Suma miar kątów wielokątów

O triangulacji nie tylko w geodezji. Suma miar kątów wielokąta.

Triangulacja jako metoda precyzyjnego pomiaru odległości w terenie zapoczątkowana została w 1615 roku przez siedemnastowiecznego holenderskiego astronoma i matematyka W. Snella van Royena. Polega ona na pokryciu siecią trójkątów obszaru, który poddawany jest pomiarom. Wierzchołki trójkątów utrwalane są w terenie za pomocą specjalnych słupków (dzisiaj w większości betonowych), które wkopuje się w ziemię. Aż do drugiej połowy XX wieku betonowym słupkom często towarzyszyły drewniane wieże ułatwiające obserwacje w terenie i montaż przyrządów geodezyjnych.

> **Twoje cele**
>
> - Poznasz pojęcie triangulacji, czyli podziału danej figury/powierzchni na trójkąty.
> - Wykorzystasz twierdzenie o sumie miar kątów trójkąta do sformułowania i dowodu twierdzenia o sumie miar kątów wielokąta.
> - Sformułujesz wniosek dotyczący miar kątów wielokąta wypukłego.
> - Zastosujesz poznane zależności do rozwiązywania problemów geometrycznych.

Przeczytaj

Kąty wielokąta

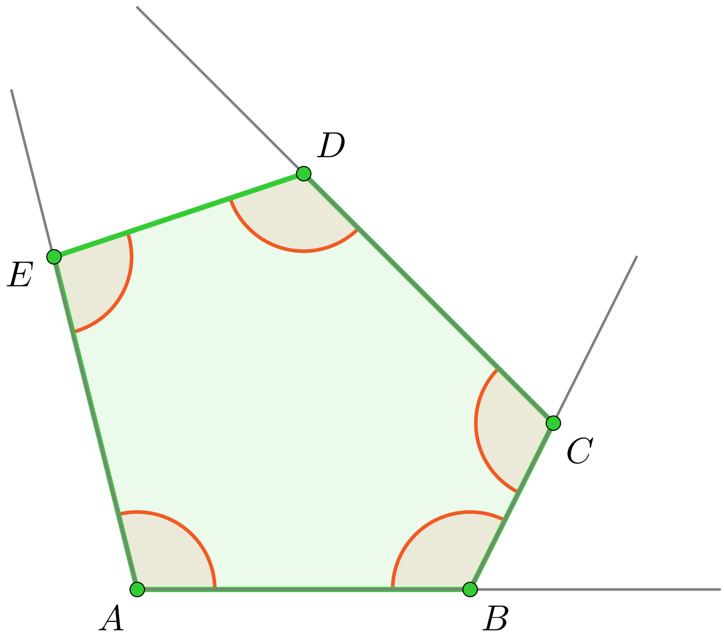
Definicja: Kąta wielokąta

Kątem wewnętrznym wielokąta (kątem wielokąta) nazywamy kąt, którego ramiona zawierają dwa sąsiednie boki wielokąta i dla którego istnieje otoczenie wierzchołka takie, że wszystkie punkty kąta zawarte w tym otoczeniu są punktami wielokąta.

Jeśli wszystkie kąty wielokąta są wypukłe, to wielokąt nazywamy **wypukłym**.

