




Wykres i własności funkcji sinus

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Symulacja interaktywna](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Wykres i własności funkcji sinus

Źródło: Kelly Lacy, dostępny w internecie: www.pexels.com.

Poznałeś już podstawowe własności funkcji $y = \sin x$ związane z obliczaniem wartości: wzory redukcyjne. Na tej lekcji wykorzystamy je do konstrukcji wykresu funkcji $y = \sin x$ oraz opisu jej pozostałych własności.

Twoje cele

- Nauczysz się rysować wykres funkcji $y = \sin x$ oraz opisywać jej własności.
- Dowiesz się, jak wykorzystać wykres funkcji $y = \sin x$ do rozwiązywania zadań.

Przeczytaj

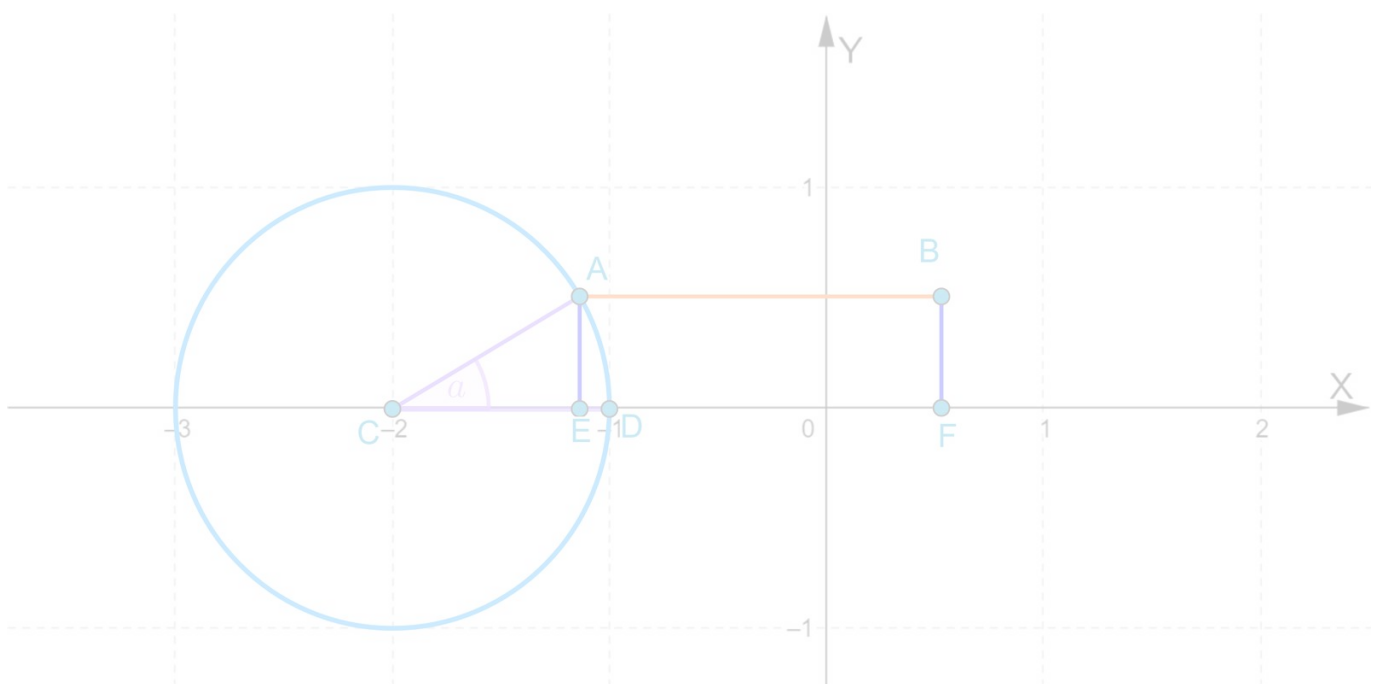
Rozpoczniemy lekcję od wykreślenia wykresu funkcji $y = \sin x$.

- Konstrukcja wykresu funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Zaznaczmy w układzie współrzędnych okrąg o promieniu 1. Niech będzie to okrąg o równaniu $(x + 2)^2 + y^2 = 1$. Jego środkiem jest punkt $C(-2, 0)$. Niech punkt D ma współrzędne $(-1, 0)$. Jeżeli przez leżący na danym okręgu punkt A poprowadzimy prostą prostopadłą do osi X , to przetnie ona tę oś w punkcie E . Niech a oznacza miarę kąta DCA mierzoną w radianach.

