



Ciąg geometryczny

Przykłady ciągów geometrycznych. Ilustracja interaktywna: ciąg geometryczny utworzony z kartek o formatach A0, A1, A2,... Definicja ciągu geometrycznego. Iloraz ciągu geometrycznego. Własność ciągu geometrycznego. Wzór ogólny ciągu geometrycznego. Ilustracje interaktywne: graficzna interpretacja ciągów geometrycznych.

Przykłady ciągów geometrycznych. Obliczanie sumy ciągu geometrycznego. Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego. Wyznaczanie wyrazów ciągu. Prezentacja interaktywna: konstrukcja ciągu geometrycznego.

Obliczanie sumy ciągu geometrycznego. Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego. Wyznaczanie wyrazów ciągu. Zasób zawiera zadania, w tym zadania interaktywne.

Obliczanie sumy ciągu geometrycznego. Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego. Wyznaczanie wyrazów ciągu. Zadania na dowodzenie. Zasób zawiera zadania. Część zadań jest interaktywna.

Obliczanie sumy ciągu geometrycznego. Obliczanie ilorazu ciągu geometrycznego. Wyznaczanie wyrazów ciągu. Zadania o podwyższonym stopniu trudności. Zadania na dowodzenie. Zasób zawiera zadania z wyjaśnieniami i rozwiązaniami.

Ciąg geometryczny

Materiał ten poświęcony jest ciągowi geometrycznemu. Poznasz definicję oraz niektóre własności ciągów geometrycznych. Analizując zawarte tu przykłady, dowiesz się jak sprawdzić czy podany ciąg jest geometryczny oraz jak obliczyć dowolny wyraz takiego ciągu.

Przykład 1

Spotykamy się czasem ze stwierdzeniem, że zeszyt, w którym piszemy, ma format A4 albo A5. Co to oznacza? Międzynarodowa norma definiuje 3 serie formatów A, B i C, przy czym formaty C związane są z określeniami formatów kopert.

Format A0 odpowiada prostokątowi o powierzchni 1 m^2 , przy czym jego wymiary są tak dobrane, żeby stosunek dłuższego boku do krótszego był równy $\sqrt{2}$. Mamy więc wymiary arkusza formatu A0: 1188 mm i $\frac{1188}{\sqrt{2}}$ mm. Format A1 jest połową formatu A0, czyli krótszy bok arkusza formatu A0 to dłuższy bok arkusza formatu A1 i stosunek dłuższego boku do krótszego jest równy $\sqrt{2}$. Zatem kartka formatu A1 ma wymiary: $\frac{1188}{\sqrt{2}}$ mm i $\frac{1188}{(\sqrt{2})^2}$ mm.

Otrzymujemy ciąg liczb, z których każda następna, oprócz pierwszej, jest $\sqrt{2}$ razy mniejsza od poprzedniej, czyli $\left(1188, \frac{1188}{\sqrt{2}}, \frac{1188}{(\sqrt{2})^2}, \frac{1188}{(\sqrt{2})^3}, \frac{1188}{(\sqrt{2})^4}, \dots\right)$.

Jakie wymiary będzie miał arkusz formatu A5?