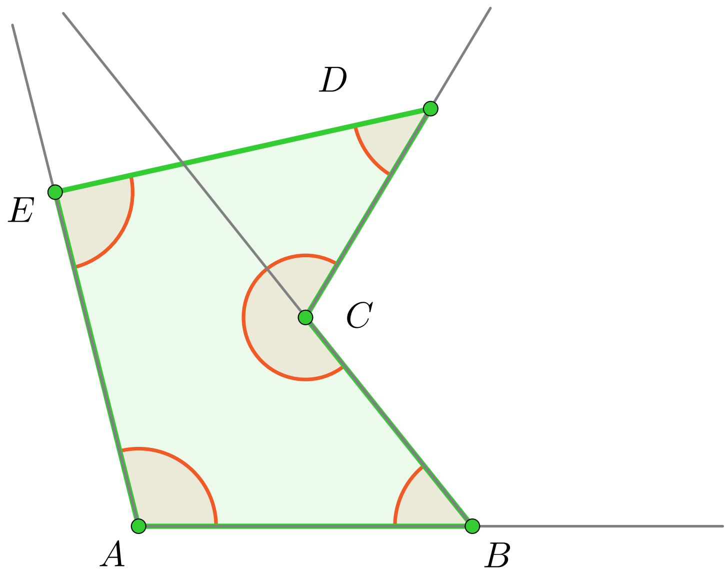
Przykład 1

Rozważmy pięciokąt wypukły $ABCDE$, taki jak na rysunku.



Wielokąt wypukły.

Zauważmy, że w każdym z kątów wielokąta $ABCDE$ zawiera się cały ten wielokąt. Własność zawierania się danego wielokąta w każdym z jego kątów wewnętrznych jest charakterystyczna dla wielokątów wypukłych. Rozważmy teraz pięciokąt $ABCDE$, który nie jest figurą wypukłą, taki jak na rysunku.



Wielokąt wklęsły

Zauważmy, że np. w kącie wewnętrznym EAB zawiera się cały ten wielokąt, ale już kąt wewnętrzny ABC zawiera tylko część danego wielokąta.

Definicja: Kąta zewnętrznego wielokąta

Kątem zewnętrznym wielokąta wypukłego nazywamy każdy kąt przyległy do jego kąta wewnętrznego.

Suma miar kątów wielokąta

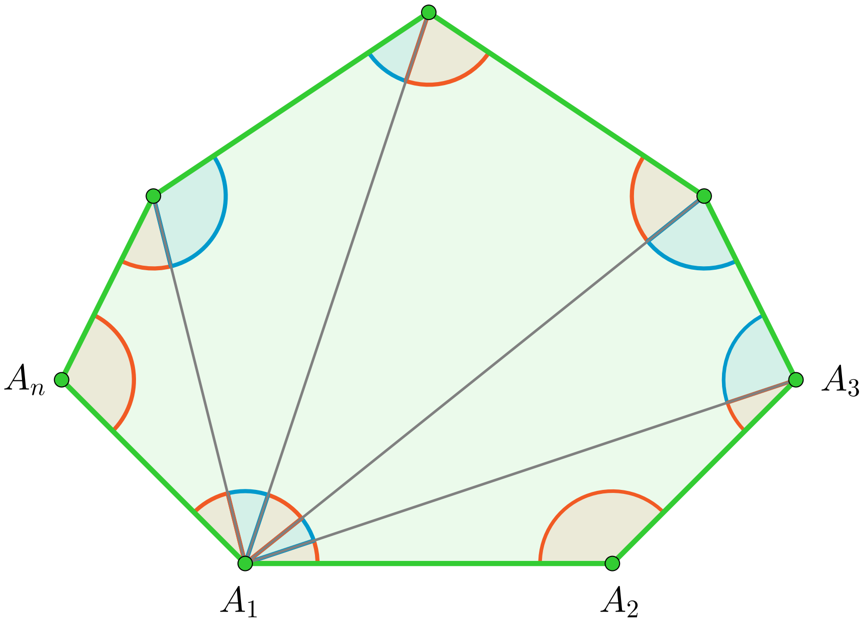
Zależność między liczbą wierzchołków wielokąta a sumą miar jego kątów wewnętrznych opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie: o sumie miar kątów wielokąta

Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta jest równa $180^\circ \cdot (n-2)$, gdzie n oznacza liczbę boków wielokąta $(n \in N,\ n > 2)$.

Dowód:

Przyjmijmy oznaczenia takie, jak na rysunku.



Rysunek do dowodu.

Zauważmy, że z dowolnego wierzchołka możemy poprowadzić $(n-3)$ przekątne (na rysunku poprowadzono przekątne z wierzchołka A_1), w wyniku czego dokonujemy triangulacji danego wielokąta. Przekątne te dzielą wielokąt na $(n-2)$ trójkąty. Suma miar kątów wszystkich tych trójkątów jest równa sumie miar kątów wielokąta. Ponieważ w każdym z trójkątów suma miar jest równa 180°, więc suma miar kątów wewnętrznych wielokąta jest równa $180^{\circ}\left(n-2\right)$.

