Rozmieszczenia kul

Źródło: Klara Kulikova, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tym materiale pokażemy, jak budować modele kombinatoryczne w zadaniach dotyczących rozmieszczeń.

Do zliczania wszystkich sposobów rozmieszczenia, które spełniają warunki określone w treści zadania będziemy stosować poznane reguły kombinatoryczne, m.in. regułę włączeń i wyłączeń.

Twoje cele

- Nauczysz się, jak rozwiązywać zadania dotyczące rozmieszczeń nierozróżnialnych przedmiotów w parami różnych pojemnikach,
- Będziesz doskonalić umiejętności dotyczące modelowania matematycznego w doświadczeniach polegających na rozmieszczaniu jednakowych przedmiotów w parami różnych pojemnikach, a także na rozmieszczaniu parami różnych przedmiotów w jednakowych pojemnikach,
- Wykorzystując poznane wcześniej reguły kombinatoryczne nauczysz się obliczać, ile jest rozmieszczeń spełniających określone warunki.

Przeczytaj

Poniżej prezentujemy omówienie przykładowych zadań dotyczących rozmieszczeń.

Z zasady ilustracją dla omawianego typu problemu jest rozmieszczanie kul w pojemnikach. Należy mieć na uwadze, że zadanie dotyczące rozmieszczeń może być też sformułowane w innym kontekście - kluczowa jest wtedy umiejętność przeprowadzenia analizy treści zadania tak, aby rozpoznać typ rozpatrywanego w nim rozmieszczenia.

Zaczynamy od problemów odwołujących się do doświadczeń polegających na rozmieszczaniu parami różnych obiektów (np. ponumerowanych kul) w parami różnych pojemnikach (np. różniących się kolorem).

Przykład 1

Rozmieszczamy 7 kul ponumerowanych od 1 do 7 w czterech pojemnikach: białym, niebieskim, czerwonym oraz zielonym. Obliczymy, ile jest sposobów rozmieszczenia tych kul tak, aby spełniony był warunek:
a) w zielonym pojemniku znajdą się dokładnie 3 kule,
b) pojemnik biały będzie pusty,
c) pojemnik biały będzie pusty lub pojemnik niebieski będzie pusty,
d) w każdym pojemniku będzie co najmniej 1 kula.

Rozwiązanie

Oznaczmy:

- przez k_i – kulę z numerem i, gdzie $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$,
- przez b – pojemnik biały,
- przez n – pojemnik niebieski,
- przez cz – pojemnik czerwony,
- przez z – pojemnik zielony.

Zauważmy, że rozpatrywane doświadczenie możemy opisać w następujący sposób: każdej kuli ze zbioru $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7\}$ przypisujemy dokładnie jeden z pojemników ze zbioru $\{b, n, cz, z\}$, do którego ta kula została wrzucona.
Wynika stąd, że każdy wynik rozpatrywanego rozmieszczenia kul możemy zapisać jako siedmioelementowy ciąg $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7)$, w którym $k_i \in \{b, n, cz, z\}$, dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (zatem wszystkich wyników rozpatrywanego rozmieszczenia kul jest $4^7 = 16384$).

a) W zielonym pojemniku znajdą się dokładnie 3 kule wtedy i tylko wtedy, gdy w ciągu $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7)$ na dokładnie 3 miejscach wystąpi element z.

Ponieważ takie 3 miejsca w ciągu wybierzemy z 7 dostępnych na tyle sposobów, ile jest 3 –elementowych kombinacji zbioru 7–elementowego, czyli $\binom{7}{3} = 35$, a każdemu z pozostałych 4 wyrazów ciągu przypiszemy jeden z trzech pojemników b, n, cz na $3^4 = 81$ sposobów, więc korzystając z reguły mnożenia obliczamy, że wszystkich możliwości jest w tym przypadku $\binom{7}{3} \cdot 3^4 = 35 \cdot 81 = 2835$.

Uwaga. Gdybyśmy dodatkowo zażyczyli sobie, żeby w zielonym pojemniku znalazły się konkretne 3 kule, np. te z numerami 1, 2 oraz 3, to możliwości rozmieszczenia kul byłoby, oczywiście, $3^4 = 81$.

b) Pojemnik biały będzie pusty wtedy i tylko wtedy, gdy w ciągu $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7)$ nie wystąpi element b, czyli gdy każdemu z wyrazów tego ciągu przypiszemy jeden z elementów trzyelementowego zbioru $\{n, cz, z\}$. Wynika stąd, że w tym przypadku jest $3^7 = 2187$ możliwości.

c) Oznaczmy:

- przez A – zbiór wszystkich rozmieszczeń, w których pojemnik biały będzie pusty,
- przez B – zbiór wszystkich rozmieszczeń, w których pojemnik niebieski będzie pusty.

