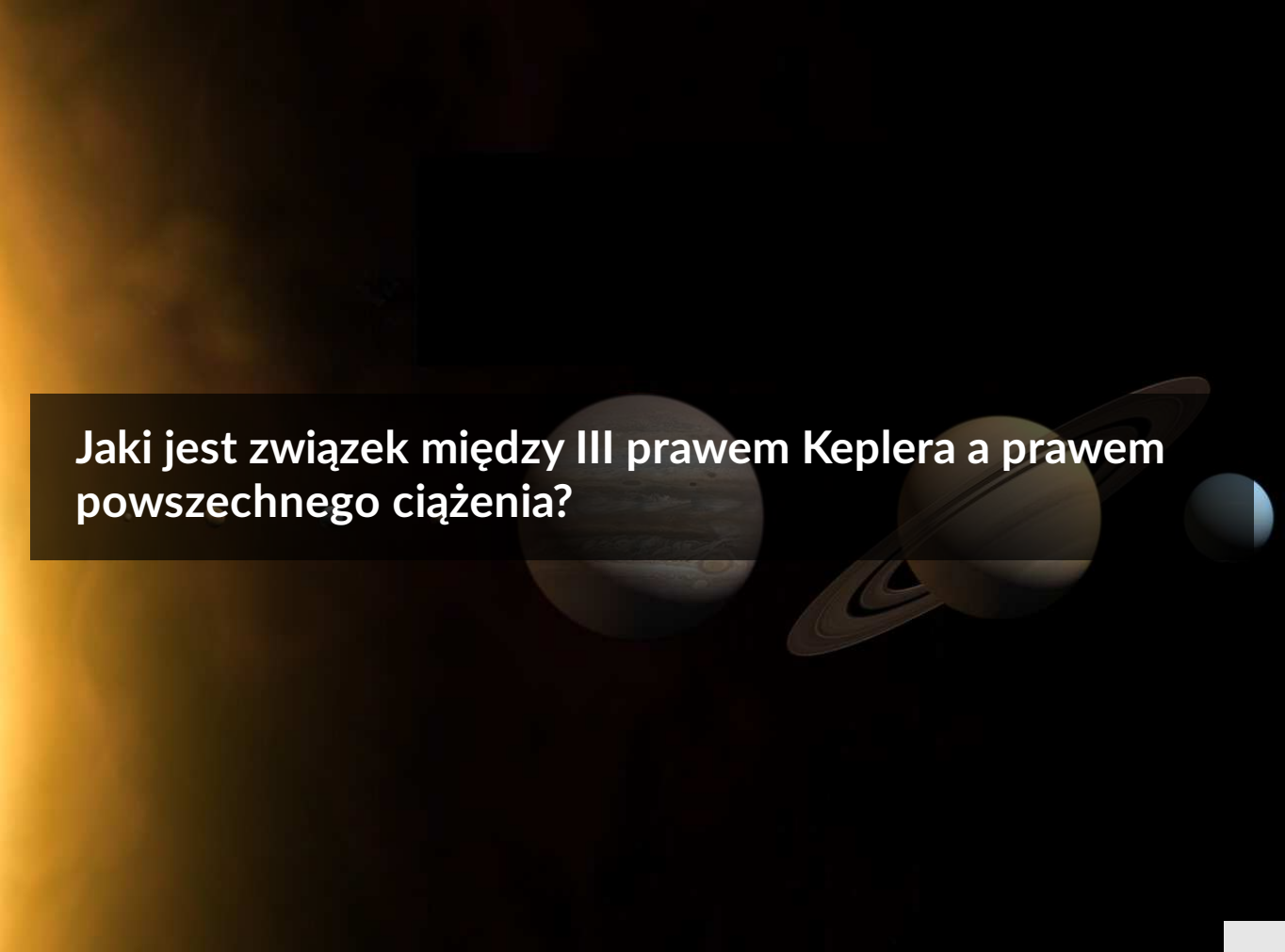


Jaki jest związek między III prawem Keplera a prawem powszechnego ciążenia?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jaki jest związek między III prawem Keplera a prawem powszechnego ciężenia?

Czy to nie ciekawe ?

