Objętość prostopadłościanu

Źródło: Christian Fregnan, dostępny w internecie: www.unsplash.com, domena publiczna.

W materiale wprowadzimy wzór na obliczenie objętości prostopadłościanu. Następnie pokażemy zastosowanie tego wzoru do obliczania objętości prostopadłościanów o zadanych wielkościach takich jak: kąty pomiędzy odcinkami, długości krawędzi, czy kąty pomiędzy odcinkami a płaszczyznami. Bazując na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

> **Twoje cele**
>
> - Obliczysz objętość prostopadłościanu, gdy dane dane są długości jego krawędzi.
> - Wyznaczysz długości odcinków w prostopadłościanie, gdy dana jest jego objętość.
> - Zastosujesz wiedzę o kątach między odcinkami i płaszczyznami w prostopadłościanie do wyznaczania jego wymiarów oraz objętości.
> - Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

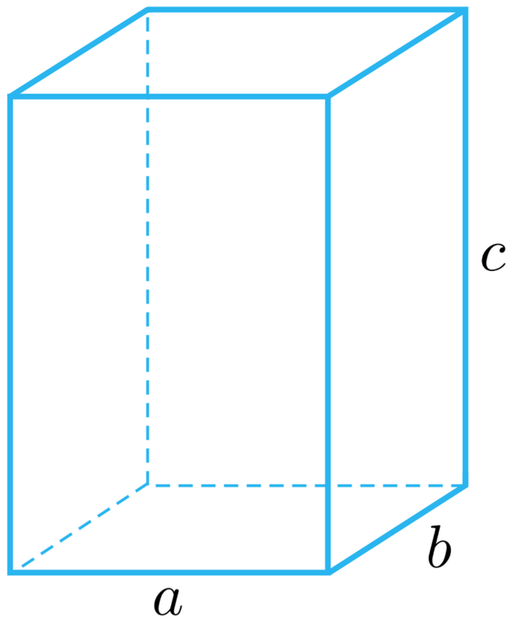
Objętość prostopadłościanu

Pojęcie objętości jest związane z życiem codziennym. Jeżeli mówimy o objętości, to obliczamy pojemność naczynia, ilość powietrza znajdującego się w pomieszczeniu, czy ilość wody w akwarium.

Objętość prostopadłościanu obliczamy ze wzoru:

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

gdzie:
V – objętość,
a, b, c – długości krawędzi (wymiary prostopadłościanu).



Zauważmy, że wielkość $a \cdot b$ jest równa polu podstawy prostopadłościanu, zatem objętość prostopadłościanu możemy obliczyć ze wzoru

$$V = P_p \cdot c.$$

Wobec tego do obliczenia objętości prostopadłościanu wystarczy pomnożyć jego wymiary: długość, szerokość i wysokość. Ważne, aby wszystkie wymiary były podane w jednakowej jednostce.

Przykład 1

Obliczymy objętość prostopadłościanu o krawędziach: $a = 10\ \text{cm}$, $b = 15\ \text{cm}$ i $c = 5\ \text{cm}$.

Rozwiązanie:

Objętość podanej bryły wyliczamy według poznanego już wzoru:

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 10 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} \cdot 5\ \text{cm}$

$V = 750\ \text{cm}^3$.

Objętość prostopadłościanu o wymiarach 10, 15 oraz $5\ \text{cm}$ wynosi 750 centymetrów sześciennych.

Objętość podawana jest w jednostkach sześciennych. Dla ułatwienia zapisu czasami jednostkę będziemy pomijać.

Przykład 2

Obliczymy długość trzeciej krawędzi prostopadłościanu, jeżeli objętość prostopadłościanu jest równa 280 m^3, a dwie z jego krawędzi mają długość 5 m oraz 7 m.

Rozwiązanie:

Długość trzeciej krawędzi obliczymy, przekształcając wzór na objętość prostopadłościanu:

$V = a \cdot b \cdot c$

$c = \frac{V}{a \cdot b}$

$c = \frac{280 \text{ m}^3}{5 \text{ m} \cdot 7 \text{ m}}$

$c = 8 \text{ m}$.