Wymiary arkusza formatu A5 będą szóstą i siódmą liczbą w tym ciągu. Obliczamy

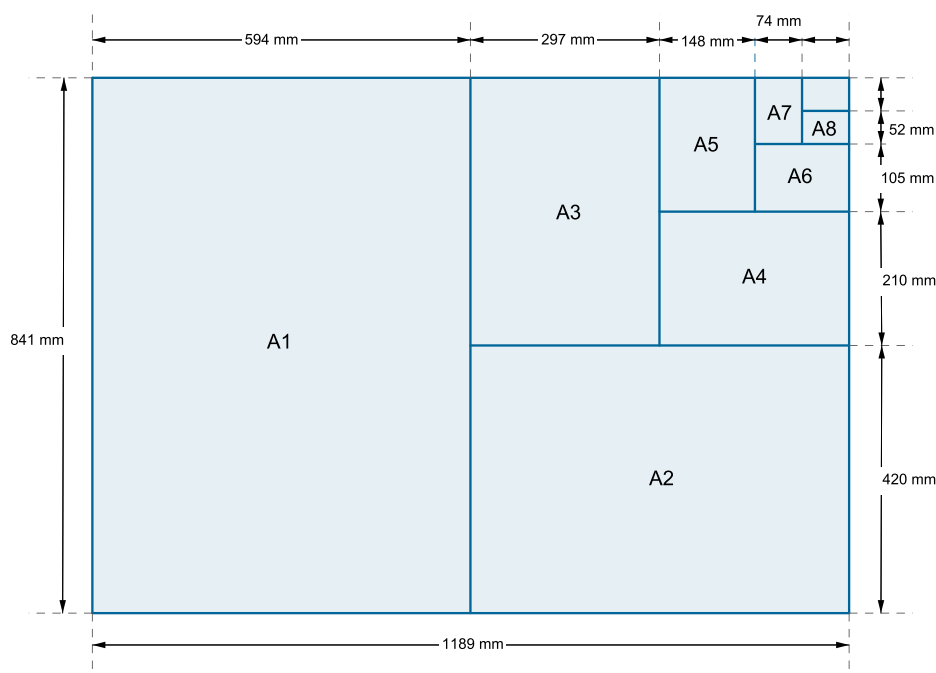
$$a_6 = \frac{a_5}{\sqrt{2}} = \frac{1188}{(\sqrt{2})^5} = \frac{297}{\sqrt{2}}$$

oraz

$$a_7 = \frac{a_6}{\sqrt{2}} = \frac{1188}{(\sqrt{2})^6} = \frac{1188}{8} = 148,5.$$

Zatem kartka formatu A5 ma wymiary $\frac{297}{\sqrt{2}}$ mm i $\frac{1188}{(\sqrt{2})^6} = 148,5$ mm.

W praktyce wymiary arkuszy są zaokrąglane do pełnych milimetrów. Otrzymujemy w ten sposób ciąg (1188, 840, 594, 420, 297, ...).



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Oba przykłady opisują ciągi, w których każdy kolejny wyraz jest iloczynem wyrazu poprzedniego przez pewną ustaloną liczbę. Takie ciągi nazywamy ciągami geometrycznymi.