Miara kąta wielokąta foremnego

Wykorzystamy teraz tezę twierdzenia o sumie miar kątów wielokąta do wyznaczenia miary kąta wewnętrznego n- kąta foremnego.

> **Definicja: wielokąta foremnego**
>
> Wielokątem foremnym nazywamy taki wielokąt, którego wszystkie boki mają taką samą długość i kąty wewnętrzne są przystające (mają równe miary).

Ponieważ suma miar wszystkich kątów wewnętrznych dowolnego wielokąta jest równa $180^{\circ}\left(n-2\right)$, gdzie n jest liczbą jego boków (wierzchołków), a kąty wielokąta foremnego są równe, zatem miara jednego kąta n- kąta foremnego jest równa:

$$\frac{1}{n}180^{\circ}\left(n-2\right)$$

Uzyskany wynik zapiszemy w postaci twierdzenia:

> **Twierdzenie: o mierze kąta wielokąta foremnego**

Miara kąta wewnętrznego n - kąta foremnego jest równa $180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{n}$, gdzie n jest liczbą jego boków (wierzchołków).

Przykład 2

Rozwiążemy zadanie, w którym do zbudowania modelu prowadzącego do wyznaczenia szukanej liczby boków, wykorzystamy powyższe twierdzenie.

Zadanie

Miara kąta wewnętrznego n - kąta foremnego jest o 4° mniejsza od miary kąta wewnętrznego $(n+3)$ - kąta foremnego. Oblicz n.

Rozwiązanie.

Miara kąta wewnętrznego n - kąta foremnego jest równa $180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{n}$, zatem miara kąta wewnętrznego $(n+3)$ - kąta foremnego jest równa $180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{n+3}$. Stąd i z treści zadania otrzymujemy równanie:

$$180^{\circ} - \frac{360}{n+3} = \left(180^{\circ} - \frac{360}{n}\right) + 4^{\circ}$$

Przekształcając dane równanie w sposób równoważny otrzymujemy kolejno

$$-\frac{360^{\circ}}{n+3} = -\frac{360^{\circ}}{n} + 4^{\circ}$$

$$-\frac{90}{n+3} = -\frac{90}{n} + 1$$

$$90\left(\frac{n+3}{n(n+3)} - \frac{n}{n(n+3)}\right) = 1$$

$$n^2 + 3n - 270 = 0$$

Pierwiastkami otrzymanego równania są liczby $n_1 = 15$, $n_2 = -18$. Ale rozwiązanie musi być liczbą naturalną, więc $n = 15$.

Słowniczek

kąt

część płaszczyzny ograniczona dwiema półprostymi o wspólnym początku; proste te nazywamy ramionami kąta, a ich początek nosi nazwę wierzchołka

wielokąt (wielobok, n-kąt, n-bok)

płaska figura geometryczna ograniczona łamaną zwyczajną zamkniętą, wraz z tą łamaną

Aplet

Polecenie 1
Uruchom aplet. Wybierz pięciokąt, a następnie kliknij w dowolny wierzchołek. Dokonując wyboru wierzchołków obserwuj, jak zmienia się triangulacja (podział danego wielokąta na trójkąty). Jednocześnie obserwuj, jaka jest liczba otrzymanych trójkątów, przy takiej metodzie triangulacji. Te same obserwacje przeprowadź dla ośmiokąta. Zapisz swoje spostrzeżenia w postaci stwierdzeń dotyczących liczby boków i liczby trójkątów w otrzymanej triangulacji.

Zasób interaktywny dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/DAI9niyEO

Polecenie 2
Uruchom aplet. Wybierz jeden z wielokątów, a następnie zaznacz wskaźnikiem myszy dowolny z wierzchołków. Zmieniając położenie wierzchołka obserwuj, jak zmieniają się miary poszczególnych kątów wewnętrznych oraz suma tych miar. Powtórz obserwacje dla drugiego z wielokątów. Zapisz swoje spostrzeżenia w postaci twierdzeń. Czy istnieje zależność między liczbą trójkątów w zaproponowanej triangulacji, a sumą miar kątów danego wielokąta?

