

Pole koła

Materiał składa się z sekcji: "Koło", "Pole koła", "Obliczanie pola koła".

Materiał zawiera ilustracje (fotografie, obrazy, rysunki), film, aplet oraz ćwiczenia, w tym ćwiczenia interaktywne.

Pole koła

Już w starożytności genialny twórca i myśliciel – Archimedes – zaznaczył swój wkład w rozwój matematyki. W traktacie „O mierzeniu okręgu” pokazał, że pole koła jest równe polu trójkąta równoramiennego, którego podstawą jest odcinek o długości równej obwodowi koła, a wysokością jest promień koła.

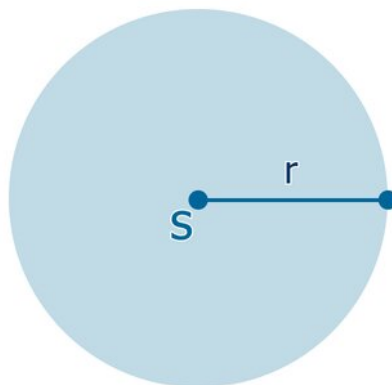
Problemem starożytnej matematyki greckiej była również kwadratura koła – czyli skonstruowanie kwadratu, którego pole jest równe polu danego koła.

Czy problem szkoły pitagorejskiej udało się rozwiązać, czy też okazało się to niemożliwe?

W tym materiale zajmiemy się zastosowaniem wzoru na pole koła, aby pogłębiać wiedzę i analizować starożytne problemy geometrii.

Koło

Koło



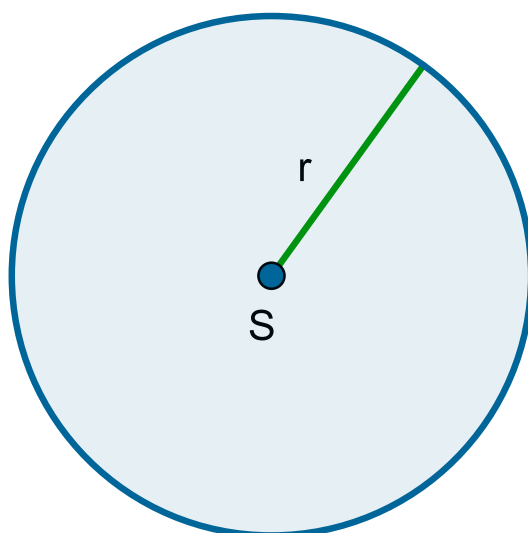
Film dostępny pod adresem </preview/resource/RBG3Q91VBXxVo>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Animacja przedstawia rysowanie koła o środku w punkcie S oraz promieniu R za pomocą cyrkla.

Definicja: Koło

Kołem o środku w punkcie S i promieniu r nazywamy zbiór tych punktów płaszczyzny, których odległość od punktu S jest mniejsza bądź równa r .



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$K(S, r)$ – koło o środku w punkcie S i promieniu r