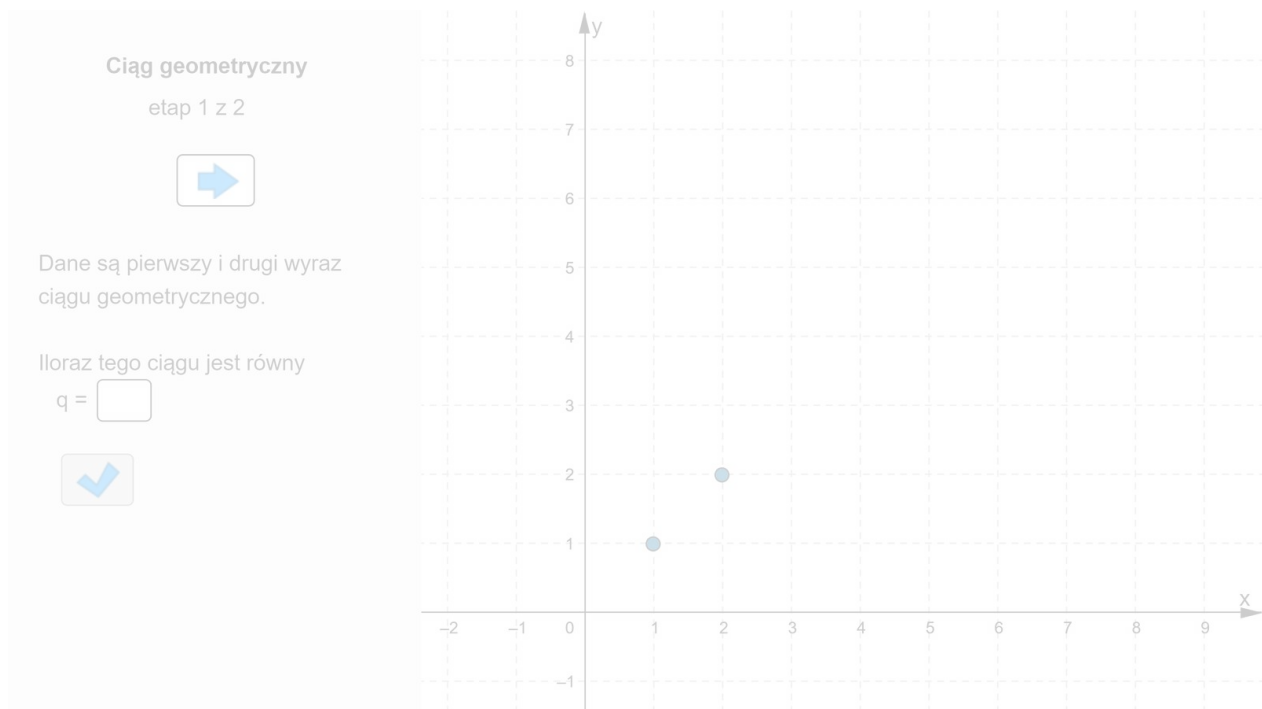
Definicja: Ciąg geometryczny

Ciąg (a_n) nazywamy **ciąg geometryczny**, jeżeli ma przynajmniej 3 wyrazy; jego pierwszy wyraz jest różny od 0, a każdy następny wyraz jest iloczynem poprzedniego wyrazu i pewnej ustalonej liczby. Liczbę tę nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego i oznaczamy przez q .

- Jeśli ciąg jest skończony i ma $k \geq 3$ wyrazów, to $a_1 \neq 0$ i $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla dowolnej liczby całkowitej $1 \leq n \leq k - 1$. Jeśli natomiast ciąg jest nieskończony, to $a_1 \neq 0$ i $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$.
Z definicji wynika, że:
 - jeśli $q \neq 0$, to, wobec warunku $a_1 \neq 0$, wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n) są różne od zera,
 - jeśli $q = 0$, to wyrazy ciągu $a_2, a_3, a_4, \dots$ są równe 0, czyli jest to ciąg postaci $a_1, 0, 0, 0, \dots$
- Ciąg geometryczny w pewnym sensie jest podobny do ciągu arytmetycznego. W ciągu arytmetycznym kolejny wyraz jest sumą poprzedniego wyrazu i pewnej ustalonej liczby. W ciągu geometrycznym kolejny wyraz jest iloczynem poprzedniego wyrazu oraz pewnej ustalonej liczby. Dlatego techniki, którymi będziemy się posługiwać w rozwiązywaniu zadań dotyczących ciągów geometrycznych i ciągów arytmetycznych, będą podobne, lecz wykonywane obliczenia będą inne.

- Żeby sprawdzić, czy ciąg jest geometryczny, postępujemy podobnie jak w przypadku ciągu arytmetycznego. Tam badaliśmy, czy różnica pomiędzy kolejnymi wyrazami jest stała. W przypadku ciągu geometrycznego, którego iloraz jest różny od zera, wystarczy zbadać, czy iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$.
- Dowolne trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego, w którym $a_1 \neq 0$ i $a_n \neq 0$, spełniają równość $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, którą możemy zapisać w postaci

$$a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}.$$



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1HW2b1Dj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Własność: Własność ciągu geometrycznego

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od 0 jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ ($1 < n < k$) ciąg (a_n) jest k -wyrazowy i prawdziwa jest równość:

$$a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}.$$

Jeżeli wyrazy ciągu (a_n) są liczbami dodatnimi, to równość $a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$ możemy zapisać w postaci $a_n = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$.

Oznacza to, że wyraz a_n jest średnią geometryczną wyrazów sąsiednich.

Zauważmy, że jeżeli w ciągu (a_n) jest $a_1 \neq 0$ oraz istnieją wyrazy równe 0 i wyrazy różne od 0, to z definicji wynika, że nie jest to ciąg geometryczny, mimo że może spełniać warunek $a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$.

Na przykład ciąg $(2, 0, 0, 3)$ spełnia warunki $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$ oraz $a_3^2 = a_2 \cdot a_4$, lecz nie jest to ciąg geometryczny.

Przykład 2

Sprawdź, czy ciąg $(\sqrt{2} - 1, 1, \sqrt{2} + 1)$ jest ciągiem geometrycznym.

Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu są różne od zera, więc możemy skorzystać z twierdzenia o własności ciągu geometrycznego. Wystarczy więc sprawdzić, czy $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$.

Iloczyn

$$a_1 \cdot a_3 = (\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1 = 1^2 = a_2^2,$$

więc wnioskujemy, że ten ciąg jest geometryczny.

