przypomina wzór pozwalający obliczyć jego wartość dla jednorodnego walca. Nauczyciel pyta, czy ktoś ma pomysł, w jaki sposób znając moment bezwładności litego walca można obliczyć moment bezwładności rury. Nauczyciel naprowadza uczniów na informacje, że będzie to różnica momentów bezwładności dwóch walców i wtedy włącza film samouczek z niniejszego e-materiału.	
Faza realizacyjna:	
Po obejrzeniu filmu nauczyciel rysuje na tablicy nowy walec, z innymi oznaczeniami (r_w i r_z zamiast R_1 i R_2) i prosi o powtórzenie przedstawionych obliczeń. Po zakończeniu pracy przez uczniów nauczyciel sprawdza, czy wszyscy otrzymali tę samą zależność. Ochotników prosi kolejno o rozwiązanie zadań nr 2,3,4 i 5 z zestawu ćwiczeń.	
Faza podsumowująca:	
Nauczyciel podsumowuje otrzymane wyniki i zadaje pracę domową – zadania, które nie zostały rozwiązane w trakcie lekcji. Uczniom, którzy mieli problem z samodzielnym wyprowadzeniem wzoru na moment bezwładności rury zaleca ponowne obejrzenie (krok po kroku) filmu z niniejszego e-materiału i samodzielne powtórzenie obliczeń.	
Praca domowa:	
Zadania z zestawu ćwiczeń, których nie rozwiązano w trakcie lekcji.	

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium:	Medium może być wykorzystane zgodnie ze scenariuszem. Można również najpierw przeprowadzić samodzielne wyprowadzenia wzorów, a dopiero później, dla sprawdzenia, obejrzeć film.
--	--