Przekroje ostrosłupa prawidłowego trójkątnego

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Aplet
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Przekroje ostrosłupa prawidłowego trójkątnego

Źródło: Nick Fewings, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

Obserwując światło wpadające przez okno i tworzące na posadzce rozmaite kształty, możemy zastanowić się, jaka figura powstałaby, gdyby promienie światła przenikały przez ostrosłup np. trójkątny prawidłowy wzdłuż jakiejś płaszczyzny. Przekonamy się, że powstanie wtedy przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego. Dzięki informacjom, jak powstaje przekrój ostrosłupa przechodzącą przez niego płaszczyzną, możesz ustalić, jaką figurą jest część wspólna płaszczyzny i bryły. Po ustaleniu powstałego przekroju możesz obliczyć pole tej figury.

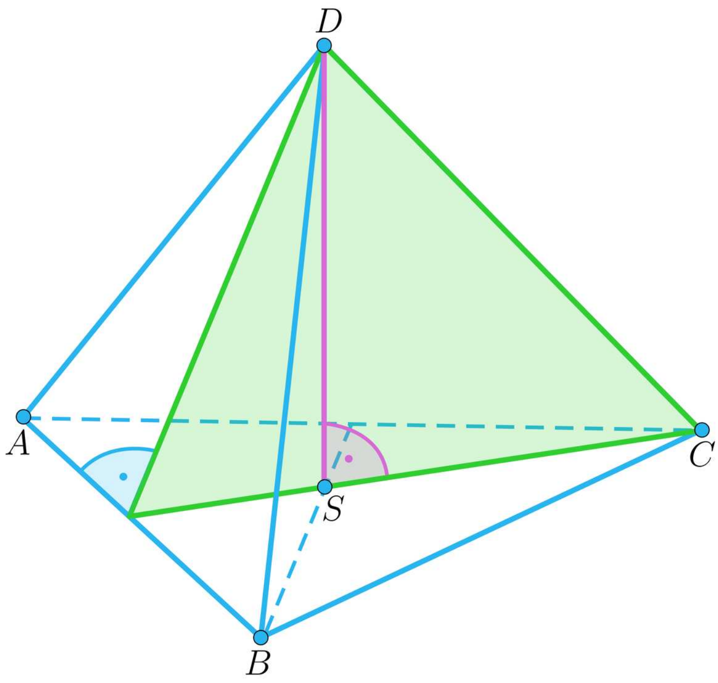
Twoje cele

- Wymienisz rodzaje przekrojów ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.
- Wyznaczysz figury płaskie będące przekrojem ostrosłupa.
- Obliczysz pola powstałych przekrojów.

Przeczytaj

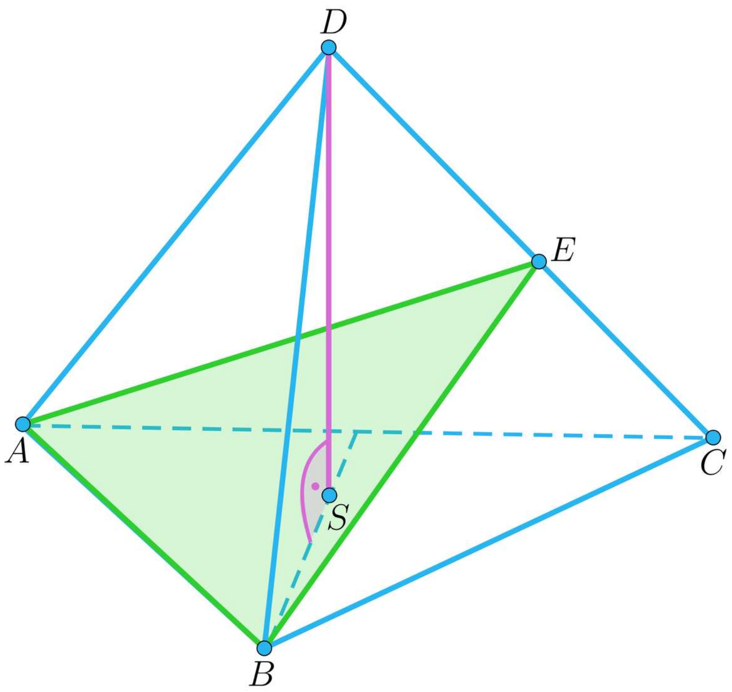
Omówimy przykłady przekrojów ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

1. Przekrój wyznaczony przez płaszczyznę zawierającą wysokość ściany bocznej i wysokość ostrosłupa.



Przekrojem jest trójkąt, którego podstawą jest wysokość podstawy ostrosłupa, a wysokością jest wysokość ostrosłupa. Jest to jednocześnie przekrój wyznaczony przez płaszczyznę zawierającą wysokość ściany bocznej i przeciwległą krawędź boczną.

