Interpretacja geometryczna pochodnej

Interpretacja geometryczna pochodnej

Źródło: Marc Sendra Martorell, dostępny w internecie: https://unsplash.com/.

Pojęcie pochodnej funkcji znajduje zastosowanie m.in. w fizyce. Określa się, że przyspieszenie jest pochodną prędkości względem czasu, natężenie prądu jest pochodną ilości przepływającego ładunku względem czasu, a pojemność cieplna jest pochodną ilości ciepła względem temperatury. W materiale skupimy uwagę na geometrycznym znaczeniu pochodnej i jej związku ze współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji w podanym punkcie. Bazując na części teoretycznej i omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Zinterpretujesz pojęcie pochodnej funkcji pod kątem geometrycznym.
- Wyznaczysz współczynnik kierunkowy w równaniu stycznej do wykresu funkcji w podanym punkcie.
- Wykorzystasz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

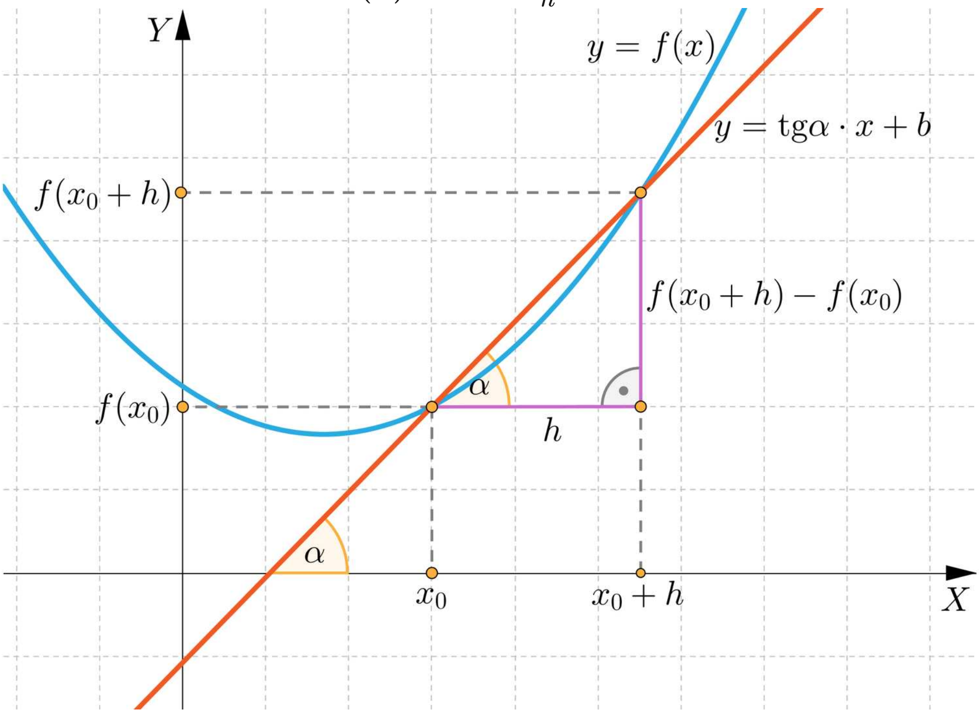
Przypomnijmy definicję ilorazu różnicowego funkcji.

Definicja: Iloraz różnicowy funkcji

Niech $f(x)$ oznacza dowolną funkcję określoną w otoczeniu punktu x_0.

Ilorazem różnicowym funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 dla przyrostu h zmiennej niezależnej x nazywamy wyrażenie

$$U(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$



Zdefiniujmy pojęcie pochodnej funkcji w punkcie.