Przykład 3

W ciągu geometrycznym kolejne wyrazy mają postać

$$a_1,$$

$$a_2 = a_1 q,$$

$$a_3 = a_2 q = (a_1 q) \cdot q = a_1 q^2,$$

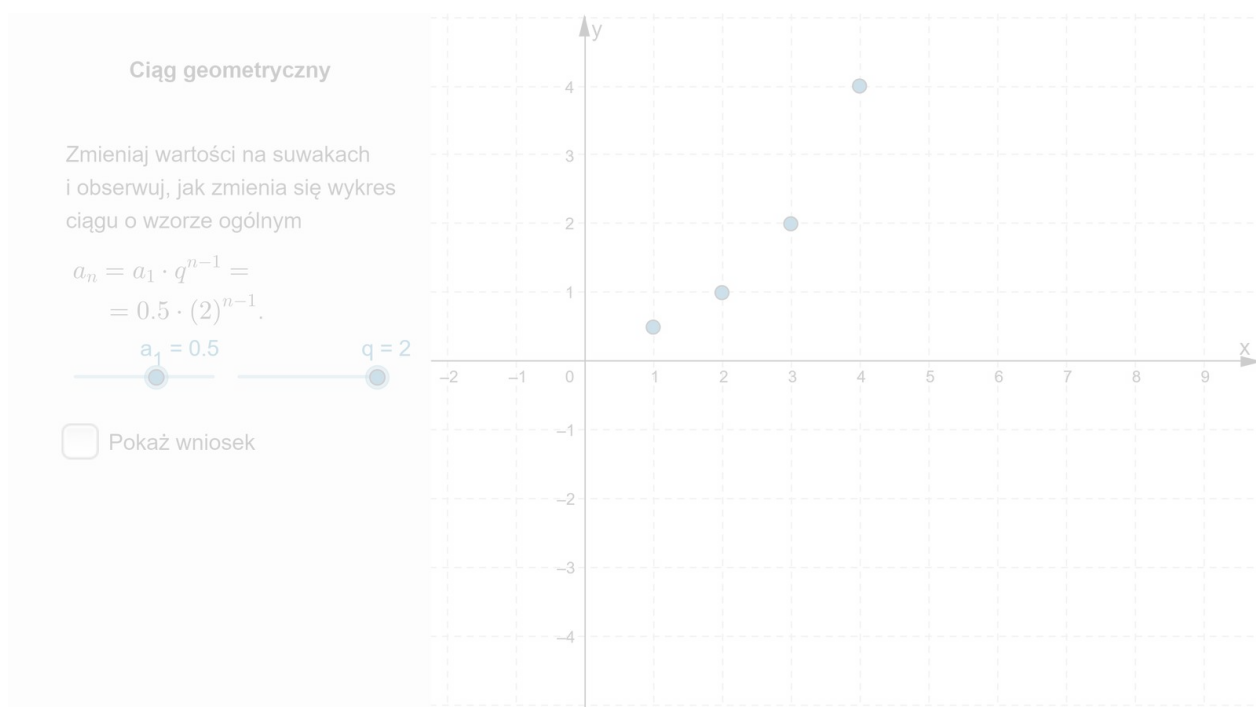
$$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) \cdot q = a_1 q^3,$$

i tak dalej.

Zauważmy, że każdy kolejny wyraz ciągu jest iloczynem wyrazu pierwszego oraz pewnej liczby czynników q . Czynników q jest o 1 mniej, niż wynosi numer wyrazu, który chcemy obliczyć, a więc wyraz a_n jest iloczynem wyrazu a_1 oraz $n - 1$ czynników q . Zatem n -ty wyraz ciągu jest równy $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Twierdzenie: Wzór ogólny ciągu geometrycznego

Jeżeli a_1 jest pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego (a_n) i q jest ilorazem tego ciągu, to dla dowolnej liczby całkowitej $n > 1$ mamy $a_n = a_1 q^{n-1}$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1HW2b1Dj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 4

Oblicz ósmy wyraz ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 81$ oraz $q = -\frac{1}{3}$.

Zastosujemy podany wcześniej wzór na n -ty wyraz ciągu geometrycznego. Ósmy wyraz ciągu jest więc równy

$$a_8 = a_1 q^7 = 81 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -3^4 \cdot 3^{-7} = -3^{-3} = -\frac{1}{27}.$$

Przykład 5

Którym wyrazem ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = 3$ oraz $q = 5$, jest liczba 1875?

Ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego mamy $3 \cdot 5^{n-1} = 1875$. Stąd otrzymujemy $5^{n-1} = 625 = 5^4$.

Zatem $n - 1 = 4$, czyli $n = 5$. Liczba 1875 jest więc piątym wyrazem ciągu (a_n) .

Przykład 6

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $a_1 = 1$, a trzeci wyraz tego ciągu jest o 2 większy od drugiego wyrazu tego ciągu. Oblicz iloraz q tego ciągu.

Drugi i trzeci wyraz ciągu są równe $a_2 = a_1q$, $a_3 = a_1q^2$.

Ponieważ $a_1 = 1$, to $a_2 = 1 \cdot q = q$ oraz $a_3 = 1 \cdot q^2 = q^2$. Wyrazy te różnią się o 2, czyli $a_3 - a_2 = 2$, więc $q^2 - q = 2$.

Otrzymaliśmy równanie kwadratowe z niewiadomą q . Ma ono dwa rozwiązania $q_1 = -1$ oraz $q_2 = 2$.

Są więc dwa takie ciągi geometryczne o ilorazach $q_1 = -1$ oraz $q_2 = 2$.

Przykład 7

Pomiędzy liczby $\frac{64}{3}$ oraz 9 wstaw takie dwie liczby, żeby otrzymać czterowyrazowy ciąg geometryczny.

Liczba 9 jest czwartym, a liczba $\frac{64}{3}$ pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego. Stąd $9 = \frac{64}{3}q^3$, gdzie q oznacza iloraz tego ciągu.

Zatem $q = \frac{3}{4}$.

Drugi wyraz tego ciągu jest więc równy $x = \frac{64}{3} \cdot q = \frac{64}{3} \cdot \frac{3}{4} = 16$, a trzeci $y = x \cdot q = 16 \cdot \frac{3}{4} = 12$.

Przykład 8

Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_6 + a_5 = 1944$ oraz $a_6 - a_4 = 1296$.

Korzystając ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego, kolejne wyrazy ciągu geometrycznego zapisujemy $a_3 = a_1q^2$, $a_4 = a_1q^3$, $a_5 = a_1q^4$, $a_6 = a_1q^5$. Równania dane w zadaniu zapisujemy więc w postaci układu równań

$$\begin{cases} a_1q^5 + a_1q^4 = 1944 \\ a_1q^5 - a_1q^3 = 1296 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q^4(q + 1) = 1944 \\ a_1q^3(q^2 - 1) = 1296 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1q^4(q + 1) = 1944 \\ a_1q^3(q - 1)(q + 1) = 1296 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wynika, że $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ oraz $q + 1 \neq 0$. Gdyby tak nie było, równanie byłoby sprzeczne, gdyż po lewej stronie mielibyśmy 0, a po prawej 1944. Dzielimy więc stronami drugie równanie przez pierwsze. Wtedy otrzymujemy

$$\frac{a_1 q^3 (q - 1)(q + 1)}{a_1 q^4 (q + 1)} = \frac{1296}{1944},$$

czyli

$$\frac{q - 1}{q} = \frac{2}{3}.$$

Stąd $3q - 3 = 2q$. Zatem $q = 3$.

Z równania $a_1 q^4 (q + 1) = 1944$ i $q = 3$, otrzymujemy

$$a_1 = \frac{1944}{q^4 (q + 1)} = \frac{1944}{3^4 (3 + 1)} = 6.$$

Ciąg geometryczny może być malejący, rosnący, stały, niemalejący, nierosnący albo w ogóle może nie być monotoniczny. Zależy to od wartości ilorazu oraz znaku pierwszego wyrazu. Na przykład ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 4$ oraz $q = 2$, a więc ciąg (4, 8, 16, 32, 64, ...) jest rosnący, gdyż każdy kolejny wyraz ciągu jest dwa razy większy od poprzedniego i pierwszy wyraz jest dodatni.

Korzystając z poniższego apletu, zbadaj monotoniczność kilku ciągów geometrycznych.