2. Przekrój wyznaczony przez płaszczyznę zawierającą krawędź podstawy i przecinającą przeciwległą krawędź boczną.

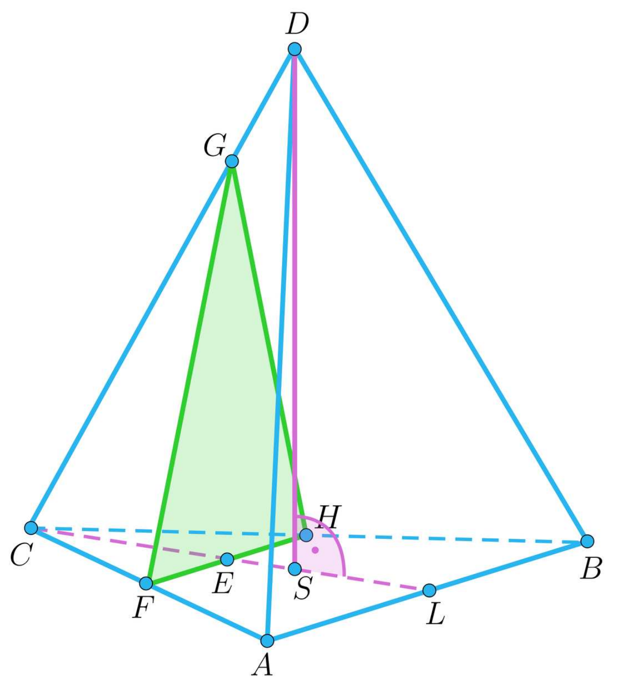


Przekrojem jest trójkąt równoramienny, którego podstawą jest krawędź podstawy, a wysokością odcinek łączący środek krawędzi podstawy z wierzchołkiem przekroju.

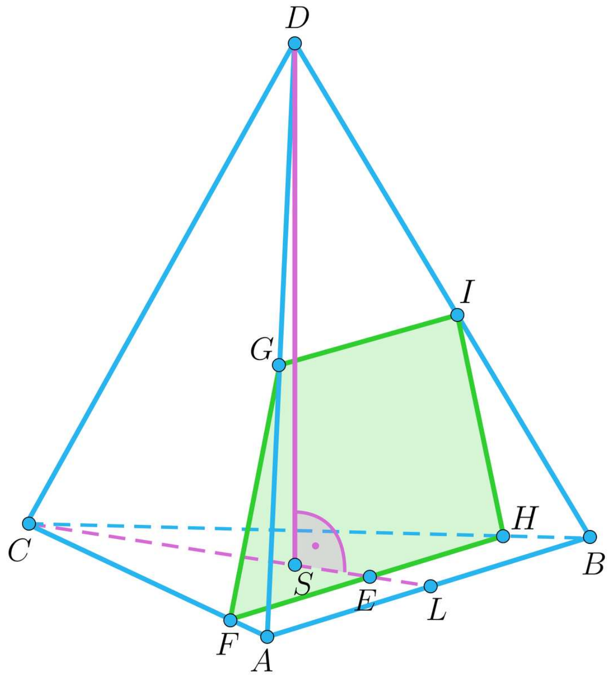
3. Przekrój wyznaczony przez płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny podstawy.