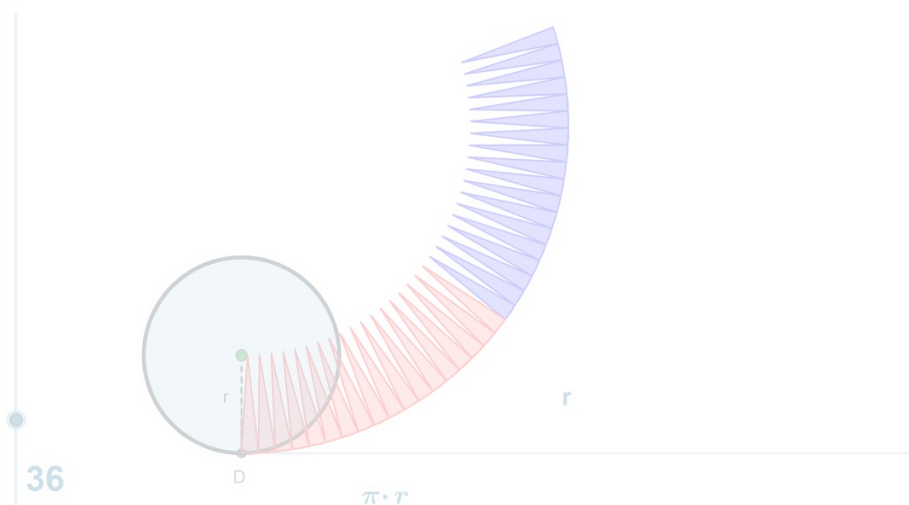
Pole koła

Pole koła

← etap 25 z 26 →

Teraz, przy dużej liczbie podziału koła na wycinki widać, że suma tych wycinków koła zbliża się do kształtu prostokąta. Jego wymiary to:
 długość równa połowie obwodu, czyli $\pi \cdot r$,
 wysokość to długość r promienia okręgu.

A diagram showing a horizontal line with a point labeled 'F' on it. The line is colored blue on the left and red on the right.



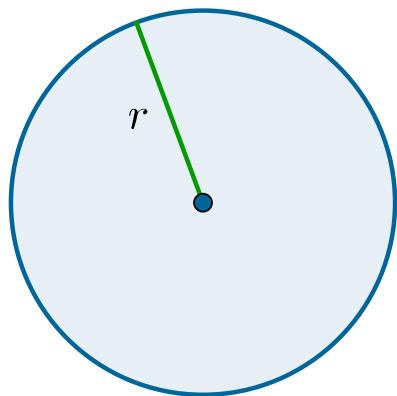
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/b/P1HZZRj7q>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ważne!

Pole koła o promieniu r jest równe iloczynowi liczby π i kwadratu promienia.

$$P = \pi r^2$$



$$P = \pi r^2$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczanie pola koła

Przykład 1

Oblicz pole koła o promieniu 4 dm.

Do wzoru na pole koła wstawiamy $r = 4$.

$$P = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

Pole koła jest równe 16π dm².

Przykład 2

Obwód małego znaku zakazu wynosi 60π cm. Oblicz, ile cm² blachy potrzeba na jego wykonanie.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Obliczymy najpierw promień koła, w kształcie którego jest znak – korzystamy ze wzoru na obwód koła.

$$L = 2\pi r$$

$$60\pi = 2\pi r \quad | : 2\pi$$

$$r = 30$$

Korzystamy ze wzoru na pole koła.

$$P = \pi r^2$$

$$P = \pi \cdot 30^2$$

$$P = 900\pi$$

Przyjmijmy $\pi \approx 3,14$, wtedy

$$P \approx 900 \cdot 3,14 = 2826.$$

Na wykonanie małego znaku zakazu potrzeba około 2826 cm^2 blachy.

Przykład 3

Pole powierzchni jednego okrągłego konfetti jest równe $4\pi \text{ mm}^2$. Ile takich konfetti można wyciąć z kwadratowej kartki papieru o boku długości $1,2 \text{ cm}$? Obliczamy najpierw średnicę d koła, w kształcie którego jest konfetti.

$$4\pi = \pi r^2$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2,$$

bo $r > 0$. Mamy

$$d = 2r$$

$$d = 4.$$

Ponieważ $1,2 \text{ cm} = 12 \text{ mm}$, zatem w kwadracie o boku 12 mm zmieści się 9 kół o średnicy 4 mm każde.

Z kwadratowej kartki można wyciąć 9 konfetti.

Przykład 4

Hania, Lena i Zosia wybrały się do pizzerii. Hania zamówiła małą pizzę z pomidorami o średnicy 15 cm, a Lena i Zosia wspólną dużą pizzę z szynką o średnicy 30 cm. Ile razy pizza Leny i Zosi jest większa od pizzy Hani?

Rozwiązanie:

Pizza Hani ma średnicę $d_1 = 15$ cm, czyli

$$d_1 = 2r_1$$

$$2r_1 = 15$$

$$r_1 = 7,5.$$

Zatem pole pizzy Hani wynosi:

$$P_1 = \pi r_1^2$$

$$P_1 = \pi(7,5)^2 = 56,25\pi.$$

Analogicznie obliczymy pole drugiej pizzy.

$$d_2 = 2r_2$$

$$2r_2 = 30$$

$$r_2 = 15,$$

zatem

$$P_2 = \pi r_2^2$$

$$P_2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi.$$

Aby obliczyć, ile razy pizza Leny i Zosi jest większa od pizzy Hani wykonamy działanie:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{225\pi}{56,25\pi} = 4.$$

Pizza Leny i Zosi jest 4 razy większa od pizzy Hani.

