

Prawa działań na wektorach

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Infografika](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Prawa działań na wektorach

Źródło: Alex King, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

Jeśli w zbiorze danych obiektów określone są jakiekolwiek działania na tych obiektach, to rządzą się one pewnymi ustalonymi prawami. Wiadomo, że w zbiorze liczb rzeczywistych mnożenie jest działaniem przemienne (tzn. iloczyn nie zależy od kolejności czynników: $a \cdot b = b \cdot a$), ale odejmowanie przemienne już nie jest (wynik zależy od kolejności wziętych do odejmowania liczb: $1 - 2 = -1 \neq 1 = 2 - 1$). Działania zdefiniowane w zbiorze wektorów również podlegają pewnym prawom, którym w tym rozdziale przyjrzymy się nieco bliżej.

Twoje cele

- Wykorzystasz własności dodawania wektorów.
- Wykorzystasz własności mnożenia wektora przez liczbę.

Przeczytaj

Poznałeś już niektóre działania, które można wykonywać na wektorach: dodawanie, odejmowanie oraz mnożenie wektora przez liczbę. Znasz również niektóre własności tych działań wspomniane w poprzednich lekcjach. Poniżej omówimy je bardziej szczegółowo.

Własności dodawania wektorów

Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ zachodzą następujące równości:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (przemienność dodawania wektorów)
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (łączność dodawania wektorów)
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (wektor zerowy jest elementem neutralnym dodawania wektorów)
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Dowód

Ad 1) Rozważmy wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Wybierzmy punkty A i B , tak aby $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ oraz punkt D , dla którego $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$.

Aby udowodnić, że dodawanie wektorów jest przemienne można posłużyć się równoległobokiem. Rozważmy równoległobok $ABCD$ - punkt C jest brakującym wierzchołkiem równoległoboku. Z własności równoległoboku wynika, że $\overrightarrow{DC} = \vec{u}$ i $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.

Z definicji sumy wektorów otrzymujemy równości:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$\text{Stąd } \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Ad 2) Podobnie jak wyżej weźmy dowolne wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ i $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{w}$.

Wówczas na podstawie definicji sumy wektorów otrzymujemy:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$\text{Stąd } (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Ad 3) Dla dowodu równości trzeciej wystarczy zauważyć, że początek i koniec wektora zerowego znajdują się w tym samym punkcie, zatem po zastosowaniu reguły łańcucha widzimy, że koniec drugiego wektora (zerowego) pokrywa się z końcem pierwszego wektora $\vec{u}$, zatem suma wektorów $\vec{u}$ i $\vec{0}$ jest równa wektorowi $\vec{u}$

Ad. 4) Przypomnijmy, że wektor przeciwny do danego wektora $\vec{u}$ ma ten sam kierunek i długość, co wektor $\vec{u}$. Wektor $\vec{u}$ i wektor do niego przeciwny różnią się jedynie zwrotem, zatem jeśli $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, to $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$. Po przyłożeniu początku wektora $\overrightarrow{BA}$ do końca wektora $\overrightarrow{AB}$, koniec wektora $\overrightarrow{BA}$ znajduje się w punkcie A , czyli w punkcie przyłożenia wektora $\overrightarrow{AB}$. Zatem suma wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ jest wektorem zerowym.

Własności mnożenia wektora przez liczbę

Nietrudno też uzasadnić następujące własności:

1. Dla dowolnych liczb a, b i dowolnego wektora $\vec{u}$ zachodzi równość $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
(łączność iloczynu, **łączność mnożenia wektora przez liczbę**)
2. Dla dowolnej liczby a i dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ zachodzi równość
 $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (rozdzielność iloczynu względem sumy wektorów,
rozdzielność mnożenia względem dodawania)
3. Dla dowolnych liczb a, b i dowolnego wektora $\vec{u}$ zachodzi równość
 $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ (rozdzielność iloczynu względem sumy liczb)

Dowód

Ad 1) Jeśli któraś z liczb a lub b jest zerem albo $\vec{u}$ jest wektorem zerowym, to po obu stronach równania otrzymujemy wektor zerowy, czyli równość jest prawdziwa. Załóżmy więc, że $a, b \neq 0$ i $\vec{u} \neq \vec{0}$. Pokażemy, że obie strony są wektorami o takich samych kierunkach, zwrotach i długościach, a więc są wektorami równymi.

Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to z definicji iloczynu wektora przez liczbę wynika, że $\vec{u}$ ma taki sam kierunek i zwrot jak $b\vec{u}$. Z tego samego powodu $b\vec{u}$ ma taki sam kierunek i zwrot jak

$a(b\vec{u})$, czyli $a(b\vec{u})$ ma taki sam kierunek i zwrot jak $\vec{u}$.

Ponieważ $a b > 0$, to również $(ab)\vec{u}$ ma taki sam kierunek i zwrot jak $\vec{u}$. Ponownie z definicji iloczynu wektora przez liczbę wynika, że długość wektora $b\vec{u}$ jest równa $|b| \cdot |\vec{u}|$, zaś długość wektora $a(b\vec{u})$ jest równa $|a| \cdot |b\vec{u}|$, czyli $|a(b\vec{u})| = |a| \cdot |b\vec{u}| = |a| \cdot |b| \cdot |\vec{u}|$.

Z kolei długość wektora $(ab)\vec{u}$ jest równa $|ab| \cdot |\vec{u}|$. Z własności wartości bezwzględnej wynika, że $|a(b\vec{u})| = |a| \cdot |b| \cdot |\vec{u}| = |ab| \cdot |\vec{u}| = |(ab)\vec{u}|$.

Analogicznie dowodzimy równości w przypadkach, gdy $ab < 0$ oraz $a < 0$ i $b < 0$.

Dowód podpunktów 2) i 3) pozostawiamy jako ćwiczenie.

Słownik

przemienność dodawania wektorów

własność dodawania wektorów orzekająca, że kolejność składników sumowania nie ma znaczenia

łączność dodawania wektorów

własność dodawania wektorów orzekająca, że dla dowolnych wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zachodzi $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

łączność mnożenia wektora przez liczbę

własność mnożenia wektora przez liczbę, która orzeka, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b i dowolnego wektora $\vec{c}$ zachodzi $(ab)\vec{c} = a(b\vec{c})$

rozdzielność mnożenia względem dodawania

własność mnożenia wektorów przez liczbę, która orzeka, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b i dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ zachodzą następujące równości i własność mnożenia wektorów przez liczbę, która orzeka, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a , b i dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$ zachodzą następujące równości $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ i $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

Infografika

Polecenie 1

Przeanalizuj poniższą infografikę dotyczącą własności działań na wektorach, a następnie rozwiąż zadanie.

Polecenie 2

Połącz w pary wektory równe.

$$2(\vec{AB} + \vec{CD}) + 4\vec{AB}$$

$$2\vec{AB} - (\vec{BA} + 2(\vec{AB} + \vec{CD}))$$

$$\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$2(\vec{AB} - 3(\vec{CD} - \vec{AB})) + 10\vec{CD}$$

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$$

$$2\vec{AB} + \vec{BA}$$

$$6\left(\frac{1}{2}\vec{AB}\right)$$

$$\vec{AB} + \vec{BA}$$

$$\vec{AB} + 4(\vec{AB} + \vec{CD}) + 3\vec{AB}$$

$$3\vec{AB} - \vec{0}$$

$$\frac{1}{2}(2\vec{AB} - 4\vec{CD})$$

$$5\vec{CD} - 3(\vec{CD} - 2\vec{AB})$$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary równości z ich opisami.