Przekrojem w tym przypadku może być:

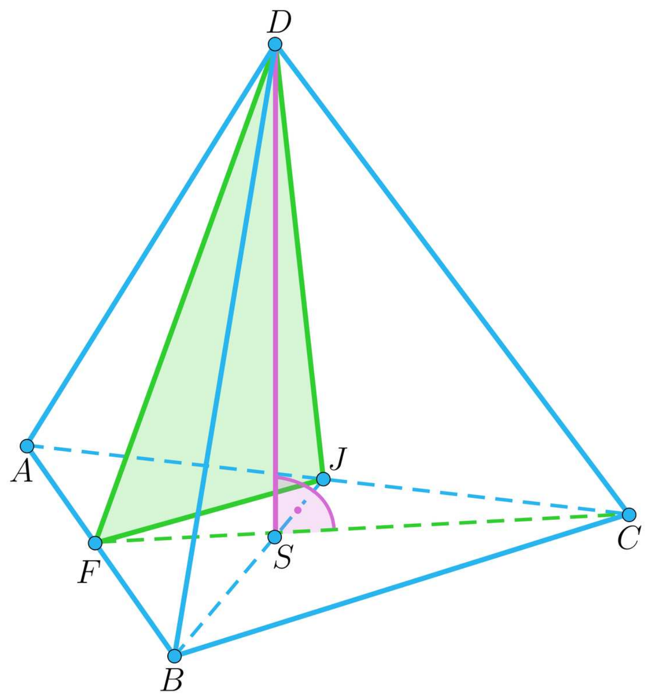
a) trójkąt, gdy płaszczyzna przechodzi przez jedną krawędź boczną,



b) trapez, gdy płaszczyzna przechodzi przez dwie krawędzie boczne.

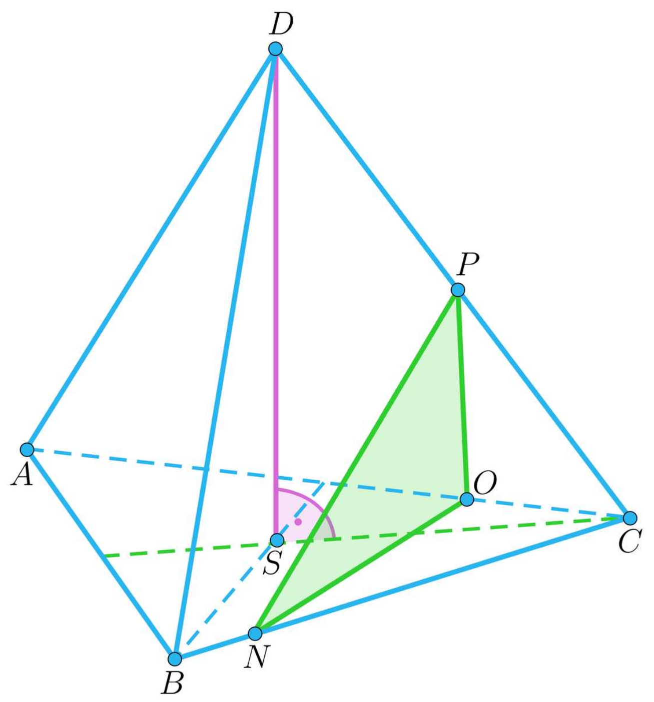


4. Przekrój wyznaczony przez płaszczyznę przechodzącą przez wysokości dwóch sąsiednich ścian bocznych lub środki dwóch krawędzi podstawy oraz wierzchołek ostrosłupa.



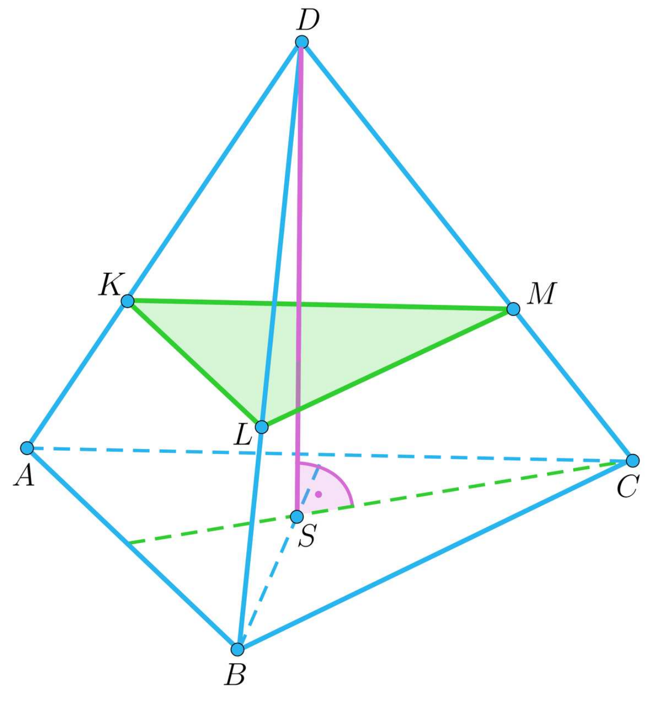
Przekrojem jest trójkąt równoramienny, którego podstawą jest odcinek łączący środki krawędzi podstawy, a wysokością jest odcinek łączący środek tego odcinka z wierzchołkiem ostrosłupa.