Konstrukcja ciągu geometrycznego

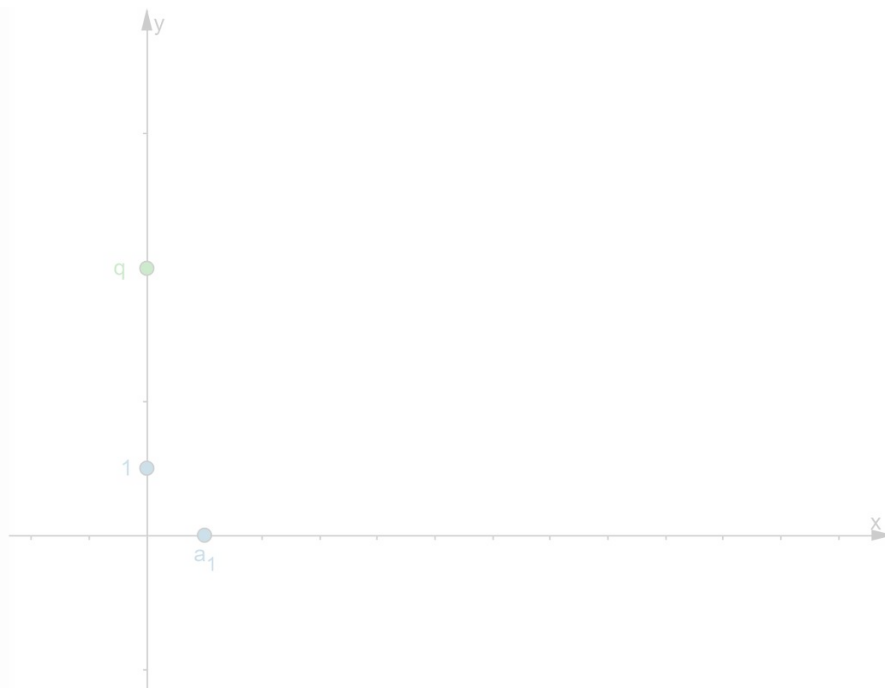
etap 1 z 8



Na osi OX układu współrzędnych wybrany jest punkt, którego odcięta jest pierwszym wyrazem a_1 pewnego ciągu geometrycznego.

Możesz zmieniać dowolnie wartość tego wyrazu, przesuwając go wzdłuż tej osi.

Na osi OY wybrany jest punkt, którego rzędna jest wartością ilorazu q tego ciągu.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1HW2b1Dj>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 1

Pogrupuj ciągi przesuwając w odpowiednie miejsce ich wzór ogólny.

Ciąg arytmetyczny:

Ciąg geometryczny:

$$a_n = 5^n$$

$$a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n$$

$$a_n = 2^{n-2}$$

$$a_n = -\frac{3}{4}n + 5$$

$$a_n = \frac{3n-5}{2}$$

$$a_n = 6 + n$$

$$a_n = \frac{1}{2}n - 3$$

$$a_n = \frac{7^n}{3}$$

$$a_n = 5n$$

$$a_n = 5 + 2n$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 2



Połącz w pary wzór ogólny ciągu geometrycznego z odpowiednimi wartościami a_1 i q .

$$a_n = -16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = 8, q = -\frac{1}{2}$$

$$a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$a_1 = -8, q = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$a_1 = 4, q = \frac{1}{4}$$

$$a_n = -16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, q = 8$$

$$a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$a_1 = 8, q = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{16} \cdot 8^n$$

$$a_1 = 2, q = \frac{1}{8}$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 3



Sprawdź, czy podany ciąg jest geometryczny. Jeżeli jest, to znajdź jego iloraz.

1. $a_n = (0, 3)^n$,

2. $b_n = \frac{2^n}{7}$,

3. $c_n = 3^{n+4}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 4



Połącz w pary ciąg geometryczny z odpowiadającym mu ilorazem.

2	(3, -6, 12, ...)
-2	(2, 6, 18, ...)
-3	(3, 6, 12, ...)
$\frac{1}{2}$	(12, 6, 3, ...)
$-\frac{1}{2}$	(-2, 6, -18, ...)
3	(-12, 6, -3, ...)

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5



Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) , a następnie uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie wzory lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

- Ciąg geometryczny o wyrazach $a_1 = 10$ oraz $a_6 = \frac{5}{16}$ wyraża się wzorem

- Ciąg geometryczny o wyrazach $a_3 = \frac{1}{2}$ oraz $a_6 = \frac{125}{2}$ wyraża się wzorem

$a_n = \frac{1}{50} \cdot 5^{n-1}$

$a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

$a_n = \frac{3}{50} \cdot 5^{n-3}$

$a_n = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6



Ustaw wyrazy w odpowiedniej kolejności, tak żeby utworzyły ciąg geometryczny, którego iloraz jest mniejszy od 1.