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

Łączność iloczynu

$$(kl)\vec{AB} = k\left(l\vec{AB}\right)$$

Odejmowanie jako dodawanie wektora przeciwnego

$$k\left(\vec{AB} + \vec{CD}\right) = k\vec{AB} + k\vec{CD}$$

Rozdzielność iloczynu względem sumy liczb

$$\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{DC}$$

Element neutralny dodawania

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$$

Suma wektorów przeciwnych

$$(k+l)\vec{AB} = k\vec{AB} + l\vec{AB}$$

Łączność dodawania

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{CD} + \vec{AB}$$

Przemienność dodawania

$$\vec{AB} + \vec{0} = \vec{AB}$$

Rozdzielność iloczynu względem sumy wektorów

$$\left(\vec{AB} + \vec{CD}\right) + \vec{EF} = \vec{AB} + \left(\vec{CD} + \vec{EF}\right)$$

Reguła trójkąta

Ćwiczenie 2



Przyporządkuj wektory równe wektorom z nagłówka. Przeciągnij i upuść.

$\vec{u}$

$\frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{u}$

$-\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{u}$

$\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{u}$

$\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}$

$-\vec{u}$

$-\frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}$

$\frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}$

$-\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{u}$

$-\left(\frac{5}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}\right)$

$\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}$

$2\vec{u}$

$-2\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{u}\right)$

$\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{u}$

$-2 \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{u}\right)$

$-2\vec{u}$

Ćwiczenie 3



Niech $\vec{u}$ będzie wektorem o długości 1. Wskaż wszystkie wektory o podanej długości.

Argumenty	Wartości wektora		
długość wektora = 1	$-\vec{u}$ ☐	$\vec{u}$ ☐	$\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{u}$ ☐
długość wektora = 2	$-2\vec{u}$ ☐	$2\vec{u}$ ☐	$\frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}$ ☐
długość wektora = 3	$3\vec{u}$ ☐	$-3\vec{u}$ ☐	$-\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{u}$ ☐

Ćwiczenie 4



Wykonaj działania:

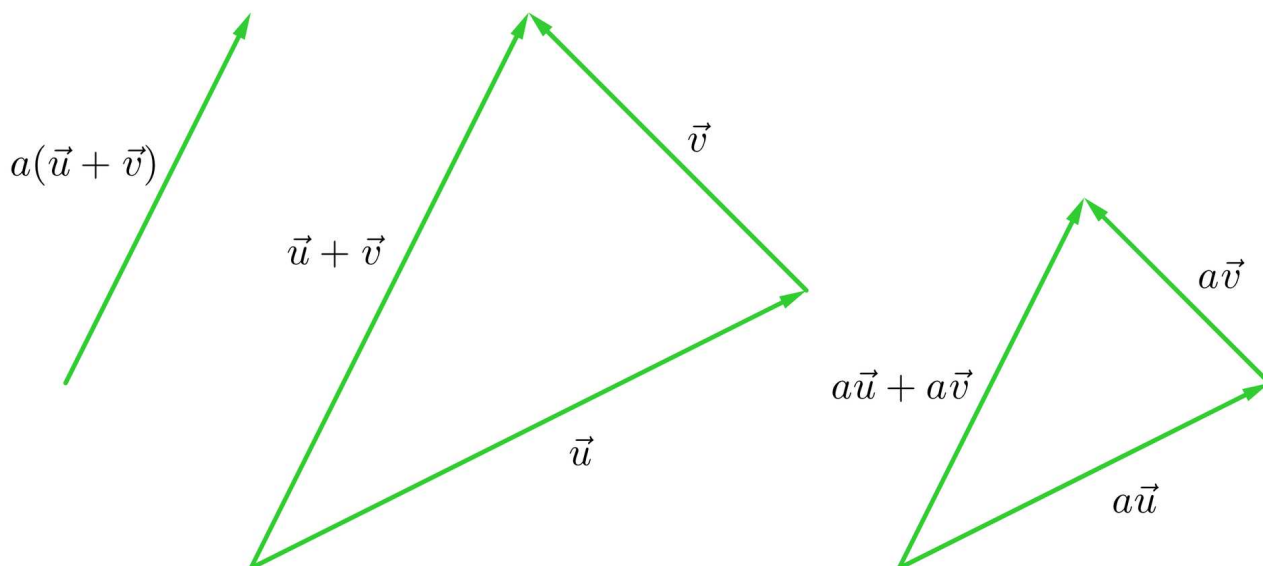
a. $2(\vec{u} + \vec{v}) + 3(\vec{v} - 2\vec{u})$