5. Przekrój wyznaczony przez płaszczyznę przechodzącą przez trzy różne punkty należące do krawędzi ostrosłupa wychodzących z jednego wierzchołka.



Przekrojem jest trójkąt, którego boki są zawarte odpowiednio w podstawie oraz ścianach bocznych ostrosłupa.

6. Przekrój wyznaczony przez płaszczyznę równoległą do płaszczyzny podstawy.



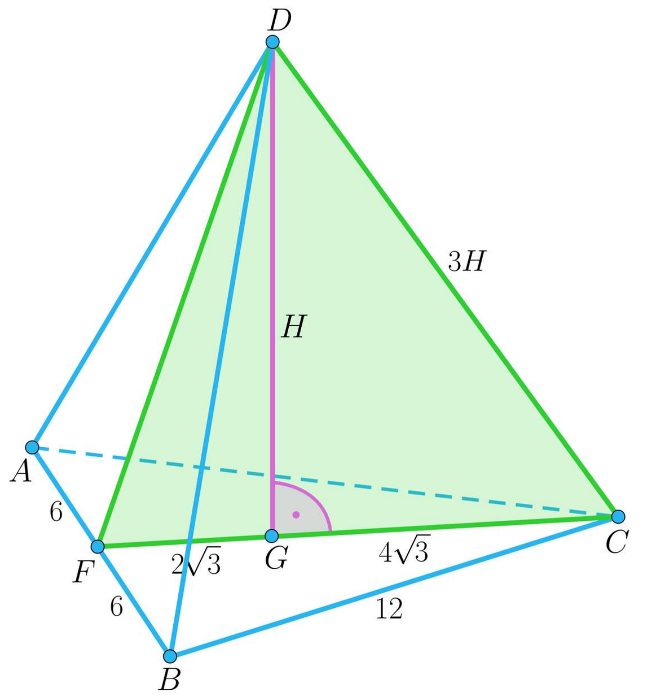
Przekrojem jest trójkąt równoboczny, którego bokami są odcinki równoległe do krawędzi podstawy ostrosłupa. Przekrój ten dzieli ostrosłup prawidłowy trójkątny na dwie bryły: ostrosłup prawidłowy trójkątny i ostrosłup ścięty.

Przykład 1

Obliczmy pole przekroju ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wyznaczonego przez płaszczyznę przechodzącą przez wysokość ściany bocznej i przeciwległą krawędź boczną ostrosłupa, w którym krawędź boczna jest trzy razy dłuższa od wysokości ostrosłupa a krawędź podstawy ma długość 12.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.



Zauważmy, że przekrojem ostrosłupa jest trójkąt FCD, którego podstawą jest wysokość podstawy ostrosłupa, a wysokością jest wysokość ostrosłupa.

Chcąc obliczyć pole tego trójkąta należy wyznaczyć długość odcinka FC, który jest podstawą tego trójkąta oraz długość wysokości H, czyli odcinka DG, który jest wysokością ostrosłupa i jednocześnie wysokością trójkąta.

Skoro długość krawędzi podstawy to 12, to wysokość podstawy FC ma długość $6\sqrt{3}$.

Punkt G dzieli odcinek FC na dwie części, z których dłuższa to $4\sqrt{3}$.

Do obliczenia długości H wykorzystamy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta GCD:

$$H^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = (3H)^2,$$

$$H^2 + 48 = 9H^2,$$

$$8H^2 = 48,$$

$H^2 = 6$,

$H = \sqrt{6}$.

