Prawdopodobieństwo całkowite

Prawdopodobieństwo całkowite

Źródło: dostępny w internecie: pxhere.com, domena publiczna.

W tym materiale poznamy wzór pomocny w obliczaniu prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych wieloetapowych, zwany wzorem na prawdopodobieństwo całkowite.

Wzór ten znalazł się w dziele wybitnego francuskiego matematyka, astronoma, fizyka i statystyka Pierra de Laplace'a *Analityczna teoria prawdopodobieństwa*, wydanym w 1812 r. Książka ta do końca dziewiętnastego wieku była najpopularniejszym wykładem teorii prawdopodobieństwa.

Pierre Simon de Laplace
Pośmiertny portret autorstwa Jean-Baptiste Paulin Guerin, 1838.
Źródło: Wikipedia.org, dostępny w internecie: commons.wikimedia.org, domena publiczna.

Twoje cele

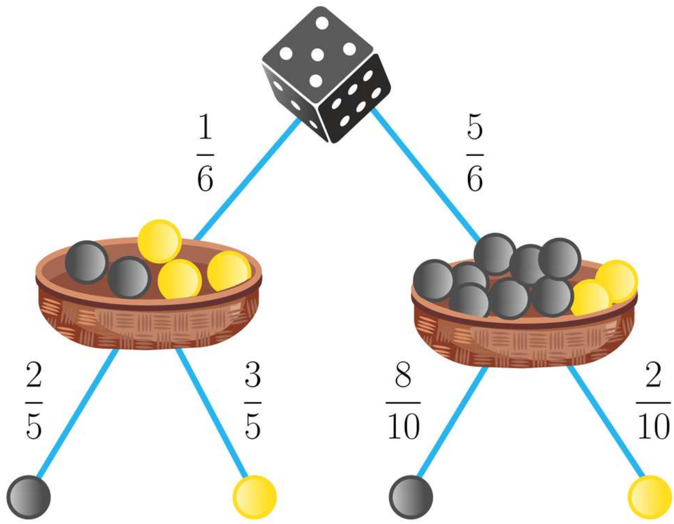
- Obliczysz prawdopodobieństwo zdarzenia losowego korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.
- Rozpoznasz zupełny układ zdarzeń i wykorzystasz własności tego układu w zadaniach.
- Dobierzesz odpowiedni model matematyczny do rozwiązania zadania probabilistycznego z kontekstem realistycznym.

Przeczytaj

Przykład 1

W pierwszym koszu znajdują się trzy kule żółte i dwie czarne. W drugiej urnie znajdują się dwie kule żółte i znajduje się osiem kul czarnych. Rzucamy kostką do gry. Jeśli wypadnie pięć oczek – losujemy kulę z pierwszego kosza. W przeciwnym razie losujemy kulę z drugiego kosza. Obliczymy prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej.

Sporządzamy graficzny model sytuacji opisanej w zadaniu.



Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że wylosowano kulę czarną,
B – zdarzenie polegające na wylosowaniu kuli z pierwszego koszyka.

Obliczymy prawdopodobieństwo za pomocą drzewa.

Skorzystamy z reguły mnożenia i dodawania dla odpowiednich gałęzi.

$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{10} = \frac{11}{15}$

Obliczenia możemy zapisać symbolicznie:

$P(A) = P(B) \cdot P(A/B) + P(B') \cdot P(A/B')$

Zapis ten doprowadza nas do wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

Nim sformułujemy formalnie ten wzór, przedstawimy najpierw pojęcie układu zupełnego zdarzeń.

Definicja: Zupełny układ zdarzeń

Niech Ω będzie dowolnym zbiorem zdarzeń elementarnych. Mówimy, że zdarzenia B_1, B_2, $\ldots$, $B_n \subset \Omega$ tworzą zupełny układ zdarzeń wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

- $P(B_i) > 0$, gdy $i \in \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n\}$,
- $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$,
- $B_i \cap B_j = \emptyset$, gdy $i \neq j$ oraz $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ i $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Sformułujemy teraz wzór na prawdopodobieństwo całkowite, który jest bardzo przydatny w rozwiązywaniu wielu problemów probabilistycznych.