b. $\vec{u} + 4(\vec{u} + \vec{v}) - 2[\vec{u} - 3(\vec{v} - \vec{u})]$

Ćwiczenie 5



Uporządkuj poniższe zdania tak, aby powstał dowód prawa rozdzielności mnożenia wektora przez liczbę względem dodawania wektorów, czyli dla dowolnej liczby a i dowolnych wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ zachodzi $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.



Ponieważ $\vec{u} \parallel a\vec{u}$ i $\vec{v} \parallel a\vec{v}$, więc $(\vec{u} + \vec{v}) \parallel (a\vec{u} + a\vec{v})$. Ponadto $(\vec{u} + \vec{v}) \parallel a(\vec{u} + \vec{v})$.

Z obu powyższych warunków wynika, że $(a\vec{u} + a\vec{v}) \parallel a(\vec{u} + \vec{v})$.

Pozostało pokazać, że oba wektory mają tę samą długość.

Najpierw pokażemy, że lewa i prawa strona równania są wektorami o tym samym kierunku.

W drugiej kolejności pokażemy, że zwroty wektorów znajdujących się po obu stronach równości są takie same.

Przypadek I: $a > 0$. Wektory $\vec{u}$ i $a\vec{u}$ mają ten sam kierunek i zwrot. Podobnie wektory $\vec{v}$ i $a\vec{v}$. Zatem wektory $(a\vec{u} + a\vec{v})$ i $(\vec{u} + \vec{v})$ również mają ten sam

kierunek i zwrot (jako sumy wektorów o tej własności). Czyli wektory $(\vec{a\vec{u}} + \vec{a\vec{v}})$ i $a(\vec{\vec{u}} + \vec{\vec{v}})$ też mają ten sam kierunek i zwrot.

Przypadek II: $a < 0$. Wektory $\vec{\vec{u}}$ i $\vec{a\vec{u}}$ mają ten sam kierunek, ale przeciwne zwroty. Podobnie wektory $\vec{\vec{v}}$ i $\vec{a\vec{v}}$. Zatem wektory $(\vec{a\vec{u}} + \vec{a\vec{v}})$ i $(\vec{\vec{u}} + \vec{\vec{v}})$ również mają ten sam kierunek, ale przeciwne zwroty (jako sumy odpowiednich wektorów). Czyli wektory $(\vec{a\vec{u}} + \vec{a\vec{v}})$ i $a(\vec{\vec{u}} + \vec{\vec{v}})$ mają ten sam kierunek i te same zwroty.

Zauważmy, że trójkąty o bokach $\vec{\vec{u}}, \vec{\vec{v}}$ i $\vec{\vec{u}} + \vec{\vec{v}}$ oraz o bokach $\vec{a\vec{u}}, \vec{a\vec{v}}$ i $\vec{a\vec{u}} + \vec{a\vec{v}}$ są podobne w skali a .

Zatem po pomnożeniu przez a wektora $\vec{\vec{u}} + \vec{\vec{v}}$ otrzymamy wektor tej samej długości co wektor $\vec{a\vec{u}} + \vec{a\vec{v}}$.

