



Punkty symetryczne względem prostej $y = ax + b$

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Symetria jest jednym z rodzajów izometrii nieparzystej, który zmienia orientację płaszczyzny. Mówimy też, że dowolna symetria jest inwolucją, ponieważ jest identyczna z odwzorowaniem do niej odwrotnym. Do najprostszych symetrii zaliczamy symetrię względem punktu, symetrię względem prostej oraz względem płaszczyzny. W materiale przypomnimy pojęcie symetrii względem prostej oraz poznamy sposoby znajdowania współrzędnych punktu symetrycznego względem danej prostej w układzie współrzędnych. Opierając się na wiedzy teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

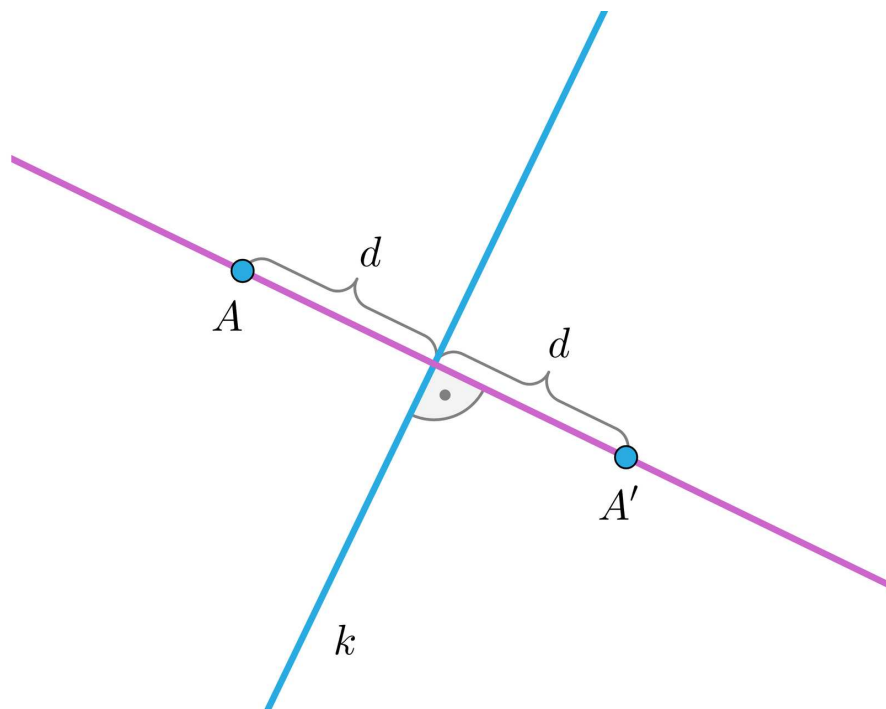
- Dowiesz się, jakie współrzędne mają punkty symetryczne względem różnych prostych w układzie współrzędnych.
- Poznasz sposoby znajdowania punktów symetrycznych względem prostej o podanym równaniu.
- Rozwiążesz zadania związane z zastosowaniem symetrii względem prostej.

Przeczytaj

Już wiesz

Dwa punkty A i A' są symetryczne względem prostej k , jeżeli spełnione są warunki:

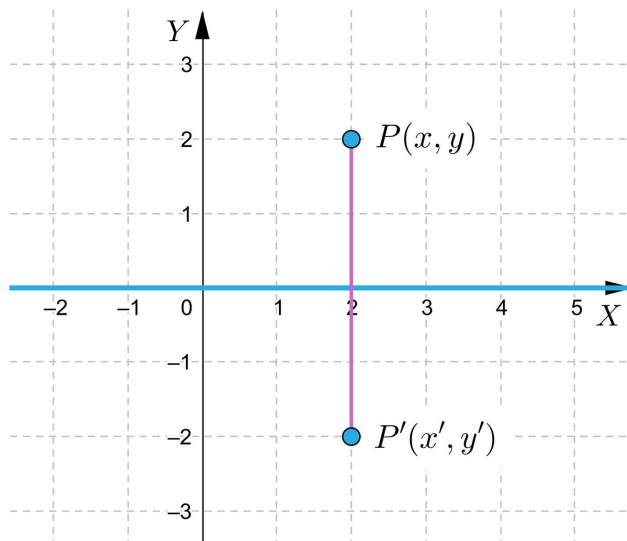
- punkty te leżą na prostej prostopadłej do prostej k ,
- punkty te leżą po przeciwnych stronach prostej k ,
- punkty te leżą w równych odległościach d od prostej k .