Mamy obliczyć $|A \cup B|$ - liczbę takich rozmieszczeń, że pojemnik biały będzie pusty lub pojemnik niebieski będzie pusty.

Z obliczeń przeprowadzonych w poprzednim podpunkcie wiemy, że $|A| = 3^7 = 2187$.
Rozumując podobnie obliczymy, że $|B| = 3^7 = 2187$.
Ponadto, oba pojemniki: biały oraz niebieski będą puste wtedy i tylko wtedy, gdy w ciągu $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7)$ nie wystąpi żaden z elementów b, n, czyli gdy każdemu z wyrazów tego ciągu przypiszemy jeden z elementów dwuelementowego zbioru $\{cz, z\}$.
Zatem $|A \cap B| = 2^7 = 128$.

Wobec tego
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3^7 + 3^7 - 2^7 = 2 \cdot 2187 - 128 = 4246$.

d) Zauważmy, że wszystkie rozmieszczenia (a jest ich ogółem 4^7) możemy podzielić na dwie rozłączne grupy:
grupa pierwsza – takie rozmieszczenia, że w każdym pojemniku będzie co najmniej jedna kula (ich liczbę mamy wyznaczyć),
grupa druga – takie rozmieszczenia, że co najmniej jeden z czterech pojemników będzie pusty.

Oznaczmy:

- przez A – zbiór wszystkich rozmieszczeń, w których pojemnik biały będzie pusty,
- przez B – zbiór wszystkich rozmieszczeń, w których pojemnik niebieski będzie pusty,
- przez C – zbiór wszystkich rozmieszczeń, w których pojemnik czerwony będzie pusty,
- przez D – zbiór wszystkich rozmieszczeń, w których pojemnik zielony będzie pusty.

Wówczas liczbę elementów drugiej grupy opiszemy jako $|A \cup B \cup C \cup D|$, a więc szukana liczba elementów pierwszej grupy jest równa
$4^7 - |A \cup B \cup C \cup D|$.

Na podstawie spostrzeżeń poczynionych wcześniej obliczamy, że:
$|A| = |B| = |C| = |D| = 3^7$, a więc $|A| + |B| + |C| + |D| = 4 \cdot 3^7$,
$|A \cap B| = |A \cap C| = |A \cap D| = |B \cap C| = |B \cap D| = |C \cap D| = 2^7$, a więc
$|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D| = 6 \cdot 2^7$.

Zauważamy ponadto, że:

- jest tylko jedna możliwość rozmieszczenia kul w przypadku, gdy dokładnie 3 pojemniki sa puste, skąd
  $|A \cap B \cap C| = |A \cap B \cap D| = |A \cap C \cap D| = |B \cap C \cap D| = 1$, a więc
  $|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| = 4 \cdot 1$,
- nie jest możliwe, żeby rozmieścić kule tak, aby każdy z 4 pojemników był pusty, co oznacza, że $|A \cap B \cap C \cap D| = 0$.

Zatem, korzystając z reguły włączeń i wyłączeń, otrzymujemy, że
$|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \cdot 3^7 - 6 \cdot 2^7 + 4 \cdot 1 = 8748 - 768 + 4 = 7984$.
Stąd $4^7 - |A \cup B \cup C \cup D| = 16384 - 7984 = 8400$.

Wobec tego otrzymujemy, że jest 8400 takich rozmieszczeń rozpatrywanych kul, że w każdym pojemniku będzie co najmniej 1 kula.

Uwaga. Rozwiązanie zadania w podpunktu d) można przeprowadzić rozpatrując rozłączne przypadki ze względu na rozkład liczby kul w pojemnikach.

Jeśli chcemy rozmieścić 7 ponumerowanych kul w 4 różnych pojemnikach tak, aby w każdym z nich znalazła się co najmniej 1 kula, to możliwe są trzy następujące przypadki:
(1) w jednym z pojemników znajdą się 4 kule (taki pojemnik wybierzemy na 4 sposoby, a kule, które w nim umieścimy – na $\binom{7}{4} = 35$ sposobów), a w każdym z pozostałych 3 pojemników będzie po 1 kuli (te 3 kule rozmieścimy w trzech pozostałych pojemnikach na $3! = 6$ sposobów); korzystając z reguły mnożenia obliczamy, że w tym przypadku jest

$4 \cdot \binom{7}{4} \cdot 3! = 4 \cdot 35 \cdot 6 = 840$ możliwości,

(2) w jednym z pojemników znajdą się 3 kule (taki pojemnik wybierzemy na 4 sposoby, a kule, które w nim umieścimy – na $\binom{7}{3} = 35$ sposobów), w innym znajdą się 2 kule (taki pojemnik wybierzemy na 3 sposoby, a kule, które w nim umieścimy – na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów), a w każdym z pozostałych 2 pojemników będzie po 1 kuli (te 2 kule rozmieścimy w dwóch pozostałych pojemnikach na 2 sposoby); korzystając z reguły mnożenia obliczamy, że w tym przypadku jest