Ćwiczenie 1

Tymon i Kuba zamówili w pizzerii okrągłą pizzę o średnicy 32 cm, która została podzielona na osiem takich samych kawałków. Tymon zjadł pięć kawałków pizzy, a Kuba trzy kawałki. O ile cm^2 większa była porcja, którą zjadł Tymon od porcji Kubę?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 5

Pani Kwiatkowska wygospodarowała w swoim ogrodzie dwie rabaty: pierwszą w kształcie prostokąta o bokach długości 3 m i 2 m oraz drugą, w kształcie koła o promieniu 1 m. W której rabacie pani Kwiatkowska może posadzić więcej bratków?

Rozwiązanie:

Obliczymy pole prostokątnej rabaty.

$$P_{\square} = a \cdot b$$

$$P_{\square} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Pole prostokątnej rabaty wynosi zatem 6 m^2 .

Obliczymy pole okrągłej rabaty.

$$P_{\circ} = \pi r^2$$

$$P_{\circ} = \pi \cdot 1^2 \approx 3,14 \cdot 1 = 3,14.$$

Pole okrągłej rabaty wynosi zatem $3,14 \text{ m}^2$.

Pani Kwiatkowska posadzi więcej bratków w rabacie w kształcie prostokąta.

Ćwiczenie 2

Na działce w kształcie kwadratu o boku 25 m Pani Bratkowska wygospodarowała rabatę o kształcie koła o promieniu 2 m. Jakim procentem działki jest rabata?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 6

Adam i Karol chcą zamówić pizzę na kolację. Adam twierdzi, że bardziej opłaca się zamówić największą pizzę o średnicy 60 cm za 70 złotych. Karol twierdzi, że bardziej opłaca się kupić dwie pizze, z których każda ma średnicę 40 cm i kosztuje 35 złotych. Który z nich ma rację?

Rozwiązanie

Aby sprawdzić, która opcja bardziej się opłaca, obliczymy pola, jakie mają pizze. Zauważmy, że w obu przypadkach rachunek wyniesie tyle samo, więc wystarczy porównać pola pizz.

Pierwsza pizza ma średnicę $d_1 = 60$, przy czym

$$d_1 = 2r_1.$$

Przekształcamy równość, podstawiamy liczby i otrzymujemy promień pizzy.

$$r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Teraz obliczymy pole pizzy.

$$P_1 = \pi(r_1)^2 = 900\pi$$

Pizze w drugiej opcji mają średnicę $d_2 = 40$, przy czym

$$d_2 = 2r_2.$$

Przekształcamy równość, podstawiamy liczby i otrzymujemy promień pizzy.

$$r_2 = \frac{d_2}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Teraz obliczymy pole jednej pizzy.

$$P_2 = \pi(r_2)^2 = 400\pi$$

Nie zapominamy o tym, że w drugim przypadku zamówione zostałyby dwie pizze.

$$P_c = 2P_2 = 2 \cdot 400\pi = 800\pi$$

$P_1 > P_c$, zatem to Adam ma rację.

Przykład 7

Obliczymy, czy większy promień ma kolorowa nalepka w kształcie koła o polu $16\pi \text{ cm}^2$, czy czarno-biała nalepka w kształcie koła o obwodzie $10\pi \text{ cm}$?

Rozwiązanie

Najpierw obliczymy promień kolorowej nalepki o danym polu.

$$P_1 = \pi r_1^2$$

$$\pi r_1^2 = 16\pi$$

$$r_1^2 = 16$$

$$r_1 = 4,$$

bo $r_1 > 0$.