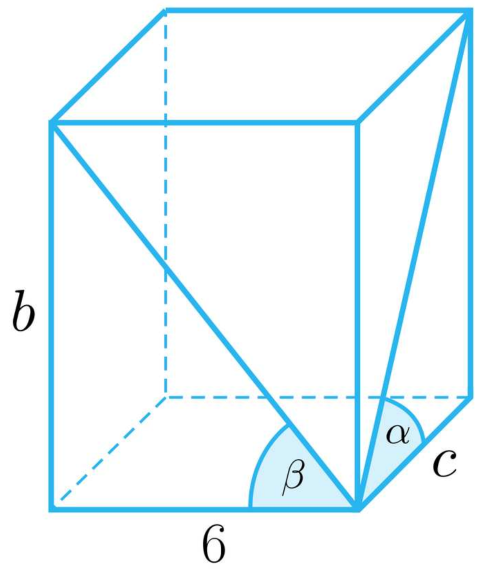
Długość trzeciej krawędzi prostopadłościanu wynosi 8 metrów. Poprzez przekształcenia wzoru na objętość prostopadłościanu możemy obliczyć długość dowolnej krawędzi prostopadłościanu.

Do obliczania objętości prostopadłościanu wykorzystuje się wartości funkcji trygonometrycznych.

Przykład 3

Dany jest prostopadłościan, w którym jedna z krawędzi podstawy ma długość 6. Kąty między krawędziami podstawy a przekątnymi ścian bocznych mają miary odpowiednio

$\alpha = 30^\circ$ i $\beta = 60^\circ$, tak jak na poniższym rysunku. Obliczymy objętość tego prostopadłościanu.



Rozwiązanie:

Aby rozwiązać zadanie, niezbędna jest umiejętność posługiwania się **wzorami trygonometrycznymi** oraz własnościami trójkątów. Obliczmy długość krawędzi b. Wykorzystamy do tego wartość funkcji cotangens:

$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{b}$

$b\sqrt{3} = 18$, czyli $b = 6\sqrt{3}$

Do obliczenia długość trzeciej krawędzi wykorzystamy funkcję tangens:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{c}$

$c\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$, czyli $c = 18$

Wobec tego obliczamy objętość prostopadłościanu:

$V = 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 18 = 648\sqrt{3}$

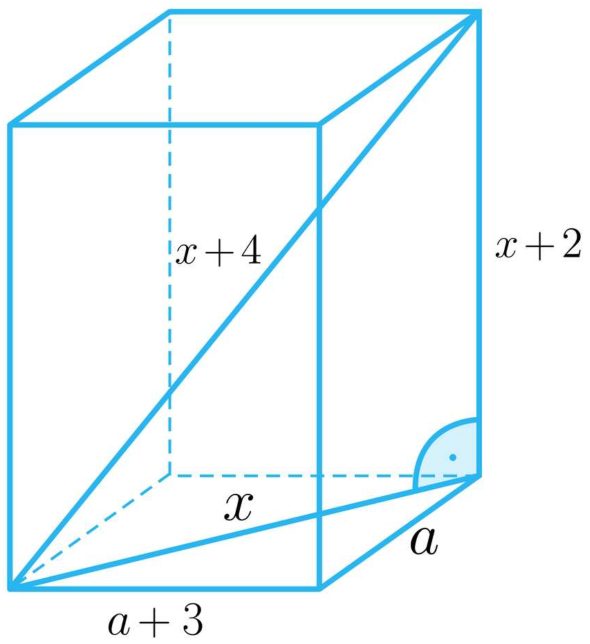
Zauważmy, że do wyznaczenia długości pozostałych krawędzi prostopadłościanu wystarczyła jedynie długość jednej z krawędzi i kąty między krawędziami podstawy i przekątnymi ścian bocznych. Nie zawsze znamy bowiem dokładne długości krawędzi, a zmierzenie odpowiednich kątów może być łatwiejszym zadaniem.

Przykład 4

Przekątna podstawy prostopadłościanu jest o 2 krótsza od krawędzi bocznej i o 4 krótsza od przekątnej prostopadłościanu. Wyznaczymy objętość tego prostopadłościanu, jeżeli długości krawędzi podstawy prostopadłościanu różnią się o 3.

Rozwiązanie:

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Ponieważ przekątna podstawy prostopadłościanu, krawędź boczna i przekątna prostopadłościanu tworzą trójkąt prostokatny, zatem do wyznaczenia wartości x rozwiązujemy równanie:

$x^2 + (x+2)^2 = (x+4)^2$

$x^2 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8x + 16$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x_1 = \frac{4-8}{2} = -2$ oraz $x_2 = \frac{4+8}{2} = 6$.