Ćwiczenie 6



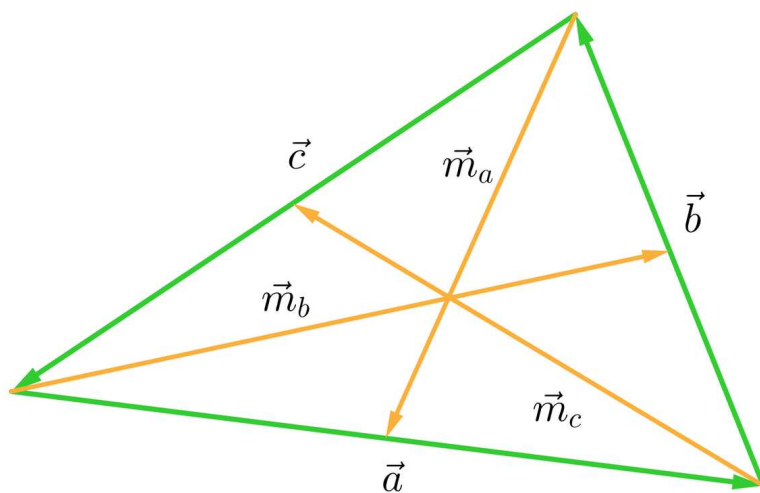
Udowodnij prawo rozdzielności iloczynu względem sumy liczb, tzn. dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i dowolnego wektora $\vec{\vec{u}}$ zachodzi $(a + b)\vec{\vec{u}} = \vec{a\vec{u}} + \vec{b\vec{u}}$.

Ćwiczenie 7



Wykaż, że ze środków trójkąta można zbudować trójkąt.

Wskazówka: Zauważ, że wystarczy wykazać, że suma wektorów wyznaczonych przez środki jest wektorem zerowym.



Ćwiczenie 8



Na płaszczyźnie dane są punkty A, B, C, D, O przy czym żadne trzy spośród punktów A, B, C, D nie leżą na jednej prostej. Uporządkuj poniższe wypowiedzi, aby powstał dowód, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

Równość $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ zachodzi w czworokącie dokładnie wtedy, gdy jest on równoległobokiem, co kończy dowód.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow$ (zamieniamy odejmowanie wektorów na dodawanie wektorów przeciwnych)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow$ (dodajemy wektory po każdej ze stron równości)

Przekształcimy równoważnie warunek dany w zadaniu:

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{CO} \Leftrightarrow$ (zamieniamy składniki kolejnością)

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow$ (przenosimy wektory na drugą stronę równania pamiętając o zmianie znaku)

Dla nauczyciela

Autor: Sebastian Guz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prawa działań na wektorach

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

- Wykorzystasz własności dodawania wektorów.
- Wykorzystasz własności mnożenia wektora przez liczbę.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w sekcji „Infografika” i ćwiczenia interaktywne;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Uczniowie zapoznają się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji – „Prawa działań na wektorach” i prosi uczniów o sformułowanie celów i kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w zespołach dwuosobowych zapoznają się z treścią polecenia nr 1 „Przeanalizuj poniższą infografikę dotyczącą własności działań na wektorach, a następnie rozwiąż zadanie.” z sekcji „Infografika” i zawartym w niej materiałem.
2. Nauczyciel przechodzi do sekcji „Sprawdź się”. Zapowiada uczniom, że w kolejnym kroku będą rozwiązywać ćwiczenia numer 1 i 2, i będą to robić wspólnie. Wybrana osoba czyta po kolei polecenia. Po każdym przeczytanym poleceniu ochotnik udziela odpowiedzi. Reszta uczniów ustosunkowuje się do niej, proponując swoje pomysły. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia nr 6-8. Następnie konsultują swoje rozwiązania z innym uczniem i ustalają jedną wersję odpowiedzi.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Uczniowie opracowują FAQ (minimum 3 pytania i odpowiedzi prezentujące przykład i rozwiązanie) do tematu lekcji („Prawa działań na wektorach”).

Materiały pomocnicze:

[Dodawanie i odejmowanie wektorów](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Infografika” można potraktować jako zadania domowe dotyczące analizy problemu w temacie „Prawa działań na wektorach”.