Prostą k nazywamy **osią symetrii**.

Rozpatrzmy kilka podstawowych przypadków wyznaczania współrzędnych punktu $P' = (x', y')$, symetrycznego do punktu $P = (x, y)$ względem podanych prostych.

Symetria względem osi X , czyli prostej $y = 0$

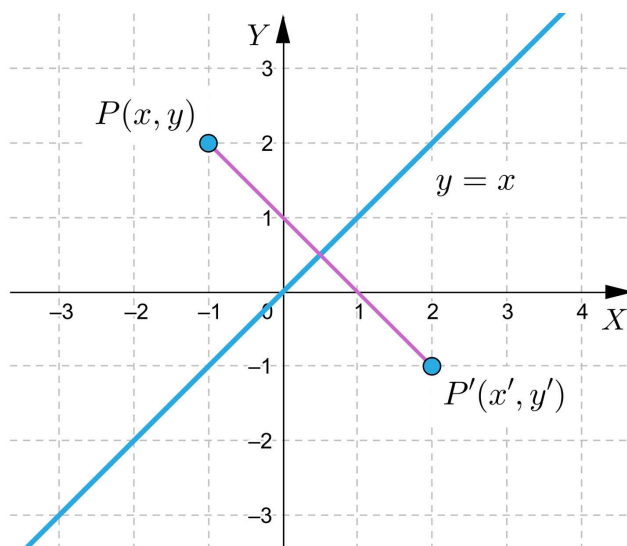


$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= -y\end{aligned}$$

Przykład 1

Punktem symetrycznym do punktu $A = (3, -2)$ względem prostej $y = 0$ jest punkt $A' = (3, 2)$.

Symetria względem prostej $y = x$

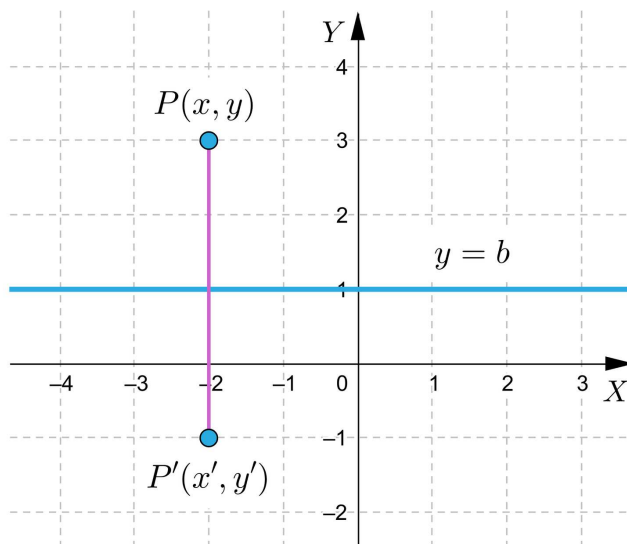


$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= x\end{aligned}$$

Przykład 2

Punktem symetrycznym do punktu $A = (-1, 4)$ względem prostej $y = x$ jest punkt $A' = (4, -1)$.