Punkt B ma współrzędne $(a, \sin a)$. Prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do osi X przecina tę oś w punkcie $F(a, 0)$.

Otwórzmy aplet, aby obserwować całą konstrukcję.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1EMvkgyc>

Zauważamy, że druga współrzędna punktu A to $\sin a$. Zatem odcinki AE i BF mają tę samą długość równą $\sin a$. Punkt B ma współrzędne $(a, \sin a)$. Wobec tego punkt B

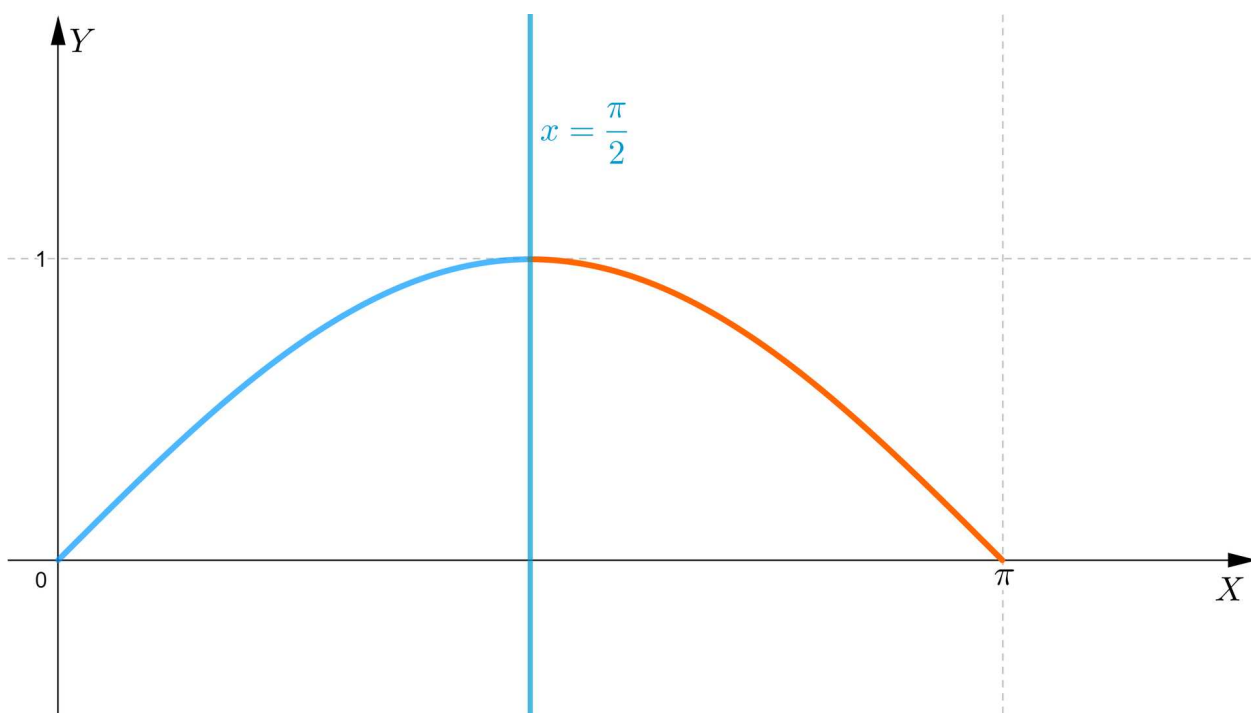
leży na wykresie funkcji $y = \sin a$. Poruszający się punkt B wyznacza wykres funkcji $y = \sin a$.

Zastosowaliśmy miarę kąta z przedziału $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Zatem w tym przedziale otrzymaliśmy wykres funkcji $y = \sin a$.

- Konstrukcja wykresu funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$.

Teraz skonstruujemy wykres $y = \sin a$ dla $a \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$. W tym celu wykorzystamy wzór redukcyjny: $\sin(\pi - a) = \sin a$ dla dowolnej liczby rzeczywistej a .

Wzór redukcyjny $\sin(\pi - a) = \sin a$ opisuje własność: [osią symetrii wykresu](#) funkcji $y = \sin a$ jest prosta o równaniu $x = \frac{\pi}{2}$. Dlaczego tak się dzieje?