Analogicznie obliczymy promień czarno-białej nalepki o danym obwodzie.

$$L_2 = 2\pi r_2$$

$$2\pi r_2 = 10\pi$$

$$r_2 = 5,$$

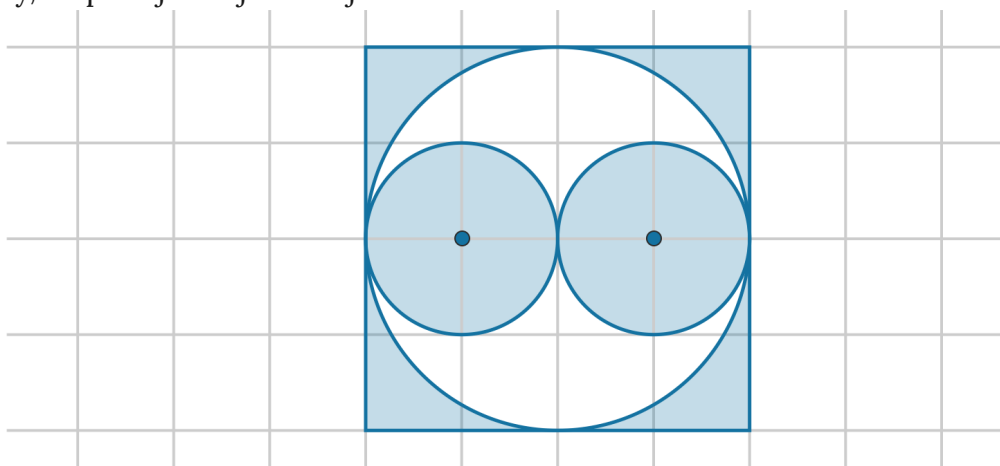
bo $r_2 > 0$.

Ponieważ $5 > 4$, zatem druga nalepka ma większy promień.

Przykład 8

Obliczmy pole zaznaczonej części figury.

Przyjmiemy, że pole jednej kratki jest równe 1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozwiązanie:

Najpierw obliczmy pole mniejszego okręgu o promieniu 1.

$$P_1 = \pi r_1^2,$$

$$P_1 = \pi \cdot 1^2 = 1\pi.$$

Pole okręgu o promieniu $r_2 = 2$ jest równe:

$$P_2 = \pi r_2^2,$$

$$P_2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi.$$

Pole kwadratu o boku 4 jest równe:

$$P_K = 4^2 = 16.$$

Pole zamalowanej części (P_Z) obliczymy ze wzoru:

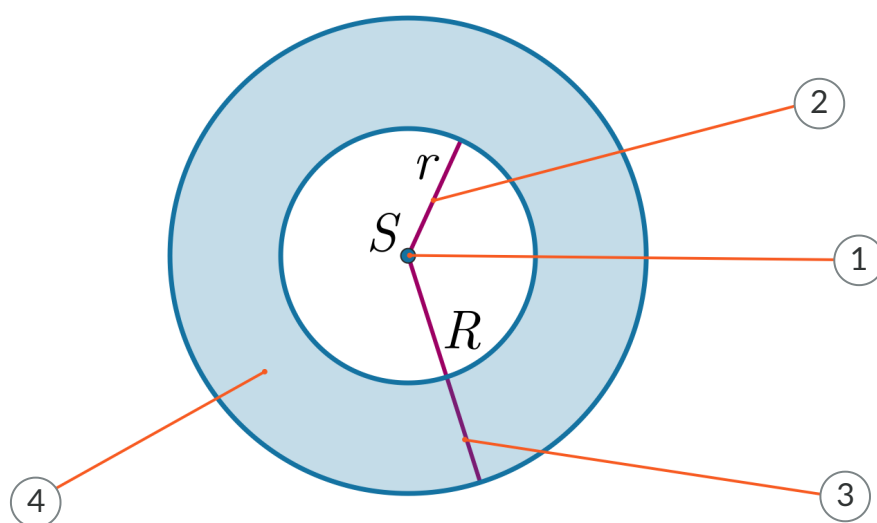
$$P_Z = P_K - P_2 + 2P_1,$$

$$P_Z = 16 - 4\pi + 2\pi = 16 - 2\pi.$$

Pole zamalowanej części jest równe $16 - 2\pi$.

Ważne!

Pierścieniem kołowym nazywamy część płaszczyzny, która jest ograniczona przez dwa współśrodkowe okręgi.