Zatem przekątna podstawy prostopadłościanu ma długość 6.

Do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie, korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$(a+3)^2 + a^2 = 6^2$

$2a^2 + 6a - 27 = 0$

$a_1 = \frac{-6-6\sqrt{7}}{4} < 0$

$a_2 = \frac{-6+6\sqrt{7}}{4} = \frac{-3+3\sqrt{7}}{2} > 0$

Krawędź prostopadłościanu mają długości:

$a = \frac{-3+3\sqrt{7}}{2}$

$a + 3 = \frac{-3+3\sqrt{7}}{2} + 3 = \frac{3+3\sqrt{7}}{2}$

$x + 2 = 6 + 2 = 8$

Wobec tego objętość prostopadłościanu jest równa:

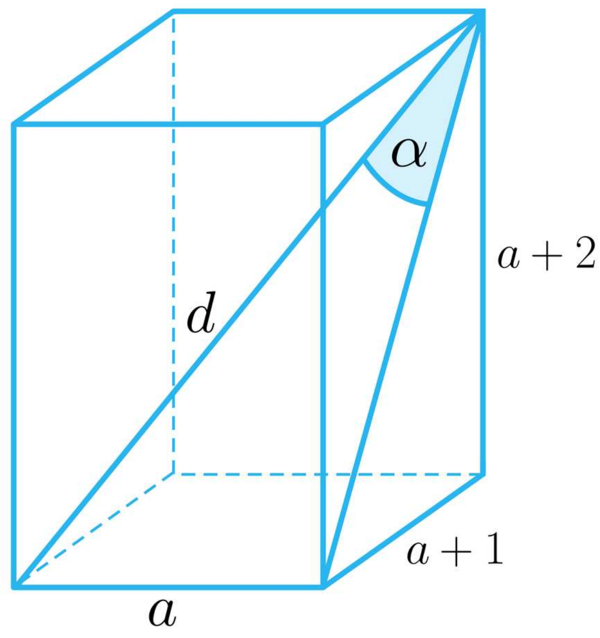
$V = \frac{3+3\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{-3+3\sqrt{7}}{2} \cdot 8 = 108$

Przykład 5

Przekątna d prostopadłościanu jest nachylona do największej ściany bocznej pod kątem α. Krawędzie prostopadłościanu wychodzące z tego samego wierzchołka tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 1. Wyznaczymy objętość tego prostopadłościanu.

Rozwiązanie:

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Korzystając z funkcji trygonometrycznej sinus mamy:

$\sin\alpha = \frac{a}{d}$, więc $a = d\sin\alpha$

Wobec tego

$a+1 = d\sin\alpha + 1$

$a+2 = d\sin\alpha + 2$

Objętość prostopadłościanu jest równa:

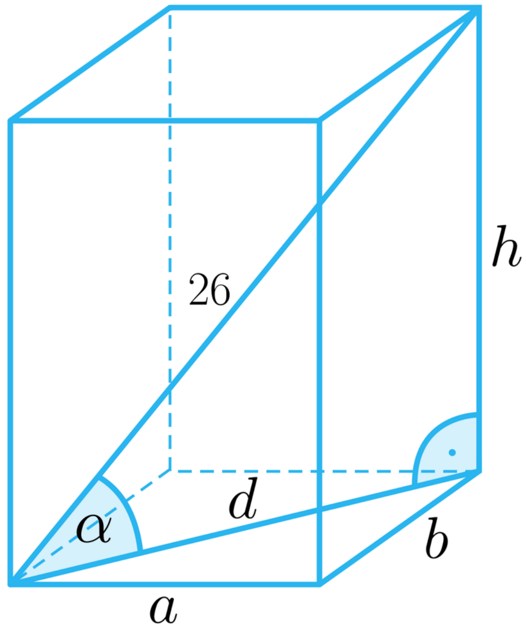
$V = d\sin\alpha \cdot (d\sin\alpha + 1) \cdot (d\sin\alpha + 2) = d^3\sin^3\alpha + 3d^2\sin^2\alpha + 2d\sin\alpha$

Przykład 6

Przekątna prostopadłościanu ma długość 26 i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Obliczymy objętość tego prostopadłościanu, jeżeli krawędzie podstawy pozostają w stosunku $1:3$.

Rozwiązanie:

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia, jak na poniższym rysunku.