$4 \cdot \binom{7}{3} \cdot 3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 = 4 \cdot 35 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 5040$ możliwości,

(3) w jednym z pojemników znajdzie się 1 kula (taki pojemnik wybierzemy na 4 sposoby, a kulę, którą w nim umieścimy – na 7 sposobów), a w każdym z pozostałych 3 pojemników będą po 2 kule (te 6 kul rozmieścimy w trzech pozostałych pojemnikach na $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 15 \cdot 6 = 90$ sposobów); korzystając z reguły mnożenia obliczamy, że w tym przypadku jest $4 \cdot 7 \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 4 \cdot 7 \cdot 15 \cdot 6 = 2520$ możliwości.

Korzystając z reguły dodawania, obliczamy, że jest $840 + 5040 + 2520 = 8400$ takich rozmieszczeń rozpatrywanych kul, że w każdym pojemniku będzie co najmniej 1 kula.

Przykład 2

Rozmieszczamy 7 kul, ponumerowanych od 1 do 7, w siedmiu pojemnikach, ponumerowanych od 1 do 7. Obliczymy, ile jest sposobów rozmieszczenia tych kul tak, aby:

a) dokładnie 4 pojemniki pozostały puste,

b) dokładnie 2 pojemniki pozostały puste.

Rozwiązanie

a) Zauważmy, że:

- 4 pojemniki, w których nie znajdzie się żadna kula wybierzemy spośród wszystkich siedmiu na tyle sposobów, ile jest 4–elementowych kombinacji zbioru 7–elementowego, czyli $\binom{7}{4} = 35$,
- w każdym z pozostałych trzech pojemników musimy rozmieścić po co najmniej 1 kuli spośród wszystkich 7 dostępnych; rozumując podobnie, jak w poprzednim przykładzie i stosując regułę włączeń i wyłączeń obliczamy, że jest $3^7 - 3 \cdot 2^7 + 3 = 1806$ wszystkich takich rozmieszczeń.

Wobec tego, na podstawie reguły mnożenia obliczamy, że jest
$\binom{7}{4} \cdot \left(3^7 - 3 \cdot 2^7 + 3\right) = 35 \cdot 1806 = 63210$ rozmieszczeń, które spełniają warunki zadania.

b) Rozwiązanie przedstawimy dwoma sposobami.

I **sposób:**

Zauważmy, że:

- 2 pojemniki, w których nie znajdzie się żadna kula wybierzemy spośród wszystkich siedmiu na tyle sposobów, ile jest 2–elementowych kombinacji zbioru 7–elementowego, czyli $\binom{7}{2} = 21$,
- w każdym z pozostałych pięciu pojemników musimy rozmieścić po co najmniej 1 kuli spośród wszystkich 7 dostępnych; stosując regułę włączeń i wyłączeń obliczamy, że jest $5^7 - 5 \cdot 4^7 + 10 \cdot 3^7 - 10 \cdot 2^7 + 5 = 16800$ wszystkich takich rozmieszczeń.

Wobec tego, na podstawie reguły mnożenia obliczamy, że jest
$\binom{7}{2} \cdot \left(5^7 - 5 \cdot 4^7 + 10 \cdot 3^7 - 10 \cdot 2^7 + 5\right) = 21 \cdot 16800 = 352800$ rozmieszczeń, które spełniają warunki zadania.

II **sposób:**

Dwa pojemniki, w których nie znajdzie się żadna kula wybierzemy spośród wszystkich siedmiu na tyle sposobów, ile jest 2–elementowych kombinacji zbioru 7–elementowego, czyli $\binom{7}{2} = 21$.

Zauważmy, że rozmieszczenie 7 kul w 5 pojemnikach zgodnie z warunkami zadania możliwe jest w następujących dwóch rozłącznych przypadkach:
(1) w jednym z pojemników znajdą się 3 kule (ten pojemnik wybierzemy na 5 sposobów, a kule – na $\binom{7}{3} = 35$ sposobów), a w pozostałych 4 pojemnikach rozmieścimy po 1 kuli (co można zrobić na $4! = 24$ sposoby); w tym przypadku jest więc
$5 \cdot \binom{7}{3} \cdot 4! = 5 \cdot 35 \cdot 24 = 4200$ możliwych rozmieszczeń,

(2) w dwóch pojemnikach znajdą się po 2 kule (te pojemniki wybierzemy na $\binom{5}{2} = 10$ sposobów, a kule rozmieścimy w nich na $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} = 21 \cdot 10 = 210$ sposobów),
a w pozostałych 3 pojemnikach rozmieścimy po 1 kuli (co można zrobić na $3! = 6$

sposobów); w tym przypadku jest więc $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = 10 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 6 = 12600$ możliwych rozmieszczeń.