1

punkt S - środek okręgów

2

r - promień wewnętrznego okręgu

3

R - promień zewnętrznego okręgu

4

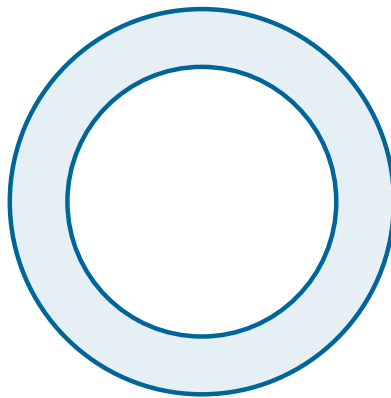
pierścień kołowy

Pole pierścienia kołowego obliczamy ze wzoru:

$$P = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

Ćwiczenie 3

Promień mniejszego z kół na rysunku jest równy 11, a większego 17.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ile jest równe pole pierścienia kołowego wyznaczonego przez te koła? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 168π

☐ 121π

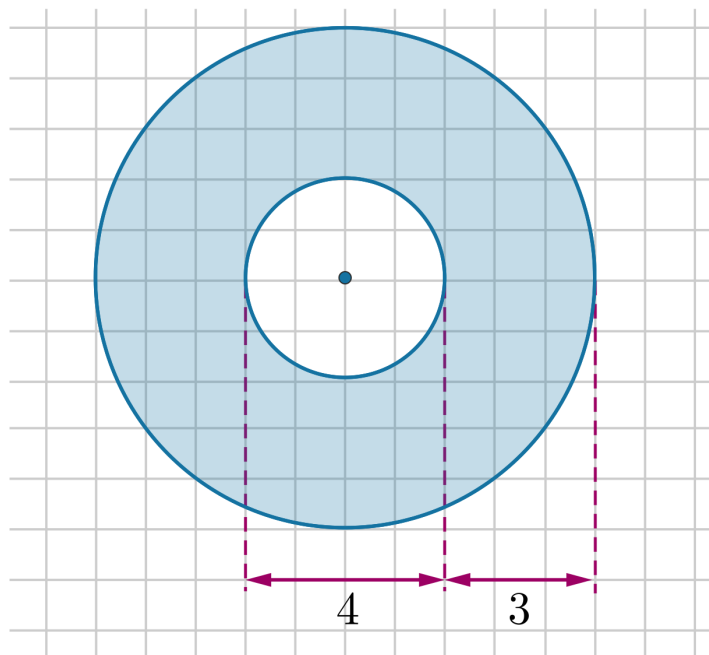
☐ 410π

☐ 289

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Przykład 9

Obliczymy pole zaznaczonego pierścienia.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Rozwiązanie:

Z rysunku odczytujemy, że promień r mniejszego koła jest równy 2.
Promień R drugiego koła jest równy:

$$R = 2 + 3 = 5.$$

Pole pierścienia kołowego obliczymy ze wzoru:

$$P = \pi(R^2 - r^2),$$

$$P = \pi(5^2 - 2^2) = \pi(25 - 4) = 21\pi.$$

Pole pierścienia jest równe 21π .

Przykład 10

Wokół klombu w kształcie koła o średnicy 10 m ogrodnik wykonał brukowany chodnik o szerokości 1,5 m. Obliczymy, jaką powierzchnię ma chodnik.

Rozwiązanie:

Powierzchnię chodnika obliczymy korzystając ze wzoru na pole pierścienia kołowego.

$$P = \pi(R^2 - r^2)$$

Promień klombu wynosi $r = 5$ m.
 Promień okręgu utworzonego przez klomb wraz z chodnikiem wynosi
 $R = 5 + 1,5 = 6,5$ m.
 Zatem

$$P = \pi(6,5^2 - 5^2) = \pi(42,25 - 25) = 17,25\pi,$$

$$17,25 \cdot 3,14 \approx 54.$$

Chodnik ma powierzchnię około 54 m².
Ćwiczenie 4

Uzupełnij tabelkę.