Twierdzenie: Wzór na prawdopodobieństwo całkowite (zupełne)

Jeżeli zdarzenia B_1, B_2, $\ldots$, $B_n \subset \Omega$ tworzą zupełny układ zdarzeń, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ wyraża się wzorem:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A/B_n)$$

Przykład 2

W każdej z czterech szuflad znajduje się dziesięć krawatów. W pierwszej są trzy krawaty gładkie i siedem w paski, w drugiej znajduje się tyle samo krawatów gładkich co w paski. W trzeciej szufladzie jest siedem krawatów gładkich i trzy w paski, w czwartej są tylko krawaty w paski. Wybieramy w sposób losowy szufladę, a następnie w sposób losowy wyciągamy z tej szuflady krawat. Obliczymy prawdopodobieństwo wylosowania krawatu gładkiego, jeżeli wybór każdej z szuflad jest jednakowo prawdopodobny.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że wylosujemy gładki krawat,
B_1, B_2, B_3, B_4 – zdarzenie polegające na tym, że krawat losujemy odpowiednio z 1, 2, 3 lub 4 szuflady.

Zauważmy, że prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń B_1, B_2, B_3, B_4 jest dodatnie,

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = \Omega$ i zdarzenia B_1, B_2, B_3, B_4 parami się wykluczają.

Wynika z tego, że zdarzenia te tworzą zupełny układ zdarzeń.

Możemy skorzystać więc ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3) +$

$+ P(B_4) \cdot P(A/B_4)$

$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{0}{10}$

$P(A) = \frac{3+5+7+0}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wylosowania krawatu gładkiego jest równe $\frac{3}{8}$.

Przykład 3

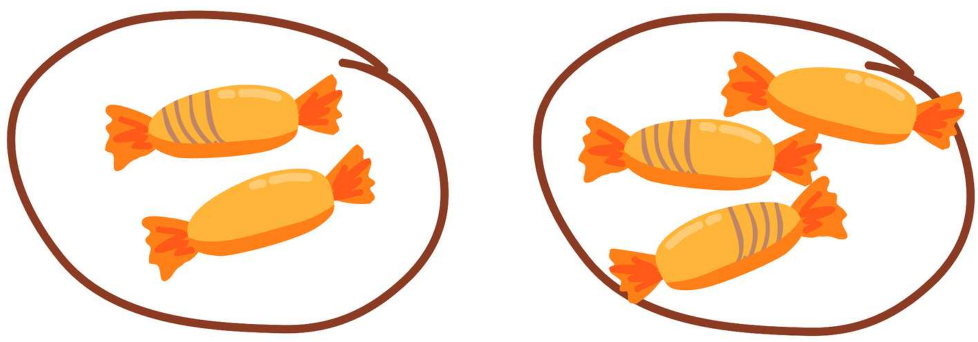
Adek zawsze kupuje tylko cukierki czekoladowe lub miodowe. Na biurku Adka stała torebka z dwoma cukierkami. Adek wrzucił do niej cukierek miodowy. Anka zauważyła torebkę i poczęstowała się jednym cukierkiem. Obliczymy prawdopodobieństwo, że Anka wyciągnęła z torebki cukierek miodowy.

Oznaczmy:
A – zdarzenie polegające na tym, że Anka wyciągnęła z torebki cukierek miodowy.

Nie wiemy jakie cukierki znajdowały się początkowo w torebce. Zakładamy jednak, że w grę wchodzą tylko cukierki czekoladowe i miodowe (bo tylko takie kupuje Adek).

Zatem musimy rozważyć trzy przypadki.

I przypadek:



Początkowo:
2 cukierki miodowe

Po wrzuceniu cukierka miodowego:
3 cukierki miodowe

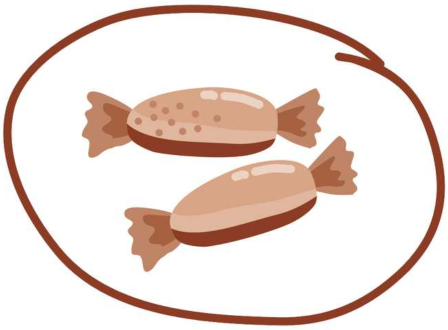
Oznaczmy:
B_1 – zdarzenie polegające na tym, że Ada wyciągnęła cukierek z torebki, w której początkowo były dwa cukierki miodowe.