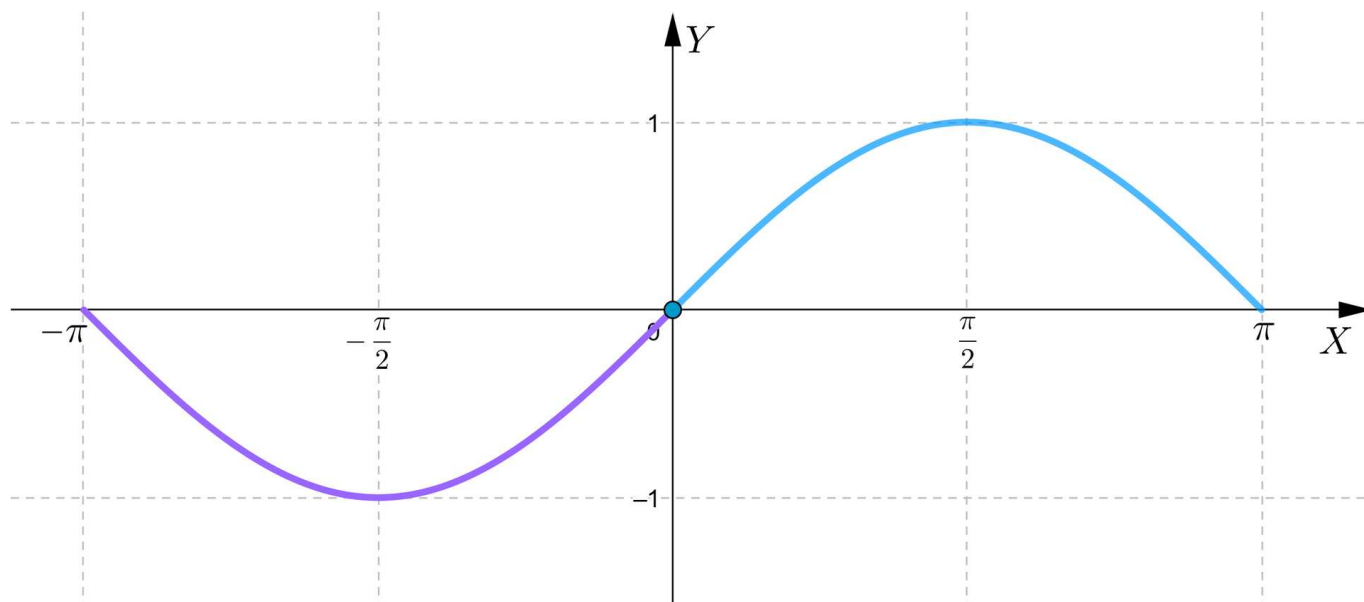
Ważne!

Jeżeli dane dwa punkty $P(x_1, y_1)$ i $Q(x_2, y_2)$ są symetryczne względem prostej k o równaniu $x = b$, to ich drugie współrzędne y_1 i y_2 są równe. Środek odcinka PQ znajduje się na prostej k . Zatem $\frac{x_1+x_2}{2} = b$, czyli $x_2 = 2b - x_1$.

Otrzymaliśmy wykres funkcji $y = \sin a$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

- Konstrukcja wykresu funkcji $y = \sin a$ w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.

Skorzystamy z kolejnego wzoru charakterystycznego dla funkcji sinus: dla każdej liczby rzeczywistej a zachodzi równość: $\sin(-a) = -\sin a$. Własność ta oznacza, że wykres funkcji $y = \sin x$ jest symetryczny względem początku układu współrzędnych. Oznacza to także, że funkcja sinus jest funkcją nieparzystą.



Zatem otrzymaliśmy wykres $y = \sin a$ w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.

- Konstrukcja wykresu funkcji $y = \sin a$ w zbiorze liczb rzeczywistych.

Aby skonstruować wykres funkcji $y = \sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$, skorzystamy z kolejnej własności funkcji sinus: $\sin(a + 2\pi) = \sin a$, dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$. Własność ta oznacza, że wykres funkcji sinus przesunięty o (-2π) jest tym samym wykresem. Zatem funkcja sinus jest funkcją okresową o okresie $T = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ i $k \neq 0$.

Przykład 1

Opiszmy własności funkcji $y = \sin x$, gdy $x \in \mathbb{R}$.

1. Funkcja sinus jest funkcją okresową o okresie zasadniczym $T = 2\pi$.
2. Funkcja sinus jest funkcją nieparzystą.
3. Zbiorem wartości jest przedział $\langle -1, 1 \rangle$.