Definicja: Pochodna funkcji w punkcie

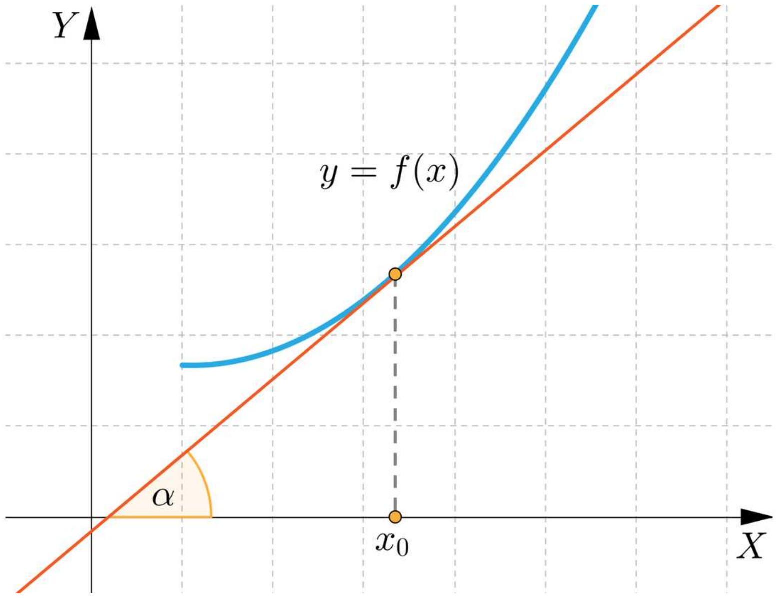
Niech $f(x)$ oznacza dowolną funkcję określoną w otoczeniu punktu x_0.

Jeżeli istnieje skończona granica $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, to tę granicę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy jako $f'(x_0)$.

Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0 jest równy pochodnej funkcji w tym punkcie.

Jeżeli styczna opisuje się równaniem $y = ax + b$, to $a = f'(x_0)$.



Ponieważ α jest kątem nachylenia stycznej do osi X, zatem zachodzi zależność

$$a = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

Przykład 1

Obliczymy wartość współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = x^3 + 1$ w punkcie $x_0 = -2$.

Rozwiązanie:

Ponieważ współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w punkcie x_0 jest równy pochodnej funkcji w tym punkcie, zatem:

$U(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3+1-(x^3+1)}{h} =$

$= \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+1-x^3-1}{h} = \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$

$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} U(h) = \lim_{h\to 0}\left(3{x_0}^2 + 3x_0h + h^2\right) = 3{x_0}^2$

Zatem:

$a = f'\Big(-2\Big) = 3\cdot(-2)^2 = 12$

Przykład 2

Wyznaczymy współrzędne punktu $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = x^2 + 2x$ jest równoległa do prostej określonej równaniem $y = 3x - 1$.

Rozwiązanie:

Niech styczna do wykresu funkcji f będzie zadana równaniem $y = ax + b$.

Proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe, gdy $a_1 = a_2$.

Zatem $a = 3$.

Wyznaczenie współrzędnych punktu $(x_0, f(x_0))$ przedstawimy w kilku krokach.

Mamy $a = 3$.

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2+2\cdot(x_0+h)-(x_0{}^2+2x_0)}{h}$

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x_0{}^2+2x_0h+h^2+2x_0+2h-x_0{}^2-2x_0}{h}$

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{2x_0h+h^2+2h}{h} = 2x_0 + 2$

Zatem do wyznaczenia wartości x_0 rozwiązujemy równanie:

$3 = 2x_0 + 2$

$x_0 = \frac{1}{2}$

Wobec tego współrzędne punktu styczności wynoszą:

$(x_0, f(x_0)) = \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

Przykład 3

Sprawdzimy, czy istnieje punkt o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = -x - 2$ jest nachylona do osi X pod kątem 45°.

Rozwiązanie:

Jeżeli prosta o równaniu $y = ax + b$ jest nachylona do osi X pod kątem 45°, to $a = \operatorname{tg} 45^\circ$.

Zatem $a = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Do wyznaczenia współrzędnych punktu $(x_0, f(x_0))$ rozwiązujemy równanie:

$a = f'(x_0)$

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-(x_0+h)-2-(-x_0-2)}{h}$

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-x_0-h-2+x_0+2}{h} = -1$

Jeżeli $a = f'(x_0)$, to:

$1 = -1$

Otrzymujemy sprzeczność, niezależnie od wyboru punktu x_0, wobec tego nie istnieje taki punkt.

Przykład 4

Wyznaczymy współrzędne punktu $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{x} - 3$ jest prostopadła do prostej określonej równaniem $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Rozwiązanie:

Niech prosta określona równaniem $y = ax + b$ będzie omawianą styczną.

Proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe, gdy $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Zatem $a = 2$.

Do wyznaczenia współrzędnych punktu $(x_0, f(x_0))$ rozwiązujemy równanie:

$a = f'(x_0)$

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-3-(\sqrt{x_0}-3)}{h}$

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{h\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x_0+h-x_0}{h\cdot(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}$

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Wobec tego:

$2 = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$

Zatem $x_0 = \frac{1}{16}$.

Wobec tego współrzędne punktu styczności wynoszą:

$(x_0, f(x_0)) = \left(\frac{1}{16}, \sqrt{\frac{1}{16}} - 3\right) = \left(\frac{1}{16}, -\frac{11}{4}\right)$

Przykład 5

Sprawdzimy, czy istnieje styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$ mająca współczynnik kierunkowy równy $a = -3$.

Rozwiązanie:

W tym celu wystarczy sprawdzić, czy istnieje taki punkt x_0, który spełnia zależność:

$a = f'(x_0)$

Zatem:

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h}$

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{(x_0+h) \cdot x_0}}{h}$

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{(x_0+h) \cdot x_0}}{h}$

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x_0+h) \cdot x_0} = -\frac{1}{{x_0}^2}$

Wobec tego:

$-3 = \frac{-1}{{x_0}^2}$

${x_0}^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ponieważ istnieje punkt x_0 spełniający równanie $a = f'(x_0)$, zatem istnieje styczna do wykresu funkcji mająca podany współczynnik kierunkowy.

Słownik

styczna do wykresu funkcji

prosta, będąca granicznym położeniem siecznych do wykresu funkcji f i przechodzących przez punkty o współrzędnych $(x_0, f(x_0))$ i $(x, f(x))$, gdy x dąży do x_0

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem samouczkiem dotyczącym interpretacji geometrycznej pochodnej, a następnie wykonaj poniższe polecenie.

Trwa wczytywanie danych...

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DDBo0WIDi

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej pochodnych.

Polecenie 2

Oblicz współczynnik kierunkowy a stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $x_0 = 2$, jeżeli:

a) $f(x) = -x + 2$

b) $f(x) = x^2 - x$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Wyznacz współrzędne punktu $(x_0, f(x_0))$, w którym styczna do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = -3x^2 + 1$ jest prostopadła do prostej określonej równaniem $y = 2x - 2$.

Ćwiczenie 7

Sprawdź, czy istnieje styczna do wykresu funkcji określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{x+1}$ mająca współczynnik kierunkowy równy $a = -4$.

Ćwiczenie 8

Oblicz wartość współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x) = e^x - 1$ w punkcie $x_0 = -2$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Interpretacja geometryczna pochodnej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres podstawowy. Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- interpretuje pojęcie pochodnej funkcji pod kątem geometrycznym;
- wyznacza współczynnik kierunkowy w równaniu stycznej do wykresu funkcji w podanym punkcie;
- wykorzystuje poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;

- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- metoda kota i myszy;
- drzewo pomysłów;
- burza mózgów.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Przybliżenie przez nauczyciela tematu: „Interpretacja geometryczna pochodnej" i celów lekcji. Określenie wiążących dla uczniów kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w grupach zapoznają się z przykładami zawartymi w sekcji „Przeczytaj". Ich zadaniem jest najpierw rozwiązanie danego zadania, a dopiero następnie porównanie jego rozwiązania. Grupy tworzą drzewa pomysłów, na których umieszczają przykłady. Po prezentacji prac grup powstaje jedno, wspólne dla całej klasy, drzewo pomysłów.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Film samouczek". Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się". Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
4. Kolejne ćwiczenia nr 3–5 z sekcji „Sprawdź się" uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inna parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi, zapisują problemy, które napotkali podczas rozwiązywania ćwiczeń.

5. Uczniowie realizują ćwiczenia 6–8 z sekcji „Sprawdź się” metodą kot i mysz. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej – role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem – procedura się powtarza.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Związek pochodnej z ciągłością funkcji

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Film samouczek” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiadomości dotyczących interpretacji geometrycznej pochodnej funkcji.