Średnica koła	Pole koła	Obwód koła
8		
	π	

- 24
- 2π
- 2
- 16π
- 144π
- 24π
- 8π

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 5

Połącz w pary długość średnicy i pole koła.

$$d = 2$$

$$P = \frac{1}{4}\pi$$

$$d = \pi$$

$$P = 4\pi^3$$

$$d = 4$$

$$P = \pi$$

$$d = 4\pi$$

$$P = 4\pi$$

$$d = 2\pi$$

$$P = \pi^3$$

$$d = 1$$

$$P = \frac{1}{4}\pi^3$$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 6

Ile jest równe pole koła o obwodzie $2,6\pi$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $3,38\pi$

☐ $1,69\pi$

☐ $6,76\pi$

☐ $1,3\pi$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 7

Ile jest równy obwód koła o polu $\frac{49}{81}\pi$? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ $1\frac{17}{81}\pi$

☐ $1\frac{5}{9}\pi$

☐ $\frac{7}{9}\pi^2$

☐ $\frac{7}{9}\pi$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 8

Średnica pokrywki od garnka jest równa 30 cm. Ile blachy użyto na jej wykonanie? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ około 706,5 cm²

☐ około 225 cm²

☐ około 2826 cm²

☐ około 900 cm²

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 9

Jak zmieni się pole koła, gdy odpowiednio zmodyfikujemy jego średnicę? Połącz w pary pasujące do siebie części zdań.

Zwiększając średnicę o 40%,

pole koła zwiększymy czterokrotnie.

Zwiększając dwukrotnie średnicę,

pole koła zwiększymy 1,96 razy.

Zmniejszając sześciokrotnie średnicę,

pole koła zmniejszymy 1,5625 razy.

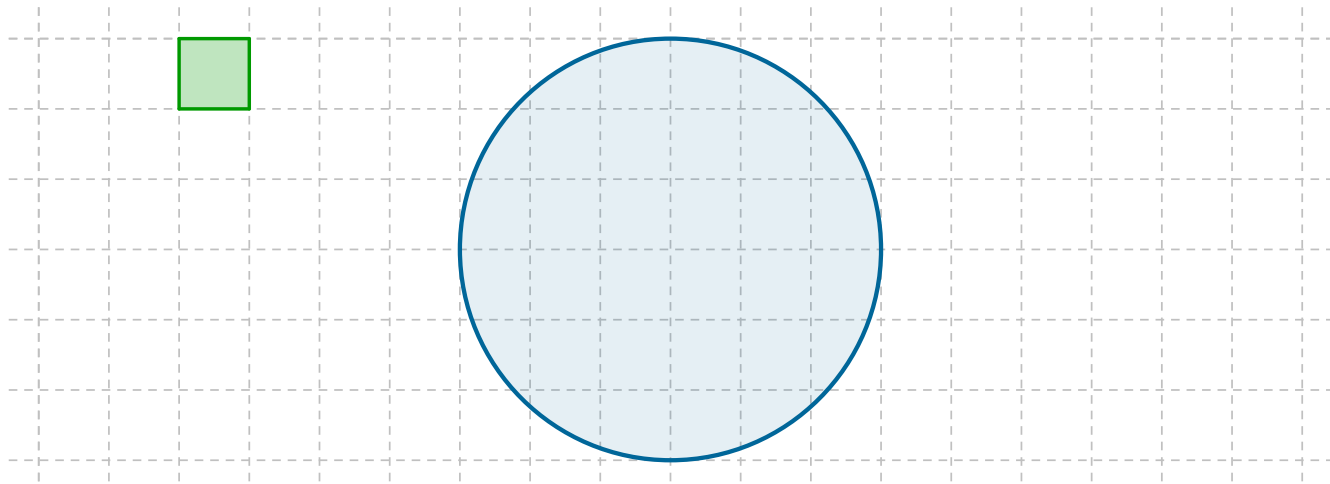
Zmniejszając średnicę o 20%,

pole koła zmniejszymy 36-krotnie.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 10

Przyjmij, że pole zielonego kwadratu jest równe 1.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zaznacz zdania prawdziwe.

☐ Obwód koła jest mniejszy od 18.

☐ Pole koła jest mniejsze od 29.

☐ Obwód koła jest większy od 18.