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Udowodnij, że w dowolnym wielokącie wypukłym suma miar wszystkich kątów zewnętrznych jest wielkością stałą i jest równa 720°.

Ćwiczenie 8

Wyznacz wszystkie takie n - kąty foremne, w których kąt wewnętrzny ma miarę α i takie, że kąt wewnętrzny $2n$- kąta foremnego ma miarę 2α.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora: Wanda Człapińska

Przedmiot: Matematyka

Temat zajęć: Suma miar kątów wielokąta

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa

VIII. Planimetria

Uczeń

3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;

4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje i poprawnie nazywa kąty wewnętrzne i zewnętrzne wielokąta
- stosuje twierdzenie o sumie miar kątów w wielokącie do obliczania miar kątów oraz ustalania zależności między kątami
- stosuje twierdzenie o mierze kąta wielokąta foremnego do badania własności tych wielokątów
- odkrywa związki między kątami i liczbą boków wielokąta i stosuje je do rozwiązywania problemów geometrycznych

Strategie i metody nauczania:

- konstruktywizm.
- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy zajęć:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda grupa uczniów miała do dyspozycji komputer, najlepiej w pracowni komputerowej. Lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym.

Przebieg lekcji:

Faza wprowadzająca

1. Uczniowie wspólnie zastanawiają się w jaki sposób zaznaczone są charakterystyczne punkty w terenie, ułatwiające pomiary geodezyjne. Nauczyciel tak steruje dyskusją, by pojawiło się pojęcie triangulacji.

2. Nauczyciel prosi uczniów o przypomnienie pojęcia wielokąta i rodzajów wielokątów (foremne, wypukłe,...) oraz znanych im własności dotyczących kątów w tych wielokątach (np. twierdzenie o sumie miar kątów trójkąta czy czworokąta).

3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna

1. Nauczyciel precyzuje pojęcie wielokąta, jako figury płaskiej ograniczonej łamaną zwyczajną zamkniętą. Podaje przykłady wielokątów wypukłych (mówi o odcinku, który zawiera się w figurze) i wklęsłych. Uczniowie starają się zdefiniować te pojęcia. Uczniowie przypominają pojęcia: kąt wewnętrzny i kąt zewnętrzny wielokąta. Nauczyciel wprowadza intuicyjne pojęcie otoczenia punktu i wspólnie z uczniami doprecyzowuje pojęcie kąta wielokąta.

2. Uczniowie, pracując w grupach, wykorzystują aplet geogebry *Triangulacja wielokąta.*

3. Nauczyciel steruje dyskusją, jaką uczniowie prowadzą w trakcie wykonywania ćwiczeń z użyciem apletu w takim kierunku, aby uczniowie samodzielnie odkryli twierdzenie

o sumie miar kątów wielokąta. Następnie omawia szkic dowodu tego twierdzenia, z wykorzystaniem triangulacji.

4. Nauczyciel tak steruje pracą uczniów, aby odkrywali zależności między kątami i bokami w wielokącie foremnym, w szczególności by sformułowali twierdzenie o mierze kąta wielokąta foremnego, jako wniosku z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych wielokąta.

5. Rozwiązując problem postawiony w *Przykładzie 2.* nauczyciel tak steruje rozwiązaniem równania kwadratowego, by uczniowie stosowali wzory na pierwiastki trójmianu (jeśli je znają) .

6. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca

1. Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

2. Nauczyciel inicjuje dyskusję - czy łatwo odkrywać zależności geometryczne stosując ze zrozumieniem metody, które sprowadzają dany problem do sytuacji prostszej.

Praca domowa

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć, podkreślając potrzebę szczególnego przeanalizowania zagadnienia omówionego w *Ćwiczeniu 7.*

Materiały pomocnicze:

Twierdzenie o sumie kątów trójkąta

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania multimedium:

Aplet geogebry *Triangulacja wielokąta* można użyć do wprowadzenia twierdzenia o liczbie przekątnych wielokąta wypukłego.