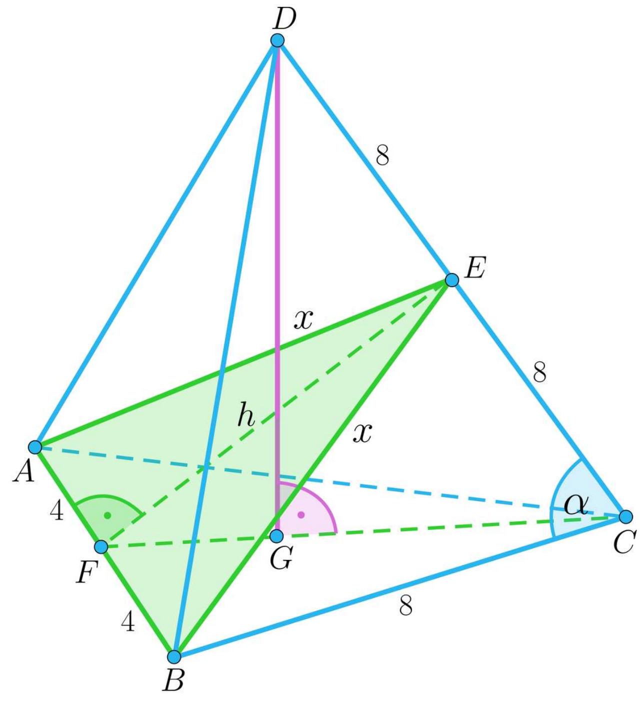
Zatem pole przekroju wynosi: $P = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{18} = 9\sqrt{2}$.

Przykład 2

Obliczmy pole przekroju ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wyznaczonego płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej, wiedząc, że krawędź podstawy ma długość $8\ \text{cm}$, a krawędź boczna jest od niej dwa razy dłuższa, zaś cosinus kąta między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ostrosłupa wynosi $0,25$.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.



Zauważ, że przekrojem jest trójkąt równoramienny ABE, którego podstawą jest krawędź podstawy ostrosłupa AB, a wysokością odcinek FE.

Chcąc obliczyć pole tego trójkąta należy wyznaczyć długość odcinka FE, który jest wysokością tego trójkąta. Długość odcinka FE wyznaczymy stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta FBE, po uprzednim wyznaczeniu długości odcinka x.

Wiemy, że $\cos\alpha = 0,25$, więc korzystając z twierdzenia cosinusów, dla trójkąta BCE obliczymy długość odcinka x:

$x^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cdot \cos \alpha,$

$x^2 = 128 - 2 \cdot 8^2 \cdot 0,25,$

$x^2 = 128 - 32,$

$x^2 = 96,$

$x = 4\sqrt{6}.$

Trójkąt FBE jest prostokątny, więc stosując twierdzenie Pitagorasa mamy:

$x^2 = h^2 + 4^2,$

$96 = h^2 + 16,$

$h^2 = 80,$

$h = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$

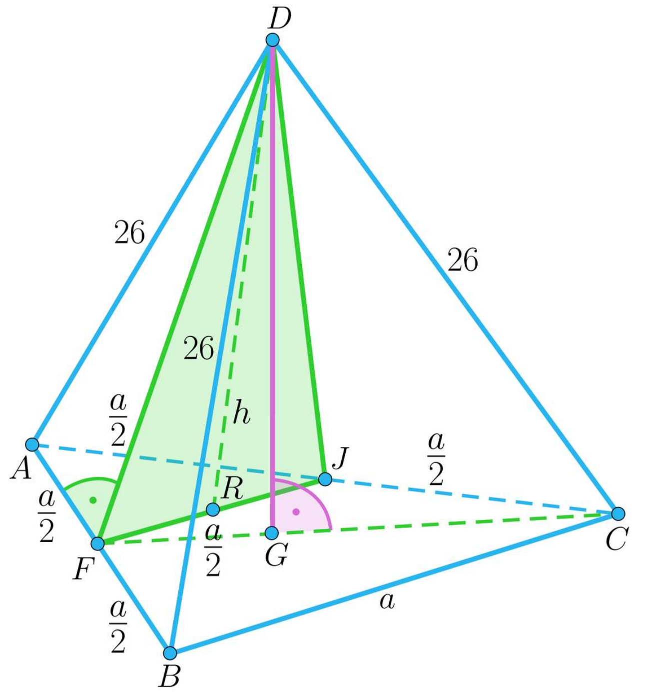
Zatem pole przekroju wynosi: $P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{5} = 16\sqrt{5} \; [\text{cm}^2]$.

Przykład 3

Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 26, a pole podstawy jest równe $100\sqrt{3}$. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch krawędzi podstawy oraz wierzchołek ostrosłupa. Wykażemy, że pole otrzymanego przekroju jest większe od 115.

Rozwiązanie:

Wykonajmy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.



Zauważmy, że przekrojem jest trójkąt równoramienny FJD, którego podstawą jest odcinek FJ, a wysokością jest odcinek RD.

Chcąc obliczyć pole tego trójkąta należy wyznaczyć długość odcinka FJ, który jest połową odcinka BC.

Oznaczmy odcinek $BC = a$, odcinek $FJ = \frac{a}{2}$, odcinek $RD = h$.

Wiemy, że pole podstawy jest równe $100\sqrt{3}$. Wykorzystamy wzór na pole trójkąta równobocznego.

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

$100\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

$400 = a^2$,

$a = 20$.

Odcinek $FJ = \frac{a}{2} = 10$ oraz $FB = 10$.

Odcinek FD jest wysokością ściany bocznej, więc trójkąt FBD jest prostokątny. Stosując twierdzenie Pitagorasa mamy:

$|FD|^2 = |BD|^2 - |FB|^2$,

$|FD|^2 = 26^2 - 10^2$,

$|FD|^2 = 576$,

$|FD| = 24$.

Wiemy, że trójkąt FJD jest równoramienny. Jego podstawą jest odcinek FJ, a wysokością odcinek RD. Stosując twierdzenie Pitagorasa mamy:

$|RD|^2 = |FD|^2 - |FR|^2$,

$|RD|^2 = 24^2 - 5^2$,

$|RD|^2 = 551$,

$|RD| = \sqrt{551}$,

$h = \sqrt{551}$.

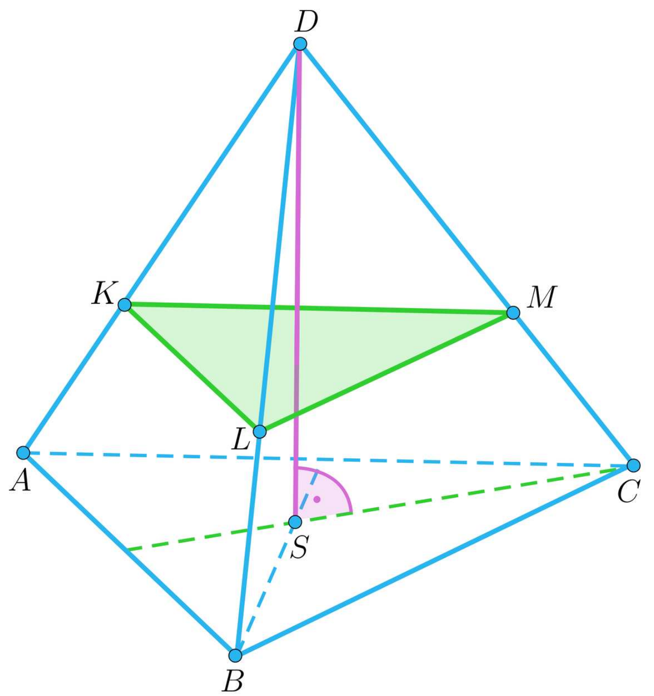
Zatem pole przekroju wynosi: $P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{551} = 5\sqrt{551} \approx 117,37$. Liczba ta jest większa niż 115, co kończy dowód.

Przykład 4

Ostrosłup prawidłowy trójkątny o polu podstawy S przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi bocznych. Wyznaczymy pole otrzymanego przekroju.

Rozwiązanie

Wykonajmy rysunek z odpowiednimi oznaczeniami.



Wiemy, że punkty K, L, M są środkami krawędzi bocznych ostrosłupa. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że każdy z odcinków KL, LM, KM jest

> równoległy odpowiednio do odcinków AB, BC, AC oraz $\frac{KL}{AB} = \frac{LM}{BC} = \frac{KM}{AC} = \frac{1}{2}$. Stąd wniosek, że trójkąty KLM i ABC są podobne (cecha bok, bok, bok), skala podobieństwa $k = \frac{1}{2}$. Wiemy, że pola figur podobnych są w stosunku k^2, $\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4}$, stąd $P_{KLM} = \frac{1}{4} \cdot S$.

Słownik

> **przekrój**
>
> figura płaska będąca częścią wspólną trójwymiarowej bryły i płaszczyzny przecinającej tę bryłę.

Aplet

Polecenie 1

Zapoznaj się z poniższym apletem GeoGebry. Zauważ, jak zmienia się kształt przekroju ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wyznaczonego przez płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny podstawy. Przesuwaj w tym celu punktem E.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DwvfFddfD

Polecenie 2

Skorzystaj z powyższego apletu GeoGebry i ustaw punkt E tak, aby wierzchołek przekroju G pokrył się punktem D. Oblicz pole otrzymanego przekroju, gdy krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 6 a wysokość ostrosłupa ma długość 8.

Polecenie 3

Skorzystaj z powyższego apletu GeoGebry i ustaw punkt E tak, aby $CE : CL = 1 : 3$. Oblicz pole otrzymanego przekroju, gdy pole postawy wynosi $36\sqrt{3}$, a wysokość ostrosłupa 15.

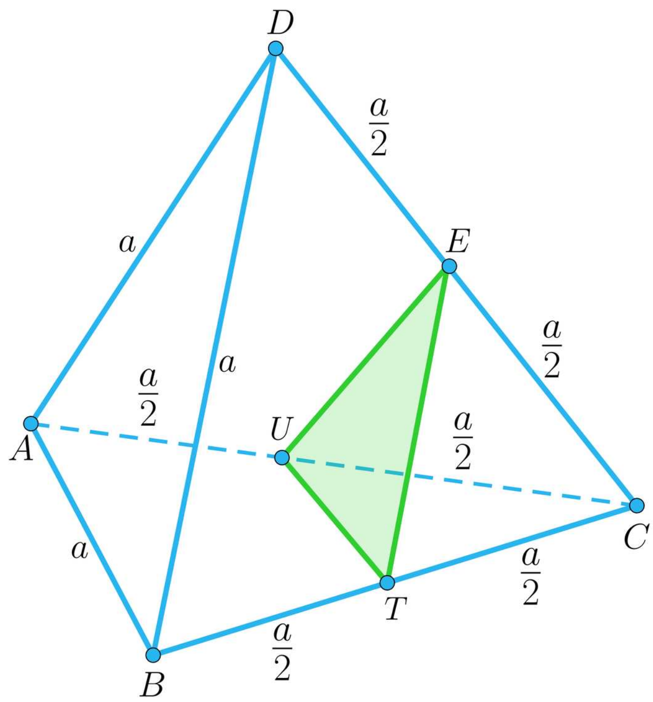
Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

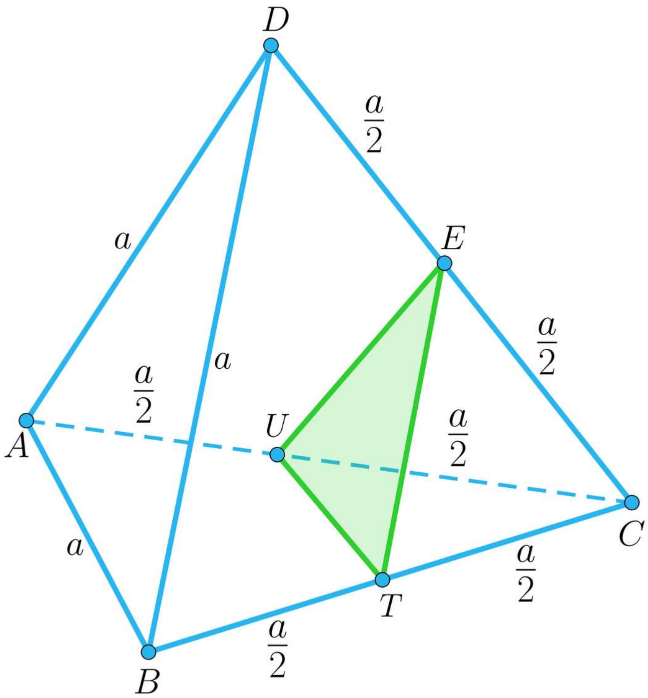
Ćwiczenie 2

Przyjrzyj się rysunkowi i uzupełnij zdania. Przeciągnij odpowiednie słowa lub kliknij w luki, aby wyświetlić listę i wybrać prawidłową odpowiedź.



Ćwiczenie 3

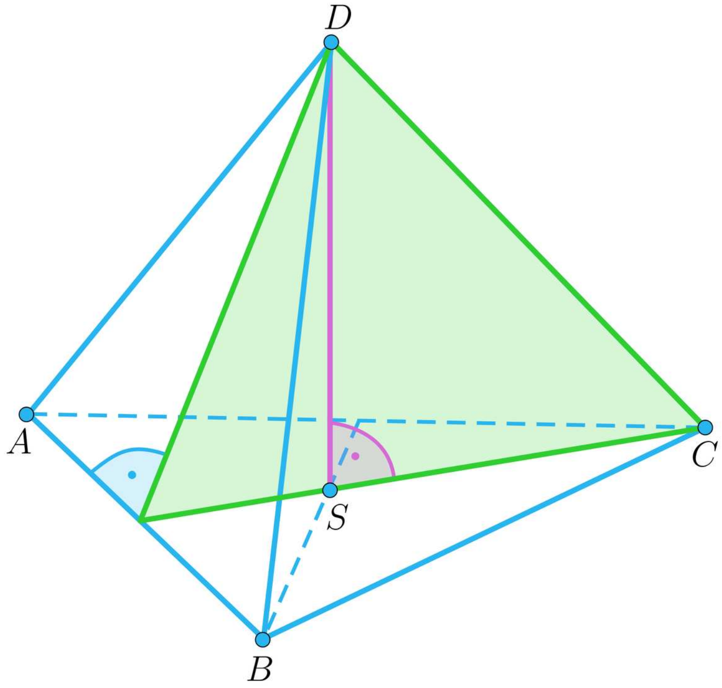
Pole przekroju przedstawionego na rysunku wynosi:



Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną zawierającą wysokość ściany bocznej i wysokość podstawy ma pole $15\sqrt{3}$, wysokość ostrosłupa ma długość 5. Objętość ostrosłupa wynosi:



Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy długości 10 i objętości $75\sqrt{2}$. Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą wysokość podstawy oraz wierzchołek ostrosłupa.

Ćwiczenie 8

Ostrosłup prawidłowy trójkątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy długości a i środek wysokości ostrosłupa. Płaszczyzna ta jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Biernacka

Przedmiot: Matematyka

Temat: Przekroje ostrosłupa prawidłowego trójkątnego

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wskazuje różne rodzaje przekrojów ostrosłupa prawidłowego trójkątnego,
- wyznacza przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego zgodnie z poleceniem,
- oblicza pole przekroju ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm
- konektywizm

Metody i techniki nauczania:

- analiza pomysłów,
- pokaz,
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu

Środki dydaktyczne:

- przykłady brył z przekrojami ostrosłupa prawidłowego trójkątnego,
- komputery z dostępem do internetu,
- projektor multimedialny.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

- Zaciekawienie ucznia przekrojami ostrosłupów prawidłowych trójkątnych.
- Pokazanie bryły bez przekrojów (czysta bryła) i odpowiedź na pytanie, co to znaczy przekrój bryły, jaki kształt mogą mieć te przekroje. Burza mózgów.
- Po przeanalizowaniu pomysłów uczniów, pokazanie bryły z wyznaczonymi przekrojami.

Faza realizacyjna:

- Przedstawienie apletu GeoGebry, w którym pokazana jest wizualizacja różnych przekrojów ostrosłupa.
- Podział klasy na grupy. Uczniowie w grupach omawiają, jak policzyć pola otrzymanych przekrojów. Analizują poszczególne przekroje, które są zawarte w sekcji Przeczytaj. Analiza pomysłów poszczególnych grup.
- Uczniowie także w grupach analizują przykłady zadań, w których wykorzystujemy przekroje. Wspólnie wyjaśniają sposób ich rozwiązania.
- Rozwiązanie ćwiczeń z serii sprawdź się, które pokażą poziom zrozumienia zagadnienia (1-4).

Faza podsumowująca:

Podsumowane tematu lekcji. Omówienie ewentualnych problemów powstałych podczas rozwiązywania ćwiczeń interaktywnych.

Praca domowa:

Rozwiązanie ćwiczeń nr 5 i 6.

Materiały pomocnicze:

Ostrosłup i jego własności

Wskazówki metodyczne:

Nauczyciel wykorzystuje aplet do pokazania przekrojów ostrosłupów, co wpływa na kształtowanie wyobraźni przestrzennej uczniów.

Aplet może być również wykorzystany podczas realizacji lekcji „Ostrosłup i jego elementy”.