Na podstawie reguły mnożenia oraz reguły dodawania obliczamy, że jest
$\binom{7}{2} \cdot \left(5 \cdot \binom{7}{3} \cdot 4! + \binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3!\right) = 21 \cdot (4200 + 12600) = 352800$
rozmieszczeń, które spełniają warunki zadania

Przykład 3

Mamy do dyspozycji 15 żetonów, ponumerowanych od 1 do 15. Rozdzielamy te żetony losowo między trzy osoby: Marka, Jarka i Darka tak, żeby każdy z nich dostał 5 żetonów. Obliczymy, ile jest możliwości rozdzielenia żetonów w taki sposób, aby u każdego z chłopców suma numerów zapisanych na otrzymanych żetonach była parzysta.

Rozwiązanie

Zauważmy, że chłopiec otrzyma 5 żetonów, na których są zapisane numery dające w sumie liczbę parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy dostanie parzystą liczbę żetonów z numerem nieparzystym. Ponieważ wszystkich żetonów z numerem nieparzystym jest 8, więc są dwa rozłączne przypadki podziału żetonów, spełniające powyższy warunek:
(1) jeden z chłopców otrzyma 5 żetonów z numerami parzystymi (czyli nie otrzyma żadnego żetonu z numerem nieparzystym), a pozostali dwaj otrzymają po 4 żetony z numerami nieparzystymi i po 1 żetonie z numerem parzystym,
(2) jeden z chłopców otrzyma 4 żetony z numerami nieparzystymi i 1 żeton z numerem parzystym, a pozostali dwaj otrzymają po 2 żetony z numerami nieparzystymi i po 3 żetony z numerami parzystymi.

Obliczamy liczbę możliwości rozdzielenia żetonów w przypadku (1):

- na 3 sposoby wybierzemy chłopca, który otrzyma 5 żetonów z numerami parzystymi i wybierzemy dla niego te 5 żetonów z 7 dostępnych na $\binom{7}{5} = 21$ sposobów, co daje ogółem $3 \cdot 21 = 63$ możliwości,
- drugiemu z chłopców przydzielimy 4 żetony z numerami nieparzystymi (z dostępnych 8) na $\binom{8}{4} = 70$ sposobów i jeden żeton z numerem parzystym (spośród pozostałych do wyboru 2) na 2 sposoby, co daje ogółem $70 \cdot 2 = 140$ możliwości,
- dla trzeciego chłopca zostały 4 żetony z numerami nieparzystymi i 1 żeton z numerem parzystym.

Podsumowując: w pierwszym przypadku liczba możliwości przydziału żetonów jest równa $63 \cdot 140 = 8820$.

Obliczamy liczbę możliwości rozdzielenia żetonów w przypadku (2):

- na 3 sposoby wybierzemy chłopca, który otrzyma 4 żetony z numerami nieparzystymi i jeden żeton z numerem parzystym. Wybierzemy dla niego żetony z numerem nieparzystym (4 żetony z 8 dostępnych) na $\binom{8}{4} = 70$ sposobów i jeden żeton z numerem parzystym (z 7 dostępnych) na 7 sposobów, co daje ogółem $3 \cdot 70 \cdot 7 = 1470$ możliwości,
- drugiemu z chłopców przydzielimy 2 żetony z numerami nieparzystymi (z dostępnych 4) na $\binom{4}{2} = 6$ sposobów i trzy żetony z numerem parzystym (spośród pozostałych do wyboru 6) na $\binom{6}{3} = 20$ sposobów, co daje ogółem $6 \cdot 20 = 120$ możliwości,
- dla trzeciego chłopca zostały 2 żetony z numerami nieparzystymi i 3 żetony z numerami parzystymi.

Podsumowując: w przypadku (2) liczba możliwości przydziału żetonów jest równa $1470 \cdot 120 = 176400$.

Ostatecznie obliczamy (korzystając z reguły dodawania), że wszystkich możliwości rozdzielenia żetonów zgodnie z warunkami zadania jest $8820 + 176400 = 185220$.

W kolejnych przykładach pokazujemy, jak rozwiązywać zadania dotyczące rozmieszczania nieodróżnialnych obiektów (np. jednakowych kul) w parami różnych pojemnikach.

Przykład 4

Obliczymy, na ile sposobów możemy rozmieścić 8 jednakowych kul w trzech pudełkach: białym, niebieskim i zielonym.

Rozwiązanie

Ponieważ tym razem kule są jednakowe, więc dwa rozmieszczenia uznamy za różne, jeżeli odróżniają się one rozkładem liczby kul w poszczególnych pojemnikach.