Ponieważ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, zatem

$\frac{h}{d} = \frac{5}{12}$

$h = \frac{5}{12} \cdot d$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy zależność:

$d^2 + h^2 = 26^2$

$d^2 + \left(\frac{5}{12} \cdot d\right)^2 = 26^2$

$d^2 + \frac{25}{144}d^2 = 676$

$\frac{169}{144}d^2 = 676$

$d = 26 \cdot \frac{12}{13} = 24$

$h = \frac{5}{12} \cdot 24 = 10$

Ponieważ krawędzie podstawy pozostają w stosunku $1 : 3$, zatem załóżmy, że $a = 3b$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długości krawędzi podstawy prostopadłościanu:

$a^2 + b^2 = d^2$

$(3b)^2 + b^2 = 24^2$

$10b^2 = 576$

$b^2 = \frac{576}{10}$

$b = \frac{24}{\sqrt{10}} = \frac{24\sqrt{10}}{10} = \frac{12\sqrt{10}}{5}$

$a = 3 \cdot \frac{12\sqrt{10}}{5} = \frac{36\sqrt{10}}{5}$

Wobec tego objętość prostopadłościanu jest równa:

$V = a \cdot b \cdot h$

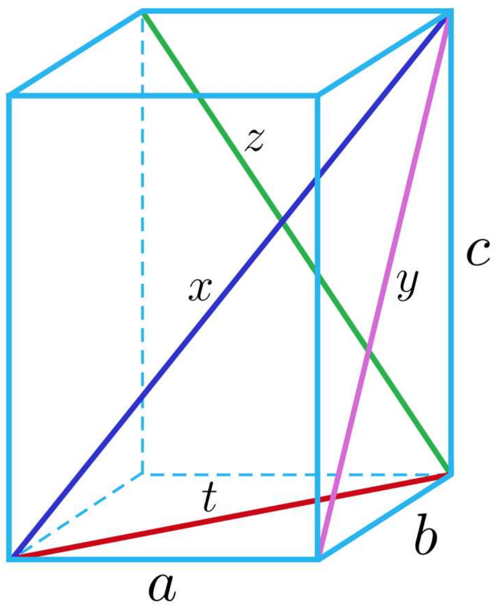
$V = \frac{36\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{12\sqrt{10}}{5} \cdot 10 = 1728$

Przykład 7

Wyznaczymy objętość prostopadłościanu z rysunku, gdy dane są długości przekątnych jego ścian bocznych, czyli odcinki y, z, t.

Rozwiązanie:

Narysujmy prostopadłościan i wprowadźmy oznaczenia, jak na rysunku.



Wiadomo, że objętość prostopadłościanu obliczamy ze wzoru:

$V = a \cdot b \cdot c$

Prostopadłościan o podanych długościach przekątnych ścian bocznych istnieje, gdy zachodzą następujące warunki:

$y^2 + t^2 > z^2$

$z^2 + t^2 > y^2$

$y^2 + z^2 > t^2$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że:

$a^2 + b^2 = t^2$

$b^2 + c^2 = y^2$

$a^2 + c^2 = z^2$

Korzystając z tych równości otrzymujemy długości krawędzi prostopadłościanu.

Zatem:

$a = \sqrt{\frac{t^2+z^2-y^2}{2}}$

$b = \sqrt{\frac{t^2+y^2-z^2}{2}}$

$c = \sqrt{\frac{y^2+z^2-t^2}{2}}$

Zatem objętość prostopadłościanu z rysunku wyraża się wzorem:

$V = a \cdot b \cdot c = \sqrt{\frac{t^2+z^2-y^2}{2} \cdot \frac{t^2+y^2-z^2}{2} \cdot \frac{y^2+z^2-t^2}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{(t^2+z^2-y^2) \cdot (t^2+y^2-z^2) \cdot (y^2+z^2-t^2)}{8}}$

Słownik

prostopadłościan

równoległościan, którego dwie dowolne ściany mające wspólną krawędź są prostopadłe

objętość

miara przestrzeni, którą zajmuje bryła w przestrzeni trójwymiarowej

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Zapoznaj się ze schematem interaktywnym dotyczącym obliczania objętości prostopadłościanu, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DabkzhYjj

Polecenie 2

Dany jest prostopadłościan, w którym przekątne ścian mają długości $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 3. Oblicz długość przekątnej oraz objętość tego prostopadłościanu.