Johannes Kepler już na przełomie XVI i XVII wieku opisał ruch planet wokół Słońca. Odkrył on trzy prawa opisujące ruch planet w Układzie Słonecznym. Trzecie prawo Keplera opisuje zależność pomiędzy parametrem orbity, jakim jest wielka półoś orbity, a okresem obiegu planety znajdującej się na tej orbicie. Było to ogromne odkrycie! Były to czasy, w których nie znano zasad rządzących ruchem ciał. Dopiero 13 lat po śmierci Keplera urodził się Isaac Newton. To on odkrył prawo powszechnej grawitacji, które rządzi ruchem ciał posiadających masę! Jaki związek ma prawo powszechnego ciężenia z ruchem orbitalnym planet? Jak bez fundamentalnej wiedzy fizycznej Kepler wyznaczył prawdziwe zależności w Układzie Słonecznym? O tym wszystkim dowiesz się w tym e-materiale.

Twoje cele

Pracując z tym e-materiałem:

- przeanalizujesz siły w układzie dwóch ciał,
- poznasz przybliżenia, jakie można stosować w obliczeniach astronomicznych,
- wyznacysz stałą w III prawie Keplera przy pomocy praw Newtona,
- zrozumiesz zależność pomiędzy prawem Keplera a prawem powszechnego ciężenia.

Przeczytaj

Warto przeczytać

Johannes Kepler był znakomitym uczonym. Podobnie jak wielu astronomów i filozofów przed nim, Kepler przekonany był o jedności i doskonałej harmonii przyrody, której przejawów szukał w związkach liczbowych między wielkościami opisującymi ruch planet. Wnikliwa analiza wieloletnich obserwacji zebranych przez Tycho Brahe sprawiła, że Kepler znalazł owe zależności. W swoim trzecim prawie opisał zależność pomiędzy wielką półosią orbity a okresem obiegu planety wokół Słońca.

III prawo Keplera:

Stosunek kwadratu okresu obiegu planety wokół Słońca do sześcienu wielkiej półosi jej orbity (czyli średniej odległości od Słońca) jest stały dla wszystkich planet w Układzie Słonecznym.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

Nie wiedział on, ile dokładnie ta stała wynosi i skąd się bierze, ale wiedział, że stosunek tych dwóch wielkości jest taki sam dla wszystkich analizowanych (znanych w jego czasach) planet. Kilkadziesiąt lat później Isaac Newton, wyznając te same zasady co Kepler, analizował otaczający go świat.

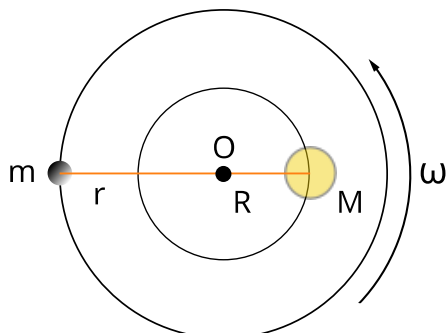
Isaac Newton uważany jest za najwybitniejszego i jednego z najważniejszych uczonych wszechczasów. Jako pierwszy wykazał, że te same prawa rządzą ruchem ciał na Ziemi i ruchem ciał niebieskich. Jego prawa, opisujące ruch na Ziemi, dały matematyczne uzasadnienie prawom Keplera, a także uogólniły je. W jaki sposób? Przeanalizujmy ruch mas z punktu widzenia Newtona.

Newtonowskie [prawo powszechnego ciążenia](#) mówi, że:

Między dowolną parą ciał posiadających masy pojawia się siła przyciągająca, która działa na linii łączącej ich środki, a jej wartość jest wprost proporcjonalna do iloczynu mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

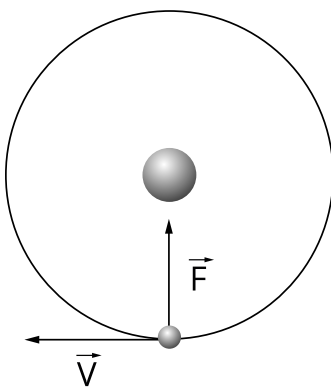
Ma ono postać: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, gdzie G to [stała grawitacji](#).

Rozpatrzmy to prawo w przypadku ruchu dwóch mas m i M wokół wspólnego środka masy O (Rys. 1.).



Rys. 1. Ruch dwóch ciał o masach M i m wokół ich środka masy O . Ciało o masie $m < M$ porusza się po okręgu o promieniu r , a ciało o masie M po okręgu o promieniu R . Prędkość kątowna układu to ω . Zwróć uwagę, że w tym ruchu okres obiegu obu ciał wokół wspólnego środka masy jest taki sam.