Symetria względem prostej $y = b$

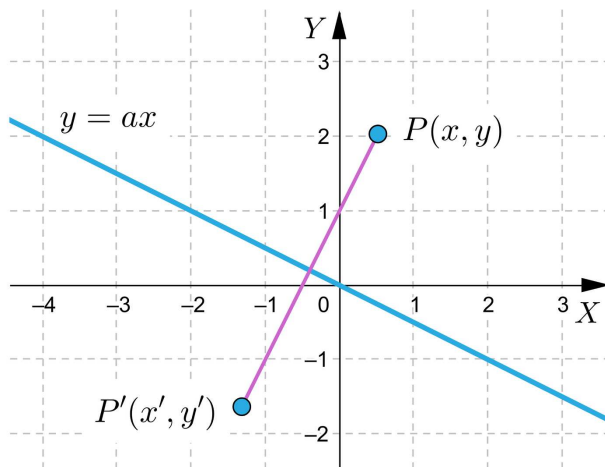


$$\begin{aligned}x' &= x \\y' &= 2b - y\end{aligned}$$

Przykład 3

Punktem symetrycznym do punktu $A = (2, -3)$ względem prostej $y = -2$ jest punkt $A' = (2, -1)$.

Symetria względem prostej $y = ax$



$$x' = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}x + \frac{2a}{1 + a^2}y$$

$$y' = \frac{2a}{1 + a^2}x - \frac{1 - a^2}{1 + a^2}y$$

Przykład 4

Punktem symetrycznym do punktu $A = (4, 1)$ względem prostej $y = -2x$ jest punkt $A' = \left(\frac{-16}{5}, \frac{-13}{5}\right)$.

Ważne!

Jeżeli punkt leży na prostej, która jest osią symetrii, wówczas jego obrazem jest ten sam punkt.

Omówimy sposób znajdowania punktu symetrycznego względem podanej prostej $y = ax + b$. Wykorzystamy do tego:

- równanie prostej prostopadłej do osi symetrii,
- wzór na środek odcinka,
- wzór na długość odcinka.

Przykład 5

Wyznamy współrzędne punktu A' symetrycznego do punktu $A = (-2, 1)$ względem prostej $y = 2x - 1$.

Rozwiązanie:

Punkt A' leży na prostej prostopadłej do prostej $y = 2x - 1$.

Równanie prostej prostopadłej jest postaci: $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Ponieważ punkt $A = (-2, 1)$ należy do prostej prostopadłej, podstawiając współrzędne punktu do równania tej prostej, otrzymujemy: $y = -\frac{1}{2}x$.

Wyznaczamy teraz punkt przecięcia tych dwóch prostych: $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ i oznaczmy jako S .

Punkt przecięcia ma współrzędne $S = (\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$.

Zauważmy, że punkt S jest środkiem odcinka AA' .

Oznaczmy współrzędne punktu $A' = (x, y)$.

Korzystając ze wzoru na środek odcinka, otrzymujemy równania:

$$\frac{-2+x}{2} = \frac{2}{5} \text{ i } \frac{1+y}{2} = -\frac{1}{5}.$$

Z równań otrzymujemy, że punkt $A' = (\frac{14}{5}, -\frac{7}{5})$.

Przykład 6

Wyznamy współrzędne punktu A' symetrycznego do punktu $A = (4, 2)$ względem prostej $y = -x + 4$.

Rozwiązanie:

Punkt A' leży na prostej prostopadłej do prostej $y = -x + 4$.

Prosta prostopadła jest postaci: $y = x + b$.

Punkt $A = (4, 2)$ należy do prostej prostopadłej, rozwiązując powyższe równanie dla współrzędnych punktu A , otrzymujemy równanie $y = x - 2$.

Obliczamy współrzędne punktu przecięcia tych prostych: $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$ i oznaczamy jako S .

Otrzymujemy, że $S = (3, 1)$.

Z własności punktów symetrycznych względem prostej wiemy, że odległość punktu A od S jest taka sama jak odległość punktu A' od S .

Wprowadźmy oznaczenie: $A' = (x, x - 2)$.

Wykorzystamy równanie: $|SA| = |SA'|$.

Po podstawieniu współrzędnych punktów otrzymujemy, że:

$$\sqrt{(4-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (x-3)^2}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy równanie: $x^2 - 6x + 8 = 0$, którego pierwiastkami są liczby $x_1 = 2$ oraz $x_2 = 4$.