Polecenie 3

Zbuduj algorytm obliczający objętość prostopadłościanu, mając dane: y - długość przekątnej ściany bocznej o bokach b, c; z - długość przekątnej ściany bocznej o bokach a, c; t - długość przekątnej podstawy.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

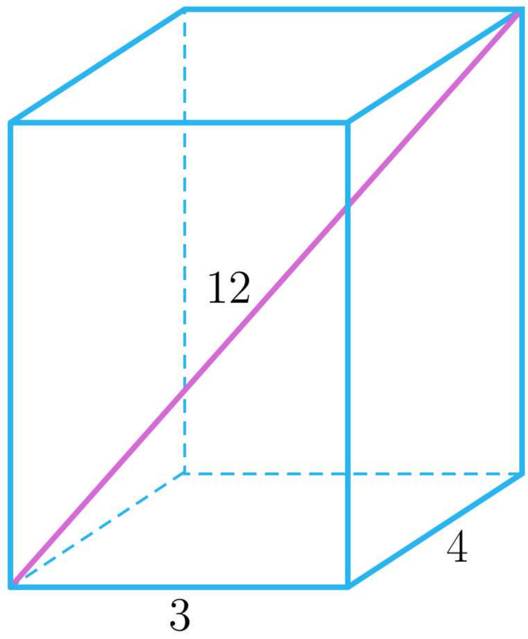
Ćwiczenie 1

Jeżeli suma długości krawędzi prostopadłościanu wynosi $152\ \mathrm{cm}$, a podstawa jest prostokątem o polu $192\ \mathrm{cm}^2$ i wymiarach różniących się o $4\ \mathrm{cm}$, to objętość prostopadłościanu wynosi:

- $1800\ \mathrm{cm}^3$
- $768\ \mathrm{cm}^3$
- $1920\ \mathrm{cm}^3$

Ćwiczenie 2

Na rysunku przedstawiono prostopadłościan.



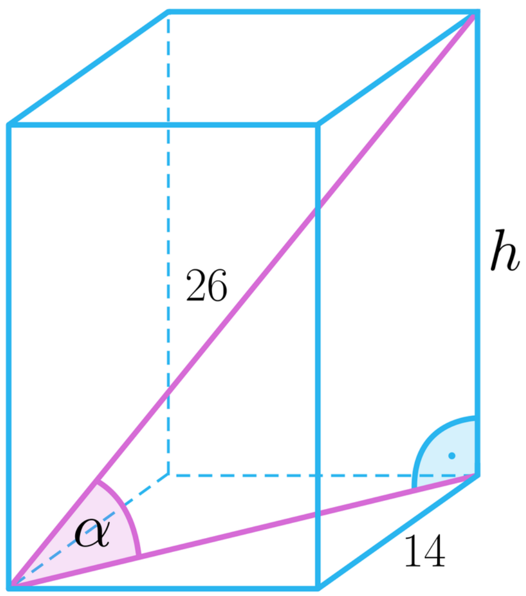
Zaznacz zdania, które są prawdziwe.

- [ ] Krawędź boczna prostopadłościanu ma długość $\sqrt{119}$.
- [ ] Objętość prostopadłościanu wynosi $12\sqrt{119}$.
- [ ] Krawędź boczna prostopadłościanu ma długość 12.
- [ ] Objętość prostopadłościanu wynosi 144.

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Na rysunku przedstawiono prostopadłościan. Wiadomo, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$.



Wstaw w tekst odpowiednie liczby.

Przekątna podstawy prostopadłościanu ma długość ______.

Druga krawędź podstawy prostopadłościanu ma długość ______.

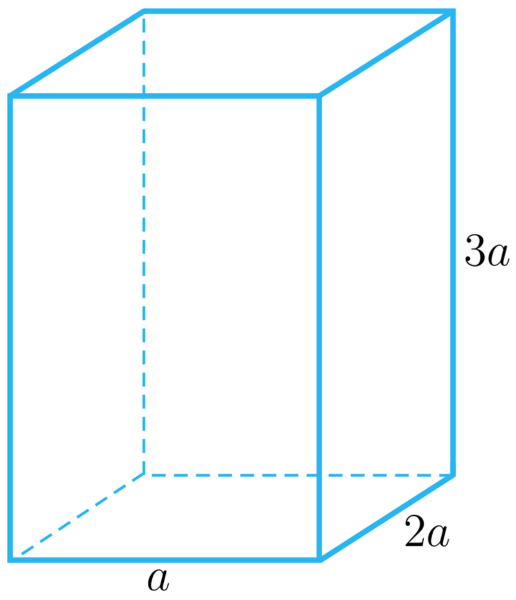
Krawędź boczna prostopadłościanu ma długość ______.