Aby ustalić, ile jest wszystkich takich rozkładów liczby kul wprowadźmy oznaczenia:

- x_1 – liczba kul, które zostały umieszczone w białym pudełku,
- x_2 – liczba kul, które zostały umieszczone w niebieskim pudełku,
- x_3 – liczba kul, które zostały umieszczone w zielonym pudełku.

Zauważmy, że z warunków zadania otrzymujemy następujące zależności:

- $x_1 \geq 0$,
- $x_1 + x_2 + x_3 = 8$.

Korzystając z twierdzenia o liczbie rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ otrzymujemy, że rozwiązań równania
$x_1 + x_2 + x_3 = 8$ (w przypadku otrzymanego równania przyjmujemy $n = 3$ i $k = 8$) w liczbach nieujemnych x_1, x_2, x_3 jest
$\binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{8} = 45.$

Oznacza to, że jest 45 sposobów, na które możemy rozmieścić 8 jednakowych kul w trzech pudełkach: białym, niebieskim i zielonym.

Uwaga. Innym pomysłem na rozwiązanie tego zadania jest rozpatrzenie 10 rozłącznych przypadków ze względu na możliwe rozkłady liczby kul w pojemnikach. Przy założonej liczbie 8 kul rozmieszczanych w 3 pudełkach przypadki takich rozkładów są następujące:
(1) $[8, 0, 0]$ – w tym przypadku są 3 sposoby rozmieszczenia kul (tyle jest możliwości wyboru pudełka, do którego wrzucimy 8 kul),
(2) $[7, 1, 0]$ – w tym przypadku jest $3! = 6$ sposobów rozmieszczenia kul,
(3) $[6, 2, 0]$ – w tym przypadku jest $3! = 6$ sposobów rozmieszczenia kul,
(4) $[6, 1, 1]$ – w tym przypadku są 3 sposoby rozmieszczenia kul,
(5) $[5, 3, 0]$ – w tym przypadku jest $3! = 6$ sposobów rozmieszczenia kul,
(6) $[5, 2, 1]$ – w tym przypadku jest $3! = 6$ sposobów rozmieszczenia kul,
(7) $[4, 4, 0]$ – w tym przypadku są 3 sposoby rozmieszczenia kul,
(8) $[4, 3, 1]$ – w tym przypadku jest $3! = 6$ sposobów rozmieszczenia kul,
(9) $[4, 2, 2]$ – w tym przypadku są 3 sposoby rozmieszczenia kul,
(10) $[3, 3, 2]$ – w tym przypadku są 3 sposoby rozmieszczenia kul.

Ogółem otrzymujemy więc $5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 = 30 + 15 = 45$ sposobów rozmieszczenia 8 jednakowych kul w trzech pudełkach: białym, niebieskim i zielonym.

Przykład 5

Rozmieszczamy 10 jednakowych kul w czterech pudełkach: białym, niebieskim, czerwonym i zielonym. Obliczymy, na ile sposobów możemy je rozmieścić tak, aby spełniony był warunek:
a) w każdym pudełku znajdzie się co najmniej jedna kula,
b) dokładnie jedno pudełko pozostanie puste.

Rozwiązanie

Mamy do rozmieszczenia jednakowe kule w różnych pojemnikach - pozostaje ustalić, ile jest różnych rozkładów liczby kul w poszczególnych pojemnikach.

a) Ponieważ w każdym z pudełek ma znaleźć się co najmniej jedna kula, więc wprowadzimy takie oznaczenia liczby kul w pojemnikach, które spełnią ten warunek.

Przyjmijmy, że:

- $x_1 + 1$, gdzie $x_1 \geq 0$ - liczba kul, które zostały umieszczone w białym pudełku,
- $x_2 + 1$, gdzie $x_2 \geq 0$ - liczba kul, które zostały umieszczone w niebieskim pudełku,
- $x_3 + 1$, gdzie $x_3 \geq 0$ - liczba kul, które zostały umieszczone w czerwonym pudełku,
- $x_4 + 1$, gdzie $x_4 \geq 0$ - liczba kul, które zostały umieszczone w zielonym pudełku.

Ponieważ do rozmieszczenia mamy 10 jednakowych kul, więc otrzymujemy następującą zależność
$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + (x_4 + 1) = 10,$
skąd dostajemy, że liczby nieujemne x_1, x_2, x_3, x_4 spełniają równanie
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6.$

Korzystając z twierdzenia o liczbie rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ (w przypadku otrzymanego równania przyjmujemy $n = 4$ oraz $k = 6$) otrzymujemy, że są $\binom{6+4-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$ takie rozmieszczenia, że w każdym pudełku znajdzie się co najmniej jedna kula.

b) Załóżmy bez straty ogólności, że puste będzie pudełko białe (i od razu zauważmy, że zamieniając kolor pustego pudełka z białego na każdy z pozostałych trzech kolorów dostaniemy za każdym razem tę samą liczbę rozmieszczeń).