Ciąg A

$$\frac{25}{2}$$



$$2$$



$$\frac{16}{125}$$



$$5$$



$$\frac{4}{5}$$



$$\frac{8}{25}$$



$$\frac{125}{4}$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ciąg B

$$\frac{3}{8}$$



$$\frac{32}{3}$$



$$\frac{128\sqrt{3}}{9}$$



$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\frac{8}{\sqrt{3}}$$



$$2$$



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7



Dane są dwa wyrazy ciągu geometrycznego $a_6 = 20$ i $a_8 = 80$. Zaznacz wszystkie informacje prawdziwe na temat tego ciągu.

☐ $a_4 = 5$

☐ $q = 2$ lub $q = -2$

☐ $a_7 = 50$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8



Liczby $x - 1$, $2x + 2$, $6x + 6$ są kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby, a następnie uzupełnij nimi poniższe zdanie, wpisując je w kolejności rosnącej.

Te wyrazy ciągu geometrycznego to , , .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9



Suma trzech wyrazów tworzących ciąg geometryczny jest równa (-7) , a ich iloczyn jest równy 27. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu, a następnie zaznacz odpowiedź, która zawiera parametry tego ciągu.

☐ $q = -5$ oraz $a_1 = 1$ lub $q = -\frac{1}{5}$ oraz $a_1 = -12$

☐ $q = -2$ oraz $a_1 = 1$ lub $q = -\frac{1}{2}$ oraz $a_1 = -7$

☐ $q = -3$ oraz $a_1 = -1$ lub $q = -\frac{1}{3}$ oraz $a_1 = -9$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10



Udowodnij, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ prawdziwa jest równość $a_n a_{n+3} = a_{n+1} a_{n+2}$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11



W ciągu geometrycznym pierwszy wyraz jest równy 3, a iloraz $\frac{1}{3}$. Którym wzorem można zapisać dwudziesty wyraz tego ciągu? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $a_{20} = \frac{1}{3} \cdot (3)^{19}$

☐ $a_{20} = \frac{1}{3} \cdot (3)^{20}$

☐ $a_{20} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{20}$

☐ $a_{20} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{19}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12



Piąty wyraz rosnącego ciągu geometrycznego jest równy $5\frac{1}{3}$, a siódmy $21\frac{1}{3}$. Ile jest równy iloraz tego ciągu? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ -2

☐ -4

☐ 4

☐ 2

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13



Który z poniższych ciągów jest geometryczny? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $\frac{1+\sqrt{3}}{6}, \frac{2+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

☐ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{18}$

☐ $\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{1+\sqrt{3}}{9}, \frac{3+\sqrt{3}}{18}$

☐ $\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{1+\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{18}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14



W ciągu geometrycznym mamy $a_2 = \frac{3}{4}$ oraz $a_5 = \frac{16}{9}$. Zaznacz prawdziwą informację na temat tego ciągu.

☐ $a_1 \cdot a_3 = 1$

☐ $a_1 \cdot a_3 = \frac{1}{3}$

☐ $a_1 \cdot a_3 = \frac{9}{16}$

☐ $a_1 \cdot a_3 = \frac{4}{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15



W ciągu geometrycznym dane są $a_1 = 3$ oraz $a_4 = 192$. Oblicz iloraz tego ciągu, a następnie uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Iloraz tego ciągu wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16



Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) , w którym $a_3 = 1$ oraz $a_4 = \frac{3}{4}$. Wyznacz pierwszy wyraz tego ciągu, a następnie uzupełnij zdanie, przeciągając w lukę odpowiednią liczbę lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej.

