



Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na sześćcian różnicy

Źródło: Crissy Jarvis, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Poznaliśmy już kilka wzorów skróconego mnożenia. Każdy z nich, zatem i ten na sześćcian różnicy, ułatwia przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Ważne jest też wykorzystanie tych wzorów w rozkładzie wielomianów na czynniki.

W dobie komputerów mniej istotna jest zamiana mnożenia dużych liczb na sumę, ale pokażemy też takie zastosowania, bardziej ze względów historycznych, niż obecnie użytecznych.

Twoje cele

- Zastosujesz wzór skróconego mnożenia na sześćcian różnicy w obliczeniach arytmetycznych.
- Zastosujesz wzór skróconego mnożenia na sześćcian różnicy w przekształceniach algebraicznych.

Przeczytaj

Obliczenia arytmetyczne

Wzór skróconego mnożenia na sześcián różnicy dwóch wyrażeń można wykorzystać do szybkiego obliczenia sześciánów niektórych liczb.

Przykład 1

Aby obliczyć sześciány liczb 19, 38, 197 zapisujemy każdą z nich w postaci różnicy pełnych dziesiątek, setek lub tysięcy oraz liczby jednocyfrowej i korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia.

$$19^3 = (20 - 1)^3 = 20^3 - 3 \cdot 400 \cdot 1 + 3 \cdot 20 \cdot 1 - 1^3 = 6859$$

$$38^3 = (40 - 2)^3 = 40^3 - 9600 + 480 - 2^3 = 64000 - 9128 = 54872$$

$$\begin{aligned} 197^3 &= (200 - 3)^3 = 200^3 - 360000 + 5400 - 3^3 = \\ &= 8000000 - 354627 = 7645373 \end{aligned}$$

Przykład 2

W podobny sposób jak w powyższym przykładzie, obliczymy sześciány liczb mieszanych $2\frac{1}{3}$, $1\frac{3}{4}$.

$$\left(2\frac{1}{3}\right)^3 = \left(3 - \frac{2}{3}\right)^3 = 3^3 - 18 + 4 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 13 - \frac{8}{27} = 12\frac{19}{27}$$

$$\left(1\frac{3}{4}\right)^3 = \left(2 - \frac{1}{4}\right)^3 = 2^3 - 3 + \frac{3}{8} - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 5 + \frac{24}{64} - \frac{1}{64} = 5\frac{23}{64}$$

Przykład 3

Nie wykonując dodawania wykażemy, że liczba $M = \sqrt[3]{2197 - 1521 + 351 - 27}$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że $2197 = 13^3$ i $27 = 3^3$.

Sprawdzamy jeszcze, że $1521 = 3 \cdot 13^2 \cdot 3$ i $352 = 3 \cdot 13 \cdot 3^2$.

Wynika z tego, że $2197 - 1521 + 352 - 27 = (13 - 3)^3 = 10^3$.

Wtedy:

$$M = \sqrt[3]{2197-1521+351-27} = \sqrt[3]{10^3} = 10$$

Liczba 10 jest liczbą całkowitą, co należało udowodnić.

Przekształcenia algebraiczne

Wzór $(a - b)^3$ zastosujemy teraz do rozkładu na czynniki sumy algebraicznej w równaniu. Ułatwi to znacznie rozwiązanie równania stopnia trzeciego.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 0$.

Rozwiązanie:

Lewą stronę równania zapisujemy w postaci sześcianu różnicy.

$$x^3 - 15x^2 + 75x - 125 = 0$$

$$(x - 5)^3 = 0$$

Stąd:

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Rozwiązaniem równania jest liczba 5.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy lewą stronę równania tak, aby otrzymać „rozwinięcie” sześcianu różnicy i kwadratu różnicy.

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + (x^2 - 4x + 4) = 0$$

„Zwijamy” sumy w nawiasach odpowiednio w sześcian różnicy i kwadrat różnicy.

$$(x - 2)^3 + (x - 2)^2 = 0$$

Wyłączamy wspólny czynnik (czyli $(x - 2)^2$) przed nawias.

$$(x - 2)^2(x - 2 + 1) = 0$$

$$(x - 2)^2(x - 1) = 0$$

Zapisujemy równanie w postaci równoważnej alternatywy.

$$x - 2 = 0 \text{ lub } x - 1 = 0$$

$$x = 2 \text{ lub } x = 1$$

Odpowiedź:

Równanie ma dwa pierwiastki 1 i 2 (pierwiastek podwójny).

Wzór $(a - b)^3$ jest często przydatny w skracaniu wyrażeń wymiernych.

Przykład 6

Zapiszemy w najprostszej postaci wyrażenie

$$M = \frac{4x^3 - 24x^3y + 48x^3y^2 - 32x^3y^3}{(2 - 8y + 8y^2)(x^3 - 2x^3y)}$$

Rozwiązanie:

W liczniku wyłączamy przed nawias wspólny czynnik, czyli $4x^3$. W mianowniku z pierwszego nawiasu wyłączamy przed nawias wspólny czynnik, czyli 2. Z drugiego nawiasu wyłączamy wspólny czynnik poza nawias, czyli x^3 .

$$M = \frac{4x^3(1 - 6y + 12y^2 - 8y^3)}{2 \cdot (1 - 4y + 4y^2) \cdot x^3 \cdot (1 - 2y)}$$

Skracamy.

$$M = \frac{2 \cdot (1 - 6y + 12y^2 - 8y^3)}{(1 - 4y + 4y^2)(1 - 2y)}$$

Zauważmy, że $1 - 6y + 12y^2 - 8y^3 = (1 - 2y)^3$ i $1 - 4y + 4y^2 = (1 - 2y)^2$.

Zatem:

$$M = \frac{2 \cdot (1 - 2y)^3}{(1 - 2y)^2 \cdot (1 - 2y)}$$

Ponownie skracamy.

$$M = 2$$

Dowodzenie twierdzeń

Dowodząc twierdzenia zapisanego za pomocą wyrażeń arytmetycznych lub algebraicznych, nie zawsze łatwo jest rozpoznać, że warto skorzystać ze wzoru skróconego mnożenia na sześcián różnicy. W wielu wypadkach należy najpierw odpowiednio „rozpisać” dane wyrażenie.

Przykład 7

Wykażemy, że $\sqrt[3]{14\sqrt{2}+20} = 4 - \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Rozwiązanie:

Zapisujemy liczbę $14\sqrt{2} + 20$ w postaci, która pozwoli nam stwierdzić, że dane wyrażenie jest sześciánem pewnego wyrażenia.

$$14\sqrt{2} + 20 = 12\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 12 + 8 = 8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^3$$

Podobnie przekształcamy liczbę $20 - 14\sqrt{2}$. Tym razem „rozpisujemy” wyrażenie tak, aby pokazać, że jest to sześcián różnicy.

$$20 - 14\sqrt{2} = 8 + 12 - 12\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})^3$$

Stąd:

$$\sqrt[3]{14\sqrt{2}+20} = 4 - \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3} = 4 - \sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}$$

Ponieważ $\sqrt[3]{a} = a$, zatem:

$$2 + \sqrt{2} = 4 - 2 + \sqrt{2}$$

$$2 + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$$

W wyniku przekształceń równoważnych otrzymaliśmy równość prawdziwą, czyli równość $\sqrt[3]{14\sqrt{2}+20} = 4 - \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ jest tożsamością, co należało wykazać.

Przykład 8

Wykażemy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c równość $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$ jest tożsamością.

Rozwiązanie:

Przekształcimy lewą stronę równości, wykonując odpowiednie działania.

$$L = (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) + (b^3 - 3b^2c + 3c^2b - c^3) + \\ + (c^3 - 3c^2a + 3a^2c - a^3)$$

$$L = -3a^2b + 3ab^2 - 3b^2c + 3c^2b - 3c^2a + 3a^2c$$

$$L = 3 \cdot (-a^2b + ab^2 - b^2c + c^2b - c^2a + a^2c)$$

Przekształcimy teraz prawą stronę równości.

$$P = 3 \cdot (a - b)(bc - ba - c^2 + ca)$$

$$P = 3 \cdot (abc - ba^2 - ac^2 + a^2c - b^2c + b^2a + bc^2 - abc)$$

$$P = 3 \cdot (-ba^2 - ac^2 + a^2c - b^2c + b^2a + bc^2)$$

$$L = P$$

Słownik

wzór skróconego mnożenia na sześcian różnicy

sześcian różnicy dwóch wyrażeń jest równy sześcianowi pierwszego wyrażenia minus potrojony iloczyn kwadratu pierwszego wyrażenia przez drugie, plus potrojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez kwadrat drugiego, minus sześcian drugiego wyrażenia

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Spróbuj każdy przykład rozwiązać najpierw samodzielnie i dopiero porównać z animacją.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1AXrOSjz>

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego zastosowania wzoru skróconego mnożenia na sześćcian różnicy.

Polecenie 2

Wykaż, że $(a - b)^3 + (a - c)^3 + 3ab(a - b) + 3ac(a - c) = 2a^3 - b^3 - c^3$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Liczba $(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} - 1)^3$ jest

☐ ułamkiem właściwym

☐ niewymierna

☐ naturalna

☐ całkowita ujemna

Ćwiczenie 2



Uzupełnij obliczenia, przeciągając odpowiednie liczby.

$$27^3 = (\text{ } - 3)^3 = 27000 - \text{ } + 810 - \text{ } = \text{ }$$

27

30

19683

19680

810

8100

19673

31

81

28

29

Ćwiczenie 3



Dana jest liczba dodatnia a taka, że $a > \frac{1}{a}$ i $a - \frac{1}{a} = 2$. Zatem

☐ $a^3 - \frac{1}{a^3} = 8$

☐ $a^3 - \frac{1}{a^3} = 14$

☐ $a^3 - \frac{1}{a^3} = 24$

☐ $a^3 - \frac{1}{a^3} = 2$

Ćwiczenie 4



Wskaż wszystkie liczby, które nie są rozwiązaniem równania $x^2(x - 18) + 108(x - 2) = 0$.

☐ $-\sqrt{6}$

☐ $\sqrt{6}$

☐ 6

☐ -6

Ćwiczenie 5



Objętość sześcianu o boku długości $\sqrt{2} - 1$ jest równa

☐ $2\sqrt{2} - 1$

☐ 3

☐ 1

☐ $5\sqrt{2} - 7$

Ćwiczenie 6



Po uproszczeniu wyrażenie $\frac{12\sqrt[3]{3}-6\sqrt[3]{9}-5}{(2-\sqrt[3]{3})^3}$ ma postać

☐ 1

☐ $\frac{1}{3}$

☐ -1

☐ $2 + \sqrt[3]{3}$

Ćwiczenie 7



Wykaż, że wyrażenie $(x - 2)^3 - (x - 1)^3 + 3x(x - 3)$ dla każdej liczby rzeczywistej x przyjmuje wartość ujemną.

Ćwiczenie 8



Wiadomo, że $xy = 15$ i $x - y = 2$. Wyznacz $x^3 - y^3$ wiedząc, że $x > 0, y > 0$.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na sześcian różnicy

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $a^3 - b^3$, $a^n - b^n$.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- stosuje wzór skróconego mnożenia na sześcian różnicy w obliczeniach arytmetycznych
- stosuje wzór skróconego mnożenia na sześcian różnicy w przekształceniach algebraicznych
- przeprowadza rozumowania kilkietapowe prowadzące do udowodnienia tożsamości algebraicznych
- stosuje i tworzy strategie podczas rozwiązywania zadań w sytuacjach nietypowych

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- stoliki zadaniowe

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego
- indywidualna praca uczniów

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa miała do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają najważniejsze wiadomości dotyczące poznanych wzorów skróconego mnożenia, a w szczególności wzoru skróconego mnożenia na sześcián różnicy – w jaki sposób można uzasadnić prawdziwość wzorów, w jakich sytuacjach są przydatne.
2. Następnie, dla przypomnienia, rozwiązują wspólnie kilka przykładów, podanych przez nauczyciela, zamiany sześciánu różnicy na sumę algebraiczną.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, wspólnie z uczniami ustala kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą stolików zadaniowych. Na stolikach znajdują się przykłady rozwiązanych zadań pokazujących zastosowanie wzoru skróconego mnożenia na sześcián różnicy.
Na pierwszym stoliku zastosowanie wzoru w obliczeniach arytmetycznych, na drugim do przekształcania wzorów, na trzecim do dowodzenia twierdzeń (materiał taki, jak w sekcji „Przeczytaj”).
Każda grupa próbuje najpierw samodzielnie wykonać zadanie, a następnie porównuje z przedstawionym rozwiązaniem.
2. Grupy zapoznają się z Animacją – próbują rozwiązać podane tam zadania i porównują ich rozwiązania.
3. Uczniowie w grupach rozwiązują zaproponowane ćwiczenia interaktywne.

Faza podsumowująca:

1. Liderzy omawiają pracę swoich grup, zwracają uwagę na zadania, które sprawiały problem. Nauczyciel wyjaśnia wątpliwości, dzieli się swoimi obserwacjami.
2. Grupy oceniają swoją pracę, wskazując swoje mocne i słabe strony.

Praca domowa:

Uczniowie w domu mają za zadanie poszukania jeszcze innych przykładów zastosowania wzoru na sześciąt różnicy.

Materiały pomocnicze:**Wzory skróconego mnożenia stopnia trzeciego****Wskazówki metodyczne:**

Uczniowie mogą w parach lub indywidualnie w domu zapoznać się z animacją i wtedy zajęcia mogą być poprowadzone metodą odwróconej lekcji.