☐ Pole koła jest większe od 29.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 11

Pole powierzchni okrągłego klombu jest równe 1 a. Ile jest równa przybliżona długość promienia koła, w kształcie którego jest klomb? Zaznacz prawidłową odpowiedź.

☐ 3 m

☐ 10 m

☐ 6 m

☐ 32 m

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 12

Oblicz obwód kwadratu, którego pole jest równe polu koła o średnicy 18. Następnie przeciągnij i upuść rozwiązanie.

Odpowiedź: Obwód kwadratu wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 13

Oblicz stosunek obwodu koła o polu 16π do obwodu koła o polu 169π . Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz prawidłową odpowiedź.

Odpowiedź: Stosunek obwodu kół wynosi .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 14

Promień koła o polu 30 cm^2 jest równy r . Promień koła o obwodzie 30 cm jest równy R . Wskaż nierówność prawdziwą.

☐ $R < r$

☐ $\frac{r}{R} > 2$

☐ $R > r$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 15

Koło i kwadrat mają równe pola. Oblicz stosunek obwodu koła do obwodu kwadratu. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz prawidłową odpowiedź.

Odpowiedź: Stosunek obwodu koła do obwodu kwadratu wynosi .

☐ $\pi\sqrt{5}$ ☐ $3, 7\pi$ ☐ $\pi \frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{\pi}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 16

Zaznacz wszystkie zdania, które są prawdziwe.

☐ Jeśli dwa koła są współśrodkowe, to mają równe pola.

☐ Liczba wyrażająca pole koła może być równa liczbie wyrażającej obwód tego koła.

☐ Jeśli dwa koła mają równe pola, to są przystające.

☐ Pole koła wyraża się zawsze liczbą niewymierną.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 17

Dokończ zdania. Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę, i wybierz prawidłowe liczby.

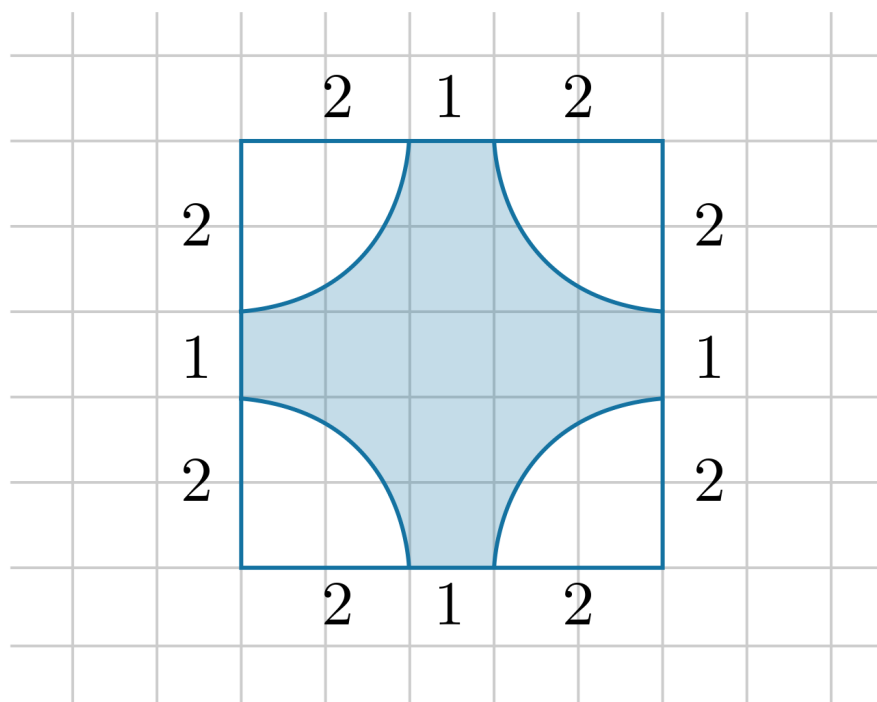
1. Pole koła jest równe 16π . Średnica tego koła wynosi .

2. Obwód koła jest równy π . Pole tego koła jest równe .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Ćwiczenie 18

Oblicz pole zacieniowanej figury przedstawionej na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Kliknij w lukę, aby rozwinąć listę i wybierz odpowiednie liczby.

Pole figury = - π .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.