Odpowiadające im wartości to $y_1 = 0$ oraz $y_2 = 2$. Zauważmy, że drugi punkt jest taki sam, jak punkt A , zatem $A' = (2, 0)$.

Przykład 7

Wyznamy równanie prostej, względem której punkty $A = (3, 2)$ i $B = (-1, -1)$ są symetryczne.

Rozwiązanie:

Prosta, względem której te punkty są symetryczne jest prostopadła do prostej AB .

Współczynnik kierunkowy prostej AB wynosi $a = \frac{-1-2}{-1-3} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$, zatem dla prostej prostopadłej $a = -\frac{4}{3}$.

Prosta ta przechodzi przez punkt, który jest środkiem odcinka AB .

Wobec tego $S_{AB} = (\frac{3-1}{2}, \frac{2-1}{2}) = (1, \frac{1}{2})$.

Po podstawieniu współrzędnych tego punktu do równania $y = -\frac{4}{3}x + b$ otrzymujemy, że:

$$\frac{1}{2} = -\frac{4}{3} \cdot 1 + b$$

Zatem $b = \frac{11}{6}$.

Szukana prosta jest postaci $y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{6}$.

Słownik

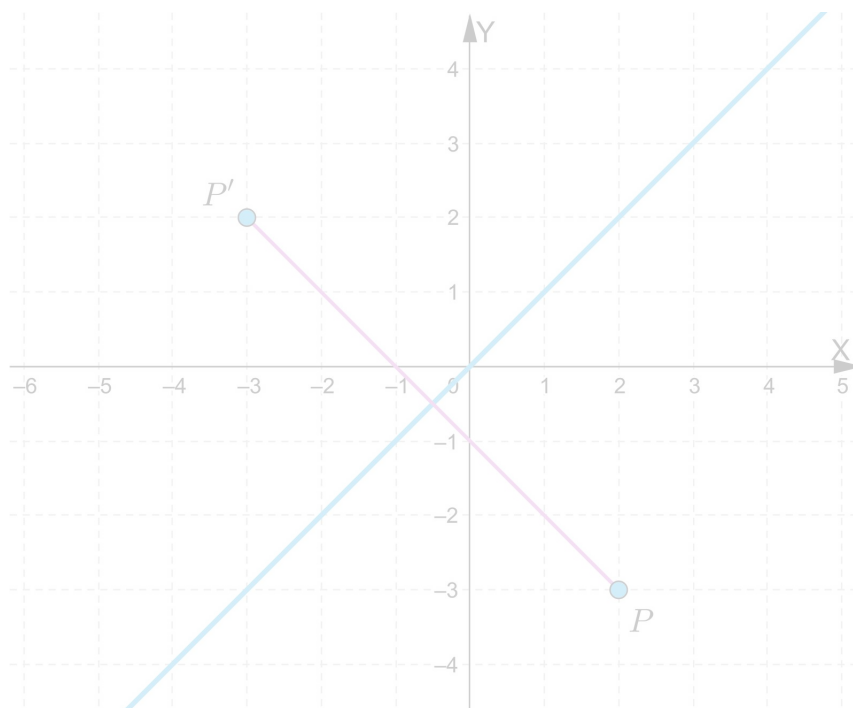
symetria względem prostej

odwzorowanie geometryczne, które każdemu punktowi P przyporządkowuje taki punkt P' , że oba punkty leżą po przeciwnych stronach tej prostej, na prostej prostopadłej i w równych odległościach od tej prostej

Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Zapoznaj się z działaniem symulacji interaktywnej. Zmieniaj położenie punktu P względem narysowanej prostej $y = x$. Zwróć uwagę na współrzędne punktu P' , który jest obrazem punktu P w symetrii względem tej prostej.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D133huStP>

Polecenie 2

Wyznacz współrzędne punktu P' symetrycznego do punktu $P = (1, -3)$ względem prostej:

- a. $y = 0$
- b. $y = 3$
- c. $y = x$
- d. $y = 3x$

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Połącz w pary punkty symetryczne względem prostej $y = x$:

$(4, -1)$

$(4, -1)$

$(-1, 4)$

$(1, 4)$

$(4, 1)$

$(-1, 4)$

$(1, -4)$

$(-4, 1)$

Ćwiczenie 2



Obrazem punktu $A = (3, -4)$ w symetrii względem prostej $y = -2x$ jest punkt:

☐ $A' = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{24}{5}\right)$

☐ $A' = \left(\frac{7}{5}, -\frac{24}{5}\right)$

☐ $A' = \left(-\frac{7}{5}, \frac{24}{5}\right)$

Ćwiczenie 3



Zaznacz wszystkie poprawne odpowiedzi. Punkty symetryczne względem podanej prostej:

☐ leżą na prostej równoległej do tej prostej.

☐ leżą w równych odległościach od tej prostej.

☐ leżą po tej samej stronie podanej prostej.

☐ leżą na prostej prostopadłej do tej prostej.

Ćwiczenie 4



Wpisz odpowiednie współrzędne punktu A' :

Punktem symetrycznym do punktu $A = (3, -4)$ względem prostej $y = 3$ jest punkt $A' = ($
,).

Ćwiczenie 5



1.									
2.									
3.									
4.									
5.									
6.									

1. Jego współrzędne oznaczamy jako (x, y) .
2. Ogólne lub kierunkowe prostej.
3. Długość odcinka prostopadłego do prostej, którego jednym końcem jest dany punkt, a drugim końcem jest punkt należący do prostej.
4. Zgodność między poszczególnymi elementami jakiejś całości.
5. Prosta prostopadła do odcinka i przechodząca przez jego środek.
6. Znajdujemy go w symetrii.

Ćwiczenie 6



Punkty $A = (-3, 1)$ i $B = (2, 0)$ są symetryczne względem prostej:

☐ $y = -\frac{1}{5}x + 3$

☐ $y = x$

☐ $y = 5x + 3$

Ćwiczenie 7



Wstaw w tekst.

Punkty $(2, -1)$ i $(0, 1)$ są symetryczne względem prostej .

Ćwiczenie 8



Wyznacz punkt A' symetryczny do punktu $A = (2, -2)$ względem prostej $y = x - 1$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Punkty symetryczne względem prostej $y = ax + b$

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zakres podstawowy. Uczeń:

7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje pojęcie symetrii względem prostej,
- wyznacza współrzędne punktów symetrycznych względem prostych zadanych równaniami w postaci kierunkowej,
- znajduje równania prostych, względem których punkty są symetryczne.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- objaśnienie nowej wiedzy;
- z użyciem e-podręcznika;

- rozmowa nauczająca w oparciu o treści zawarte w Samouczku i ćwiczenia interaktywne.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- e-podręcznik;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”. Wspólnie na forum klasy omawiają pytania i problemy.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości. Nauczyciel prosi, aby wybrany uczeń przeczytał polecenie numer 1 z sekcji „Symulacja interaktywna”. Uczniowie zapoznają się z materiałem i zapisują ewentualne problemy z jego zrozumieniem. Następnie dzielą się na grupy i ponownie analizują jego treść wspólnie wyjaśniając zaistniałe wątpliwości.
2. Uczniowie wykonują wspólnie ćwiczenia nr 1-2 z sekcji „Sprawdź się”. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych ćwiczeń, omawiając je wraz z uczniami.
3. Kolejne ćwiczenia (numer 3, 4 i 5) uczniowie wykonują w parach. Następnie konsultują swoje rozwiązania z inną parą uczniów i ustalają jedną wersję odpowiedzi.
4. Uczniowie rozwiązują indywidualnie ćwiczenia nr 6, 7 i 8. Nauczyciel sprawdza poprawność wykonanych, omawiając je wraz z uczniami.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

Materiały pomocnicze:

- [Symetria punktu względem prostej](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Symulacja interaktywna” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Punkty symetryczne względem prostej $y = ax + b$ ”.