4. Wartość największą równą 1 funkcja osiąga dla argumentów: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
5. Wartość najmniejszą równą -1 funkcja osiąga dla argumentów: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
6. Miejscami zerowymi są argumenty: $x = k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
7. Funkcja jest rosnąca w przedziałach: $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
8. Funkcja jest malejąca w przedziałach: $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Opiszmy własności geometryczne wykresu funkcji $y = \sin x$, gdy $x \in \mathbb{R}$.

1. Osia symetrii wykresu jest każda prosta o równaniu $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
2. Środkiem symetrii wykresu jest każdy punkt o współrzędnych $(k\pi, 0)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 3

Podamy okres zasadniczy każdej z poniższych funkcji.

1. Funkcja $y = 2 \sin x$ ma okres zasadniczy $T = 2\pi$, gdyż $2 \sin(x + 2\pi) = 2 \sin x$.
2. Funkcja $y = \sin(2x)$ ma okres zasadniczy $T = \pi$, gdyż $\sin 2(\pi + x) = \sin(2\pi + 2x) = \sin(2x)$.
3. Funkcja $y = |\sin x|$ ma okres zasadniczy $T = \pi$, gdyż $|\sin(\pi + x)| = |-\sin x| = |\sin x|$.

Przykład 4

Która wartość jest większa: $\sin \frac{\pi}{7}$ czy $\sin \frac{4\pi}{27}$?

Zauważmy, że $\frac{\pi}{7} \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ i $\frac{4\pi}{27} \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Zauważmy także, że $\frac{\pi}{7} < \frac{4\pi}{27}$. Ponieważ funkcja sinus w tym przedziale jest rosnąca, zachodzi zatem nierówność: $\sin \frac{\pi}{7} < \sin \frac{\pi}{7} < \sin \frac{4\pi}{27}$.

Słownik

oś symetrii wykresu

prosta k jest osią symetrii wykresu funkcji f wtedy, gdy obrazem wykresu funkcji f w symetrii osiowej względem prostej k jest ten sam wykres

radian

jednostka miary łukowej kąta środkowego α wyrażająca stosunek długości łuku, na którym oparty jest ten kąt, do długości promienia okręgu, dla którego kąt α jest kątem środkowym; związek pomiędzy miarą stopniową a łukową wyraża się wzorem

$$\alpha[^\circ] = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} = [\text{radian}]$$

środek symetrii wykresu

punkt A jest środkiem symetrii wykresu funkcji f wtedy, gdy obrazem wykresu funkcji f w symetrii środkowej względem punktu A jest ten sam wykres

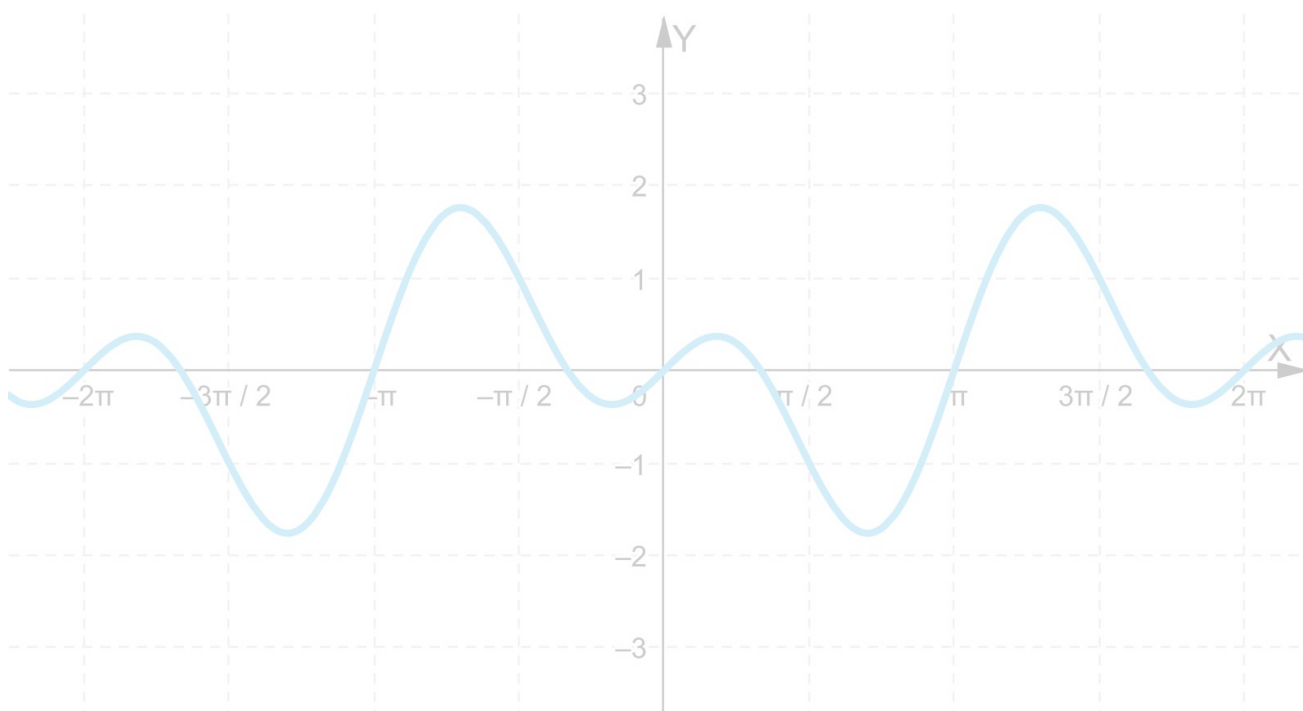
Symulacja interaktywna

Polecenie 1

Funkcja $y = \sin ax$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą różną od 0, jest funkcją okresową, gdyż $\sin\left(a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right) = \sin(ax + 2\pi) = \sin(ax)$ i okresem tej funkcji jest $T = \frac{2\pi}{a}$.

A czy funkcja $y = \sin ax + \sin bx$, gdzie $a, b \neq 0$ jest funkcją okresową?

Zapoznaj się z poniższą symulacją interaktywną i spróbuj postawić hipotezę dla liczb $a, b \in \mathbb{Z}$.



Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/Dre92FQ6q>

Polecenie 2

Uzasadnij, że funkcja $y = \sin x + \sin 2x$ jest funkcją okresową.

Polecenie 3

Uzasadnij, że $y = \sin 6x + \sin 4x$ jest okresowa.

Polecenie 4

Uzasadnij, że $y = \sin(ax) + \sin(bx)$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}_+$ jest funkcją okresową.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Uzasadnij, że osią symetrii wykresu $y = 4 \sin(1 - 3x) + 1$ jest prosta o równaniu $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}$.

Ćwiczenie 8



Uzasadnij, że środkiem symetrii wykresu $y = \sin(2x - 1)$ jest punkt $(\frac{2\pi+1}{2}, 0)$.

Dla nauczyciela

Autor: Jacek Dymel

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wykres i własności funkcji sinus

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:

Zakres rozszerzony 2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rysuje wykres funkcji $y = \sin x$ oraz opisywać jej własności,
- wykorzystuje wykres funkcji $y = \sin x$ do rozwiązywania zadań,
- analizuje wykres funkcji $y = \sin(kx)$ w zależności od parametru k .

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;
- rybi szkielet;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Wykres i własności funkcji sinus”.
2. Nauczyciel prosi o przygotowanie w parach pytań związanych z tematem. Czego się uczniowie chcą dowiedzieć? Co ich interesuje w związku z tematem lekcji?

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel czyta polecenie nr 1 w sekcji „Symulacja interaktywna” - „Funkcja $y = \sin ax$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą różną od 0, jest funkcją okresową, gdyż $\sin\left(a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)\right) = \sin(ax + 2\pi) = \sin(ax)$ i okresem tej funkcji jest $T = \frac{2\pi}{a}$. A czy funkcja $y = \sin ax + \sin bx$, gdzie $a, b \neq 0$? Obejrzyj poniższą symulację interaktywną i spróbuj postawić hipotezę dla liczb $a, b \in \mathbb{Z}$ ” - prosi uczniów, aby zapoznali się z materiałem. Uczniowie zapisują ewentualne wątpliwości i niezrozumiałe aspekty, które zostały w nim przedstawione - nauczyciel tłumaczy je na forum klasy.
2. Wybrani uczniowie wykonują ćwiczenia nr 1-2 na forum klasy. Nauczyciel sprawdza poprawność ich wykonania, omawiając je wraz z uczniami na bieżąco.
3. W dalszej części uczniowie wykonują w grupach ćwiczenia 3-5. Po zakończeniu każdego ćwiczenia wybrana grupa prezentuje swoje rozwiązanie na forum klasy.
4. Uczniowie wykonują ćwiczenia interaktywne 6-8 z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy komentowane są przez nauczyciela po ich zakończeniu.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

Praca domowa:

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.
- [Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych](#)

Wskazówki metodyczne:

- Medium w sekcji „Symulacja interaktywna” można wykorzystać na lekcji jako podsumowanie i utrwalenie wiedzy w temacie „Wykres i własności funkcji sinus”.