Aby zapewnić sobie rozmieszczenie, w którym każde z pozostałych pudełek nie będzie puste wprowadzamy następujące oznaczenia:

- $x_1 + 1$, gdzie $x_1 \geq 0$ – liczba kul, które zostały umieszczone w niebieskim pudełku,
- $x_2 + 1$, gdzie $x_2 \geq 0$ – liczba kul, które zostały umieszczone w czerwonym pudełku,
- $x_3 + 1$, gdzie$x_3 \geq 0$ – liczba kul, które zostały umieszczone w zielonym pudełku.

Ponieważ do rozmieszczenia mamy 10 jednakowych kul, więc otrzymujemy następującą zależność
$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) = 10,$
skąd dostajemy, że liczby nieujemne x_1, x_2, x_3 spełniają równanie
$x_1 + x_2 + x_3 = 7.$

Korzystając z twierdzenia o liczbie rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ (w którym przyjmujemy $n = 3$ oraz $k = 7$) otrzymujemy, że w tym przypadku jest $\binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = 36$ możliwych rozmieszczeń.

Oznacza to, że ogółem jest $4 \cdot \binom{9}{7} = 4 \cdot 36 = 144$ takich rozmieszczeń, że jedno pudełko pozostanie puste.

Ostatni przykład jest prezentacją metody rozwiązywania zadań, w których parami różne obiekty (np. ponumerowane kule) rozmieszczamy w nieodróżnialnych pojemnikach (np. takich samych pudełkach).

Przykład 6

a) Mamy do dyspozycji 9 kul, ponumerowanych od 1 do 9. Rozmieszczamy te kule w trzech takich samych białych pudełkach.
Obliczymy, ile jest możliwości rozdzielenia kul w taki sposób, aby w każdym pudełku znalazły się 3 kule.

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli pudełka ponumerujemy od 1 do 3, to możemy rozmieszczanie kul rozłożyć na 3 etapy:
(1) wybieramy 3 kule spośród wszystkich 9 (co możemy zrobić na $\binom{9}{3} = 84$ sposoby) i umieszczamy je w pudełku numer 1,
(2) z pozostałych 6 kul wybieramy 3 (co możemy zrobić na $\binom{6}{3} = 20$ sposobów) i umieszczamy je w pudełku numer 2,
(3) pozostałe 3 kule umieszczamy w pudełku numer 3.

Wynika stąd, że rozpatrywana liczba rozmieszczeń w trzech pudełkach, które odróżniliśmy numerami, jest równa $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = 84 \cdot 20 = 1680$.

Przy ustalonym rozmieszczeniu kul opisanym powyżej zamiana trójki numerów zapisanych na pudełkach (zauważmy, że różnych ponumerowań tych trzech pudełek jest $3! = 6$) opisuje już inne rozmieszczenie. Jednakże pudełka, w których rozmieszczamy kule są jednakowe, zatem każde rozmieszczenie opisane w treści zadania w wyniku numerowania (odróżniania) pudełek jest liczone dokładnie 6 razy. Wynika stąd, że jest $\frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3}}{3!} = \frac{1680}{6} = 280$ wszystkich rozmieszczeń 9 kul, ponumerowanych od 1 do 9, w trzech takich samych białych pudełkach w taki sposób, aby w każdym pudełku znalazły się 3 kule.

Uwaga. Problem z powyższego przykładu warto sformułować następująco.
Ile jest sposobów podziału 9–elementowego zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na 3 podzbiory 3–elementowe?
Jeżeli założymy, że w wyniku podziału zbioru X otrzymaliśmy trzy podzbiory: A, B oraz C, to podział ten jest dla nas zbiorem $\{A, B, C\}$, którego elementami są opisane podzbiory.
Jeżeli natomiast elementy do tych podzbiorów będziemy przydzielali kolejno: najpierw 3

elementy ze zbioru X przydzielimy do zbioru A, następnie z pozostałych 6 wybierzemy 3 elementy do zbioru B, a ostatnie 3 elementy przydzielimy do zbioru C (co, jak pokazaliśmy powyżej, można zrobić na $\binom{9}{3} \cdot \binom{6}{3} = 84 \cdot 20 = 1680$ sposobów), to podział otrzymany w ten sposób opiszemy jako uporządkowaną trójkę (A, B, C), która jest 3–elementową permutacją zbioru $\{A, B, C\}$.
Ponieważ jest $3! = 6$ takich permutacji, więc wszystkich permutacji (A, B, C) jest 6 razy więcej, niż podziałów $\{A, B, C\}$.
Oznacza to, że jest $\frac{1680}{6} = 280$ podziałów 9–elementowego zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na 3 podzbiory 3–elementowe.

b) Mamy do dyspozycji 9 kul, ponumerowanych od 1 do 9. Rozmieszczamy te kule w czterech takich samych białych pudełkach.
Obliczymy, ile jest możliwości rozdzielenia kul w taki sposób, aby w jednym pudełku znalazły się 3 kule, a w pozostałych trzech pudełkach znalazły się po 2 kule.