Pierwszy wyraz ciągu to .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17



W ciągu geometrycznym (a_n) dane są wyrazy $a_4 = \frac{45}{16}$ oraz $a_6 = \frac{405}{4}$. Wyznacz wzór ogólny tego ciągu i zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $a_n = \frac{6 \cdot 8^{n-1}}{348}$ lub $a_n = -\frac{6 \cdot (-8)^{n-1}}{348}$

☐ $a_n = \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{356}$ lub $a_n = -\frac{3 \cdot (-4)^{n-1}}{356}$

☐ $a_n = \frac{5 \cdot 6^{n-1}}{384}$ lub $a_n = -\frac{5 \cdot (-6)^{n-1}}{384}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18



Dany jest ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = -3$ oraz ilorazie $q = -2$. Którym wyrazem tego ciągu jest liczba 96? Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Liczba 96 jest wyrazem tego ciągu.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 19



Stosunek sumy trzech pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego do sumy wyrazów pierwszego i trzeciego jest równy $\frac{3}{5}$. Ile wynosi iloraz tego ciągu? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ -4 lub $-\frac{1}{4}$

☐ -8 lub $-\frac{1}{8}$

☐ -2 lub $-\frac{1}{2}$

☐ -6 lub $-\frac{1}{6}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 20



Jaką liczbę trzeba dodać do każdej z liczb: (-2) , 2 , 22 , żeby otrzymane liczby były kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego? Uzupełnij poniższe zdanie, wpisując w lukę odpowiednią liczbę.

Trzeba dodać liczbę .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 21



Połącz w pary wyraz środkowy z ciągiem tak, aby powstał ciąg geometryczny.

$(5, a_2, 20)$

$a_2 = 9$

$(100, a_2, 4)$

$a_2 = 10$

$(64, a_2, 4)$

$a_2 = 8$

$(27, a_2, 3)$

$a_2 = 20$

$(1, a_2, 25)$

$a_2 = 12$

$(36, a_2, 1)$

$a_2 = 6$

$(3, a_2, 48)$

$a_2 = 5$

$(2, a_2, 32)$

$a_2 = 16$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 22



Wykaż, że jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym o wyrazach różnych od zera, to każdy z ciągów (b_n) i (c_n) określonych wzorami $b_n = \frac{2}{a_n}$ oraz $c_n = a_{3n}$ też jest geometryczny.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 23



Oblicz odpowiednie parametry podanych ciągów, a następnie uzupełnij zdania, przeciągając w luki odpowiednie liczby lub kliknij w lukę i wybierz odpowiedź z listy rozwijalnej, umieszczając wyrazy ciągu w kolejności malejącej.

- Ciąg $(2, x, 98)$ jest geometryczny, oznacza to, że $x =$, a iloraz tego ciągu wynosi $q =$ lub $x =$, a iloraz tego ciągu wynosi $q =$.
- Ciąg $(2 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, x)$ jest geometryczny, oznacza to, że $x =$, a iloraz tego ciągu wynosi $q =$.

3	5	-7	$\sqrt{5} - 1$	-15	-14	$\sqrt{2} - 1$	14	15	-6	7	-5	2
1	$\sqrt{3} - 1$	12	4	-12	6							

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 24



Pomiędzy liczby 432 oraz 250 wstaw takie dwie liczby a i b , żeby ciąg $(432, a, b, 250)$ był geometryczny i uzupełnij nimi odpowiedź.

Te liczby to $a =$ oraz $b =$.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 25

Ciąg geometryczny składa się z ośmiu wyrazów. Suma pierwszych sześciu wyrazów jest równa 1, a suma sześciu ostatnich jest równa 16. Oblicz możliwe ilorazy tego ciągu i uzupełnij nimi odpowiedź, wpisując je w kolejności rosnącej.

Ilorazem tego ciągu może być lub .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 26



Wyznacz pierwszy wyraz oraz iloraz ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_4 + 17a_2 = 1$ oraz $a_2 + a_4 + a_6 = 1$, a następnie zaznacz odpowiedź, która zawiera prawidłowe parametry.

☐ $q = 4$ i $a_1 = \frac{1}{44}$ lub $q = -4$ i $a_1 = -\frac{1}{44}$

☐ $q = 8$ i $a_1 = \frac{1}{48}$ lub $q = -8$ i $a_1 = -\frac{1}{48}$

☐ $q = 2$ i $a_1 = \frac{1}{42}$ lub $q = -2$ i $a_1 = -\frac{1}{42}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 27



Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych wyrazów ciągu geometrycznego, które są liczbami całkowitymi różnymi od zera, jest podzielna przez sumę tych wyrazów.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 28



Wykaż, że liczby 5, 6 i 7 nie mogą być wyrazami tego samego ciągu geometrycznego.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.