Objętość prostopadłościanu jest równa ______.

$4\sqrt{17}$ | $4\sqrt{13}$ | $224\sqrt{221}$ | $6\sqrt{13}$

Ćwiczenie 5

Wiadomo, że suma długości krawędzi prostopadłościanu z rysunku wynosi 192.

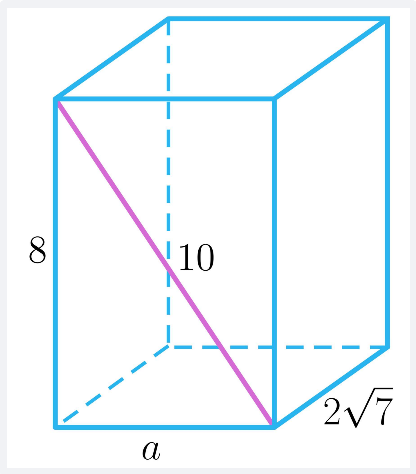


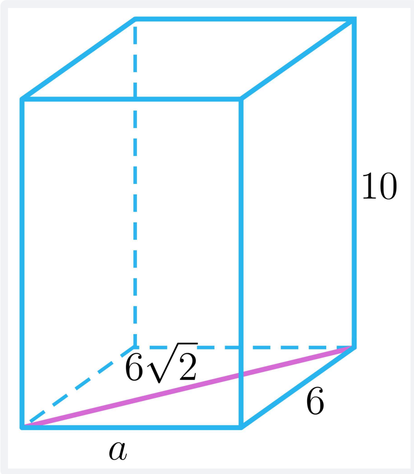
Wtedy objętość bryły jest równa:

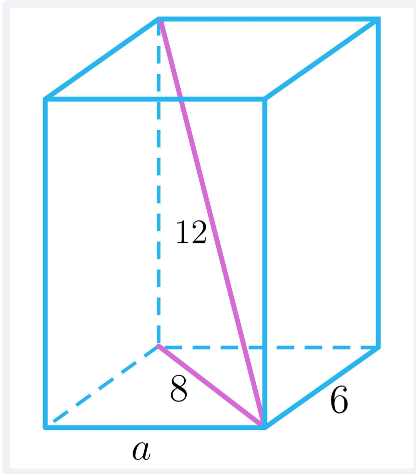
- 384
- 196608
- 3072

Ćwiczenie 6

Uporządkuj rysunki prostopadłościanów tak, aby objętości tych brył były ułożone malejąco:







Ćwiczenie 7

Wykaż, że jeśli przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratu ma długość d oraz kąt nachylenia tej przekątnej do płaszczyzny podstawy ma miarę α, to objętość tego prostopadłościanu wyraża się wzorem $V = \frac{d^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{2}$.

Ćwiczenie 8

Krawędzie podstawy prostopadłościanu oraz krawędź boczna, w podanej kolejności tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{3}{2}$, a suma ich długości wynosi $14\frac{1}{4}$. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Objętość prostopadłościanu

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
X. Stereometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza objętość prostopadłościanu, gdy dane są długości jego krawędzi;
- wyznacza długości odcinków w prostopadłościanie, gdy dana jest jego objętość;
- stosuje wiedzę o kątach między odcinkami i płaszczyznami w prostopadłościanie do wyznaczania jego wymiarów oraz objętości;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda krokodyla;

- burza mózgów;
- liga zadaniowa;
- praca z ekspertem.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Ustalenie celu lekcji i kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj". Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, zawartych w przykładach z sekcji „Przeczytaj". W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny". Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się". Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Kolejny etap to liga zadaniowa - uczniowie wykonują w grupach na czas ćwiczenia 3-5 z sekcji „Sprawdź się", a następnie omawiają zadania na forum.
5. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8 z sekcji „Sprawdź się" metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki" i „ożywia się" tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, udzielając im tym samym informacji zwrotnej.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Objętość prostopadłościanu”).

Materiały pomocnicze:

- Objętość prostopadłościanu.

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można wykorzystać w realizacji tematu „Długości odcinków w prostopadłościanie”.