Rozwiązanie

Jeśli rozważymy wszystkie podziały 9–elementowego zbioru $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ na 4 podzbiory, przy czym jeden z nich ma być 3–elementowy (oznaczymy go jako A), natomiast pozostałe trzy (oznaczone jako B, C oraz D) mają być 2–elementowe, to tych podziałów jest tyle, ile zbiorów postaci $\{A, \{B, C, D\}\}$.
Rozumując podobnie jak to jest zapisane w **Uwadze** do poprzedniego podpunktu, obliczymy, że jest $\binom{9}{3} \cdot \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{3!} = \frac{7460}{6} = 1260$ możliwości podziału zbioru 9–elementowego na cztery podzbiory, z których jeden jest 3–elementowy, a pozostałe dwa są 2–elementowe.

Wobec tego jest 1260 możliwości rozmieszczenia 9 kul ponumerowanych od 1 do 9 w czterech takich samych białych pudełkach w taki sposób, aby w jednym pudełku znalazły się 3 kule, a w każdym z pozostałych trzech pudełek znalazły się po 2 kule.

Słownik

permutacja zbioru n–elementowego

każdy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru n–elementowego

k-elementowa kombinacja zbioru n-elementowego

każdy k-elementowy podzbiór zbioru n-elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy k-elementową kombinacją tego zbioru n-elementowego

liczba wszystkich k–elementowych kombinacji zbioru n-elementowego

liczba wszystkich k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego, gdzie $0 \leq k \leq n$
, jest równa

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n-tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa
$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$

reguła dodawania

jeżeli zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

reguła włączeń i wyłączeń

dla dowolnych zbiorów skończonych A_1, A_2, ..., A_n prawdziwa jest równość

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| +$$

$$-(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_1 \cap A_n| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) +$$

$$-(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) +$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

twierdzenie o liczbie rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$

liczba wszystkich rozwiązań równania

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$$

w nieujemnych liczbach całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie n oraz k to ustalone dodatnie liczby całkowite, jest równa

$$\binom{k+n-1}{k}.$$

Test samosprawdzający

Polecenie 1

Rozwiąż test. Wskaż wszystkie poprawne odpowiedzi.

Test

Rozmieszczenia

Sprawdzisz swoją wiedzę dotyczącą:

- liczby wyników w doświadczeniu polegającym na rozmieszczaniu parami różnych kul w parami różnych pojemnikach,
- liczby wyników w doświadczeniu polegającym na rozmieszczaniu jednakowych kul w parami różnych pojemnikach,,
- liczby wyników w doświadczeniu polegającym na rozmieszczaniu parami różnych kul w jednakowych pojemnikach,
- liczby wyników w doświadczeniu polegającym na rozmieszczaniu ponumerowanych kul w parami różnych pojemnikach tak, żeby numery kul spełniały ustalony warunek.

Liczba pytań:
6

Limit czasu:
30 min

Twój ostatni wynik:
-

Uruchom

Polecenie 2

Ułóż po jednym zadaniu dotyczącym doświadczenia polegającego na:

- rozmieszczaniu parami różnych kul w parami różnych pojemnikach,
- rozmieszczaniu jednakowych kul w parami różnych pojemnikach,
- rozmieszczaniu parami różnych kul w jednakowych pojemnikach,
- rozmieszczaniu ponumerowanych kul w parami różnych pojemnikach tak, żeby numery kul spełniały ustalony warunek.

Zredaguj pełne rozwiązanie wraz ze wszystkimi istotnymi uzasadnieniami. Zapisz odpowiedź, podając wynik jako liczbę naturalną.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

W Rajdzie Świętokrzyskim bierze udział grupa 12 osób z tej samej szkoły, przy czym 9 osób jest z klasy III a, natomiast trzech chłopców: Szymon, Kamil oraz Michał to uczniowie klasy III b.
Na nocleg w schronisku należy tę grupę zakwaterować w czterech trzyosobowych pokojach. Na ile sposobów można to zrobić tak, aby Szymon, Kamil oraz Michał byli zakwaterowani w tym samym pokoju?

Odpowiedź: ______.

Ćwiczenie 2

Dziesięciu uczniów klasy I a dzielimy na 4 grupy: Białą, Czerwoną, Niebieską oraz Zieloną. Ile jest możliwych sposobów takiego podziału, aby w grupie Białej znalazły się 4 osoby i w grupie Czerwonej znalazły się 3 osoby?