Wtedy:

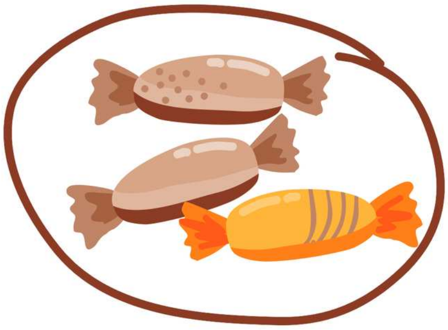
$P(B_1) = \frac{1}{3}$

$P(A/B_1) = \frac{3}{3}$

II przypadek:



Początkowo:
2 cukierki czekoladowe



Po wrzuceniu cukierka miodowego:
2 cukierki czekoladowe, 1 miodowy

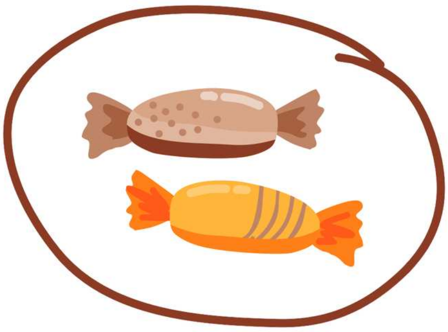
Oznaczmy:
B_2 – zdarzenie polegające na tym, że Ada wyciągnęła cukierek z torebki, w której początkowo były dwa cukierki czekoladowe.

Wtedy:

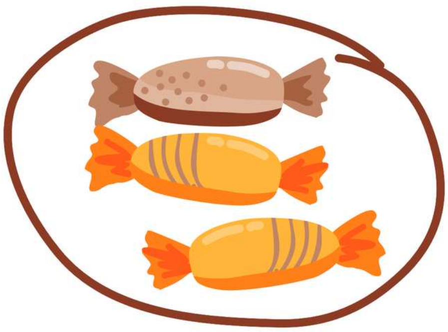
$P(B_2) = \frac{1}{3}$

$P(B_2) = \frac{1}{3}$

III przypadek:



Początkowo:
1 cukierek czekoladowy,
1 miodowy



Po wrzuceniu cukierka miodowego:
1 cukierek czekoladowy,
2 miodowe

Oznaczmy:
B_2 – zdarzenie polegające na tym, że Ada wyciągnęła cukierek z torebki, w której początkowo był jeden cukierek czekoladowy i jeden miodowy.

Wtedy:

$P(B_3) = \frac{1}{3}$

$P(A/B_3) = \frac{2}{3}$

Zauważmy, że prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń B_1, B_2, B_3 jest dodatnie,

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$ i zdarzenia B_1, B_2, B_3 są zdarzeniami parami wykluczającymi się.

Wynika z tego, że zdarzenia te tworzą zupełny układ zdarzeń.

Możemy skorzystać więc ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3)$

$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że Anka wyciągnęła z torebki cukierek miodowy jest równe $\frac{2}{3}$.

Przykład 4

Do sklepu codziennie dostarczane są rano pączki z marmoladą i karmelem z trzech cukierni A, B, C. Procentowy udział pączków z poszczególnych cukierni oraz udział pączków z karmelem przedstawia tabela.

	Cukiernia A	**Cukiernia B**	**Cukiernia C**
Udział procentowy	50%	20%	30%
Pączki z karmelem	$0,06$	$0,1$	$0,4$

Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany pączek z porannej dostawy będzie z karmelem.

Korzystamy bezpośrednio ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite. Potrzebne dane odczytujemy z tabeli.

$p = 0,5 \cdot 0,06 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,4$

$p = 0,03 + 0,02 + 0,12 = 0,17$

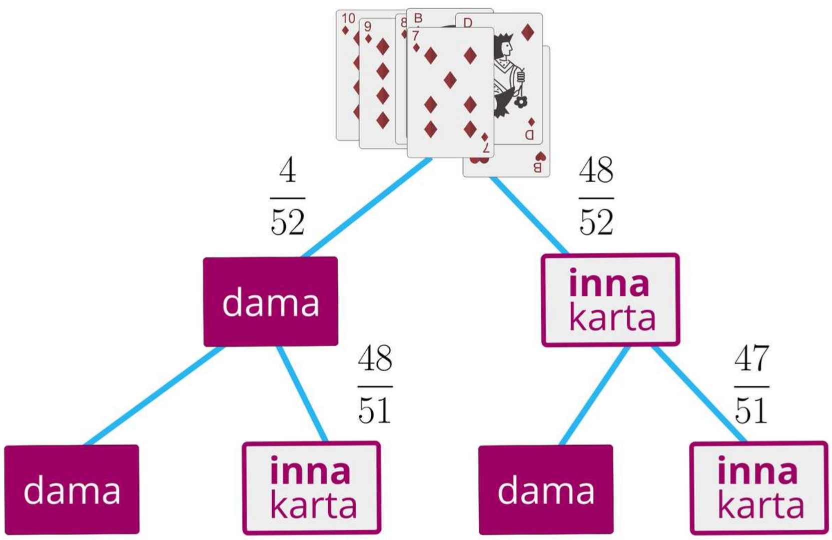
Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo wyboru pączka z karmelem jest równe $0,17$.