Środek masy to punkt charakterystyczny dla rozkładu masy w ciele lub układzie ciał. Jeżeli rozpatrywalibyśmy identyczne masy, to środek ten leżałby w połowie odległości między nimi. Im bardziej masywny jest jeden składnik układu, tym środek masy znajduje się bliżej niego. W przypadku ruchu planety o masie m wokół gwiazdy centralnej o masie M zachodzi zależność $M \gg m$. Ponadto odległość masywniejszego ciała M od środka masy dąży do zera ($R \rightarrow 0$), ponieważ środek masy układu, z bardzo dobrym przybliżeniem, znajduje się w obrębie ciała centralnego. Dlatego też, ruch ten upraszczamy do ruchu planety o masie m wokół gwiazdy centralnej o masie M .



Rys. 2. Rysunek przedstawia ruch ciała o masie m wokół znacznie większej masy M . Siła grawitacji \vec{F} pełni rolę siły dośrodkowej, a \vec{v} to prędkość liniowa ciała

Dzięki II zasadzie dynamiki Newtona wiemy, że wypadkowa siła działająca na poruszające się ciało jest równa iloczynowi jego przyspieszenia i masy. W ruchu po okręgu siłę tę nazywamy siłą dośrodkową. Jest ona zwrócona ku środkowi okręgu i utrzymuje ciało na orbicie kołowej. Wartość siły dośrodkowej: $F = \frac{mv^2}{r}$, gdzie v to prędkość liniowa, równa całkowitej długości orbity podzielonej przez okres obiegu T .

Z powyższych zależności dostajemy wartość siły dośrodkowej w postaci:

$$F = \frac{4\pi^2 rm}{T^2}.$$

Ponieważ siła dośrodkowa jest siłą przyciągania grawitacyjnego:

$$G \frac{mM}{r^2} = \frac{4\pi^2 rm}{T^2}.$$

Przekształcając wzór dostajemy zależność:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{const},$$

która jest niczym innym jak III prawem Keplera.

Oczywiście ruch planet wokół Słońca odbywa się po elipsie. Jednak ekscentryczność orbit planet jest bardzo mała, więc w przybliżeniu można przyjąć, że orbity te są kołowe. W takim wypadku za promień r obieramy wartość wielkiej półosi orbity a .

W ten uproszczony sposób udowodniliśmy dzięki prawom Newtona, ile wynosi stała w III prawie Keplera. To przełomowe uzasadnienie przez Newtona praw Keplera uzmysłowiło innym uczonym tamtych czasów, że teoria heliocentryczna Kopernika jest prawdziwa. Dopiero w XVII wieku stała się ona powszechna.

Słowniczek

Prawo powszechnego ciążenia

(ang.: *Newton's law of universal gravitation*) prawo Isaaca Newtona, które mówi o tym, że każde dwa ciała przyciągają się wzajemnie siłą, która jest wprost

proporcjonalna do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między ich środkami.

Siła dośrodkowa

(ang.: *centripetal force*) siła powodująca zakrzywienie toru ciała. W ruchu jednostajnym po okręgu siła ta ma stałą wartość i jest zawsze skierowana do środka okręgu.

Stała grawitacji

(ang.: *gravitational constant*) stała fizyczna, $G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$, służąca do opisu pola grawitacyjnego; po raz pierwszy jej wartość wyznaczył Henry Cavendish (około 70 lat po śmierci Newtona) za pomocą tzw. wagi skręceń.

Film samouczek

Jaki jest związek między III prawem Keplera a prawem powszechnego ciążenia?

Film prezentuje zastosowanie III prawa Keplera do obliczenia masy gwiazdy centralnej w układzie planetarnym TOI-1266. Po obejrzeniu filmu postaraj się przeprowadzić te obliczenia samodzielnie.

Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Zapoznaj się z audiodeskrypcją samouczka.

Polecenie 1

Oblicz masę Jowisza wiedząc, że promień orbity księżycy Io wynosi 421 700 km, a okres obiegu Io wokół Jowisza jest równy 1,77 dni. Stała grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$.

Porównaj otrzymany wynik z wartością podaną w Wikipedii.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Wylicz stałą w III prawie Keplera dla Układu Słonecznego w jednostce $[\frac{s^2}{m^3}]$. Podaj wynik w zaokrągleniu do trzech cyfr znaczących.

Dane:

masa Słońca: $M = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$,

stała grawitacji: $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kgs^2}$.

Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8



III prawo Keplera można stosować również do obliczania odległości w układach podwójnych. Są to układy, w których dwa ciała o masach m_A oraz m_B okrążają wspólny środek masy. W takim przypadku masa gwiazdy w III prawie Keplera jest zastępowana sumą mas składników takiego układu $M = m_A + m_B$. Wyznacz odległość r pomiędzy składowymi pewnego układu podwójnego, którego składnik A ma masę 0,7 mas Słońca, a składnik B ma masę 0,63 mas Słońca, a okres obiegu tego układu wynosi $T = 653$ dni.

Przyjmij, że: masa Słońca $M_S = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg, stała grawitacji $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2}$, jednostka astronomiczna $1 \text{ au} = 14,96 \cdot 10^7$ km, $\pi = 3,14$.

Podaj wynik w jednostkach astronomicznych z dokładnością do 3 miejsc znaczących.

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Monika Sitek
Przedmiot:	fizyka
Temat zajęć:	Czy istnieje związek między prawem powszechnego ciążenia a III prawem Keplera?
Grupa docelowa:	III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	<p>Cele kształcenia – wymagania ogólne</p> <p>II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych.</p> <p>Zakres rozszerzony</p> <p>Treści nauczania – wymagania szczegółowe</p> <p>I. Wymagania przekrojowe. Uczeń:</p> <p>16) przeprowadza obliczenia i zapisuje wynik zgodnie z zasadami zaokrąglania oraz zachowaniem liczby cyfr znaczących wynikającej z dokładności pomiaru lub z danych;</p> <p>19) wyodrębnia zjawisko z kontekstu, nazywa je oraz wskazuje czynniki istotne i nieistotne dla jego przebiegu.</p> <p>IV. Grawitacja i elementy astronomii. Uczeń:</p> <p>5) interpretuje III prawo Keplera jako konsekwencję prawa powszechnego ciążenia; stosuje do obliczeń III prawo Keplera dla orbit kołowych.</p>
Kształtowane kompetencje kluczowe:	<p>Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.</p> <ul style="list-style-type: none">• kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji,• kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii,• kompetencje cyfrowe,• kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	<p>Uczeń:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. przeanalizuje siły w układzie dwóch ciał; 2. stosuje w praktyce przybliżenia jakich można używać w obliczeniach w astronomii; 3. wyznacza stałą w III prawie Keplera przy pomocy praw Newtona; 4. zrozumie zależność pomiędzy prawem Keplera a prawem powszechnego ciążenia.
Strategie nauczania:	flipped-classroom
Metody nauczania:	burza mózgów, analiza pomysłów
Formy zajęć:	praca wspólna
Środki dydaktyczne:	tablica, urządzenia multimedialne dla uczniów w celu rozwiązania zadań
Materiały pomocnicze:	e-materiały o prawach Keplera i prawie powszechnego ciążenia
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
<p>Ten materiał należy wprowadzić razem z e-materiałem „trzecie prawo Keplera” oraz „Prawa Keplera w obliczeniach”. Przed wprowadzeniem tego materiału uczeń musi znać prawo powszechnego ciążenia, rozumieć skąd się bierze i stosować go w obliczeniach.</p> <p>Uczniowie samodzielnie w domu zapoznają się z tekstem e-materiału oraz multimedium.</p> <p>Nauczyciel na lekcji zadaje uczniom pytanie, które jest tematem lekcji. Metodą pytań i odpowiedzi związanych z tematem sprawdza, na ile uczniowie zapoznali się z e-materiałami w domu.</p> <p>Przykładowe pytania:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Czym jest prawo powszechnego ciążenia? • Co mówi III prawo Keplera? • Czy ciała w kosmosie się przyciągają tak jak na Ziemi? 	
Faza realizacyjna:	
<p>Na tablicy nauczyciel wypisuje prawo powszechnego ciążenia i obok III prawo Keplera. Następnie uczniowie zgłaszają się i fragment po fragmencie wypisują zależności niezbędne do wyznaczenia wzoru na stałą w III prawie Keplera. Nauczyciel stara się objaśniać każdy krok uczniom, którzy mieli problem ze zrozumieniem materiału w domu.</p>	

Faza podsumowująca:

Uczniowie samodzielnie lub w parach rozwiązują pierwsze pięć zadań z zestawu ćwiczeń tego e-materiału. W każdej chwili mogą skorzystać z pomocy nauczyciela. Następnie nauczyciel dzieli uczniów na dwójki i każdej z nich przyporządkowuje jakiś układ kilku ciał. Dla bardziej zainteresowanych uczniów mogą to być układy podwójne gwiazd np. 61 Cygni lub układy potrójne. Dla mniej zainteresowanych niewielkie układy planetarne. Każda para uczniów sprawdza na swoim układzie ile wynosi stała w III prawie Keplera.

Praca domowa:

Uczniowie powtarzają i utrwalają wiedzę przez rozwiązanie w domu zadań, których nie rozwiązali na lekcji.

Wskazówki metodyczne opisujące różne zastosowania danego multimedium

Uczniowie mogą obejrzeć film na lekcji w fazie wprowadzającej.