- 4200
- 25200
- 33600
- 8400

Ćwiczenie 3

Przy stole, na którym leży 18 takich samych cukierków, siedzi pięcioro dzieci: Aniela, Hela, Zosia, Jagna i Ignaś. Dzieci planują rozdzielić między siebie wszystkie cukierki ze stołu tak, żeby dwie najstarsze dziewczynki, Aniela oraz Hela, dostały po co najmniej 3 cukierki, a każde z trójki pozostałych dzieci - po co najmniej 2 cukierki.
Oznaczmy przez n liczbę wszystkich takich podziałów cukierków. Wynika stąd, że

- [ ] $210 < n \leq 630$
- [ ] $n < 2100$
- [ ] $n \geq 210$
- [ ] $630 < n \leq 2100$

Ćwiczenie 4

Każdego spośród 7 działaczy Samorządu Szkolnego należy przydzielić do pracy w dokładnie jednej z 3 komisji: Komisji Nauki, Komisji Kultury oraz Komisji Sportu.
Oblicz, na ile sposobów można przydzielić działaczy do komisji tak, aby w każdej z nich pracowały co najmniej 2 osoby.

- ○ 1260
- ○ 630
- ○ 270
- ○ 210

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Bartek ma w swojej kolekcji 11 modeli samochodów, z których każde dwa to modele różnych marek. Planuje on rozstawić te modele w zawieszonej nad jego biurkiem szafce z trzema półkami.
Oznaczmy:
- przez a: liczbę wszystkich takich rozstawień, w których na górnej półce Bartek postawi dokładnie 2 modele,
- przez b: liczbę wszystkich takich rozstawień, w których na środkowej półce Bartek postawi dokładnie 3 modele,
- przez c: liczbę wszystkich takich rozstawień, w których na dolnej półce Bartek postawi dokładnie 4 modele,
- przez d: liczbę wszystkich takich rozstawień, w których na każdej półce Bartek postawi co najmniej 3 modele.

Dopasuj do siebie pary równych liczb.

$b+a$	90530
$d+c$	104610
$a+d$	84480
$c+b$	70400

Ćwiczenie 7

Mamy do dyspozycji 12 żetonów, oznaczonych liczbami: $1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 13, 14, 18, 20$.
Rozdzielamy te żetony między trzy dziewczynki: Alę, Olę i Ulę.
Oznaczmy przez z liczbę wszystkich możliwości rozdzielenia tych żetonów w następujący sposób: każda dziewczynka dostanie 4 żetony z takimi numerami, których suma kwadratów jest podzielna przez 3.
Wynika stąd, że:

- [ ] $70 \leq z \leq 210$
- [ ] $210 \leq z \leq 420$
- [ ] $z < 420$
- [ ] $z > 70$

Ćwiczenie 8

Na stole leży 7 banknotów o nominałach: 5 euro, 10 euro, 20 euro, 50 euro, 100 euro, 200 euro oraz 500 euro.
Oblicz, na ile sposobów można rozmieścić te banknoty w trzech jednakowych kopertach tak, aby w każdej kopercie znalazł się co najmniej jeden banknot.
Zakoduj w kratkach poniżej kolejno cyfry: setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku

Odpowiedź: | | | .

Dla nauczyciela

Autor: Karol Nowakowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Rozmieszczenia kul

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:
Cele kształcenia – wymagania ogólne:
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.
2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.
IV. Rozumowanie i argumentacja.
1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.
4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
XI. Kombinatoryka. Zakres podstawowy. Uczeń:
Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:
Zakres rozszerzony 1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;
Zakres rozszerzony 2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje obywatelskie;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozwiązuje zadania dotyczące rozmieszczeń nierozróżnialnych przedmiotów w parami różnych pojemnikach,
- wykorzystuje poznane wcześniej reguły kombinatorycznych do obliczanie ile jest rozmieszczeń spełniających określone warunki.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- sztuka teatralna;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel przedstawia uczniom temat zajęć: „Rozmieszczenia kul” i prosi, by na jego podstawie uczniowie sformułowali cel lekcji oraz kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają się z treścią sekcji „Przeczytaj”, a następnie metodą kot i mysz rozwiązują ćwiczenia interaktywne w sekcji „Sprawdź się”. Mysz stara się jak najlepiej rozwiązać zadania, a kot sprawdza ich poprawność. Po dwóch nieudanych próbach kot „łapie mysz”, która odpada z gry. Aby gra toczyła się dalej - role uczniów odwracają się i mysz staje się kotem - procedura się powtarza.
2. Uczniowie indywidulanie rozwiązują test samosprawdzający

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- Reguła mnożenia - wprowadzenie
- Reguła mnożenia - jak wyznaczyć ilość obiektów spełniających określone warunki
- Modele kombinatoryczne z rozbijaniem na pary
- Dwumian Newtona – zadania ze złożonymi warunkami

Wskazówki metodyczne:

Testy samosprawdzające można wykorzystać jako materiał powtórzeniowy przed sprawdzianem.