Przykład 5

Z talii liczącej 52 karty losujemy dwa razy bez zwracania po jednej karcie. Obliczymy prawdopodobieństwo tego, że druga wylosowana karta nie jest damą.

Karta wylosowana za pierwszym razem może być damą lub nie, ale wylosowana za drugim razem musi być inną kartą niż dama.



Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite. Potrzebne dane odczytujemy z rysunku.

$p = \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51}$

$p = \frac{48}{52} \cdot \left(\frac{4}{51} + \frac{47}{51}\right) = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

Odpowiedź:

Prawdopodobieństwo tego, że druga wylosowana karta nie jest damą jest równe $\frac{12}{13}$.

Słownik

wzór na prawdopodobieństwo całkowite

jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n \subset \Omega$ tworzą zupełny układ zdarzeń, to prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ wyraża się wzorem:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A/B_n)$$

Film samouczek

Polecenie 1

Zapoznaj się z filmem, który przybliży Ci zagadnienia związane z prawdopodobieństwem całkowitym. Postaraj się najpierw samodzielnie rozwiązać prezentowane tam problemy, a następnie porównaj z zamieszczonymi w filmie.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DjThGKOKL

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej prawdopodobieństwa całkowitego.

Polecenie 2

W koszyku znajduje się 6 grzybów w tym 2 prawdziwki. Z koszyka wyjęto 2 robaczywe grzyby. Następnie losowo wyciągnięto z koszyka 1 grzyb. Oblicz prawdopodobieństwo, że wyciągnięty grzyb to prawdziwek.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

W trzech pudełkach znajdują się kule zielone i czerwone. W tabeli podano, ile poszczególnych kul znajduje się w pudełkach.

Kule	Pudełko 1	Pudełko 2	Pudełko 3
Kule zielone	2	4	5
Kule czerwone	8	6	15

Rzucamy kostką. Jeżeli wypadną cztery oczka – losujemy jedną kulę z pierwszego pudełka. Jeśli wypadnie liczba oczek mniejsza niż cztery – losujemy jedną kulę z drugiego pudełka. Jeśli wypadnie liczba oczek większa od czterech losujemy jedną kulę z trzeciego pudełka.

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Do sklepu dostarczane są pomidory z dwóch gospodarstw ogrodniczych. Z pierwszego gospodarstwa pochodzi $\frac{3}{10}$ wszystkich pomidorów. Pomidory malinowe stanowią $\frac{1}{50}$ wszystkich pomidorów dostarczanych z pierwszego gospodarstwa i $\frac{1}{25}$ pomidorów dostarczanych z drugiego gospodarstwa. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany pomidor jest malinowy.

Ćwiczenie 8

W pudle znajdują się 3 kule białe i 2 czarne. W urnie znajdują się 4 kule białe i 3 czarne. Losujemy jedną kulę z pudła i przekładamy do urny. Następnie losujemy jedną kulę z urny. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania z urny kuli białej.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Prawdopodobieństwo całkowite

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. Zakres podstawowy.

Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- oblicza prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite
- rozpoznaje zupełny układ zdarzeń i wykorzystuje własności tego układu w zadaniach
- obiera odpowiedni model matematyczny do rozwiązania zadania probabilistycznego z kontekstem realistycznym

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- burza mózgów
- asocjogram
- dywanik pomysłów

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer
- kartony, mazaki

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają wiadomości dotyczące rachunku prawdopodobieństwa – najważniejsze definicje, pojęcia, wzory i twierdzenia.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują w grupach. Każda grupa zapoznaje się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj” i z filmem samouczkiem. Następnie metodą dywanika pomysłów grupy budują algorytm rozpoznawania i rozwiązywania zadań na prawdopodobieństwo całkowite. W wyniku analizy zapisów na dywaniku, wymiany pomysłów z innymi grupami, powinien powstać wspólny asocjogram zawierający gotowy schemat postępowania w przypadku zadań na prawdopodobieństwo całkowite.
2. Uczniowie, korzystając z wypracowanego modelu, rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1 – 4.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.
   Dyskusja – czy ustalone procedury postępowania pomogły (jeśli tak, to w jakim stopniu) w rozwiązywaniu zadań.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup.

Praca domowa:

Zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych 5 – 8 z sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (treść rozszerzona)

Wskazówki metodyczne:

Film samouczek może być wykorzystany w czasie zajęć zbierających bądź rozszerzających wiadomości dotyczące rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa.