Wariacje bez powtórzeń - zadania ze złożonymi warunkami

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela

Wariacje bez powtórzeń - zadania ze złożonymi warunkami

Źródło: Ellen Qin, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji pokażemy zastosowania twierdzenia o liczbie wariacji bez powtórzeń.

W prezentowanych przykładach, modelowanych za pomocą wariacji bez powtórzeń, pokażemy, jak obliczyć wszystkie wyniki doświadczeń poddanych szczególnym ograniczeniom. Ograniczenia te będą m.in. opisane warunkiem 'co najmniej' albo 'co najwyżej'.

W rozwiązaniach omawianych przykładów istotne zastosowanie mają również reguły: dodawania, mnożenia i równoliczności.

Twoje cele

- Będziesz doskonalić umiejętność posługiwania się twierdzeniem o liczbie wariacji bez powtórzeń.
- Nauczysz się, jak analizować modele odwołujące się do pojęcia wariacji bez powtórzeń w zadaniach dotyczących m.in. zapisu dziesiętnego liczb naturalnych o różnych cyfrach, a także funkcji różnowartościowych, których dziedziną i zbiorem wartości są zbiory skończone.
- Utrwalisz umiejętność obliczania wszystkich możliwych wyników doświadczeń losowych, które opisywane są warunkiem 'co najmniej' albo 'co najwyżej'.

- Stosując regułę dodawania nauczysz się zapisywać liczbę wszystkich możliwych wyników danego doświadczenia na dwa sposoby, dzięki czemu obliczysz, ile jest wyników spełniających zadane warunki.
- Poznasz metody dowodzenia tożsamości algebraicznych zapisanych z użyciem symboliki odwołującej się do liczby V_n^k wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego.

Przeczytaj

W poniższych przykładach pokażemy wykorzystanie własności wariacji bez powtórzeń.

W rozwiązaniach tych przykładów będziemy stosować twierdzenie o liczbie wariacji bez powtórzeń.

Jeżeli proponowana metoda rozwiązania będzie polegała na analizie rozłącznych przypadków, to przy obliczaniu liczby wszystkich możliwości z zasady będziemy odwoływać się do reguły dodawania.

Natomiast jeżeli obliczanie liczby wszystkich możliwości będziemy rozkładali na kolejne etapy, to zazwyczaj odwołamy się przy tym do reguły mnożenia.

W rozwiązaniu pierwszego przykładu pokażemy też, że jeden ze sposobów uzyskania wyniku opiera się na zastosowaniu reguły równoliczności.

Przykład 1

Obliczymy, ile jest pięciocyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach, które są podzielne przez 5.

Rozwiązanie

Przypomnijmy, że liczba naturalna jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy jej ostatnią cyfrą jest 0 lub 5.

Rozpatrzmy więc dwa rozłączne przypadki:

- (1) gdy ostatnią cyfrą szukanej liczby pięciocyfrowej jest 0; wtedy rozmieszczeń bez powtórzeń 4 cyfr z pozostałych dziewięciu na czterech pierwszych miejscach jest $V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$,
- (2) gdy ostatnią cyfrą szukanej liczby pięciocyfrowej jest 5; wtedy - ponieważ na pierwszym miejscu nie możemy zapisać cyfry 0 - cyfrę na pierwszym miejscu z pozostałych do wypełnienia czterech możemy wybrać na 8 sposobów, a cyfry na pozostałych 3 miejscach możemy rozmieścić bez powtórzeń na V_8^3 sposobów. Zatem na podstawie reguły mnożenia stwierdzamy, że wszystkich możliwości jest w tym przypadku $8 \cdot V_8^3 = 8 \cdot \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$.

Korzystamy z reguły dodawania, skąd dostajemy ostatecznie, że wszystkich pięciocyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach, które są podzielne przez 5 jest $3024 + 2688 = 5712$.

Uwaga!

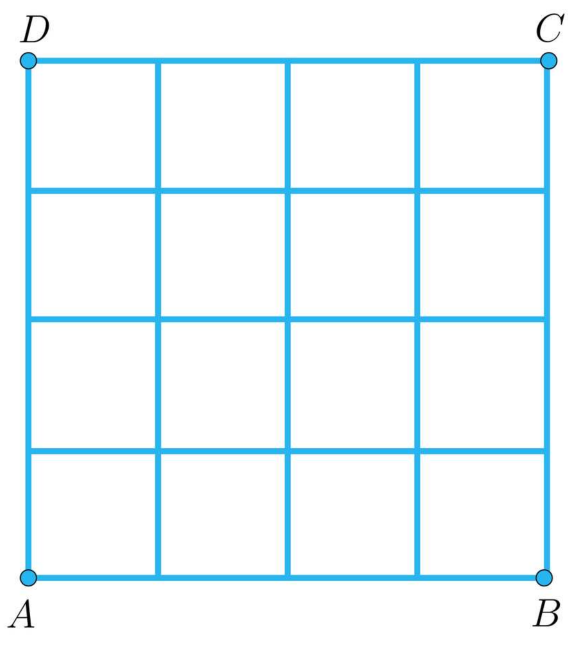
Liczbę wszystkich możliwości w przypadku (2) można również obliczyć, korzystając z:

- reguły równoliczności; zauważmy mianowicie, że po wstawieniu na ostatnim miejscu cyfry 5 pozostałe 4 cyfry można wybrać na V_9^4 sposobów. Ponadto cyfra 0 to jedyna z dostępnych dziewięciu, której nie możemy wstawić na pierwszym miejscu. Zatem na pierwszym miejscu można wpisać osiem z dziewięciu dostępnych cyfr, więc wszystkich liczb pięciocyfrowych, które w tym przypadku spełniają warunki zadania jest $\frac{8}{9} \cdot V_9^4 = \frac{8}{9} \cdot \frac{9!}{5!} = \frac{8}{9} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$,

- reguły dodawania; zauważmy mianowicie, że po wstawieniu na ostatnim miejscu cyfry 5 pozostałe 4 cyfry można wybrać na V_9^4 sposobów. Ponieważ cyfra 0 nie może wystąpić na pierwszym miejscu, więc wszystkie przypadki z cyfrą 0 zapisaną na pierwszym miejscu należy odrzucić. Jest ich tyle, ile wyborów 3 cyfr spośród 8 na trzech środkowych miejscach, czyli V_8^3. Oznacza to, że wszystkich liczb pięciocyfrowych, które w tym przypadku spełniają warunki zadania jest $V_9^4 - V_8^3 = \frac{9!}{5!} - \frac{8!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 8 \cdot 7 \cdot 6 = (9-1) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 =$
$= 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$.

Przykład 2

Kwadrat $ABCD$ o boku 4 podzielono na 16 kwadracików o boku 1 - te kwadraciki będziemy nazywać polami.



Następnie w każde spośród szesnastu pól kwadratu $ABCD$ wpisujemy jedną liczbę wybraną ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \ldots, 19\}$, przy czym wybrana liczba może być wpisana co najwyżej raz. Wymagamy ponadto, żeby pola, które przecina przekątna AC były wypełnione wyłącznie liczbami parzystymi, a pola, które przecina przekątna BD były wypełnione wyłącznie liczbami nieparzystymi.

Wykażemy, że wszystkich sposobów wypełnienia pól kwadratu według powyższych warunków jest więcej niż 10^{14}.

Dowód

Obliczenia przeprowadzimy w trzech etapach.

W pierwszym etapie rozmieścimy różne liczby parzyste na czterech polach, które przecina przekątna AC.

Ponieważ dostępnych jest 9 liczb parzystych, więc wszystkich możliwości w tym etapie jest $V_9^4 = \frac{9!}{5!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

W drugim etapie rozmieścimy różne liczby nieparzyste na czterech polach, które przecina przekątna BD.

Ponieważ dostępnych jest 10 liczb nieparzystych, więc wszystkich możliwości w tym etapie jest $V_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

W trzecim etapie rozmieścimy różne liczby spośród pozostałych 11 na 8 polach, które jeszcze nie zostałe wypełnione - wszystkich możliwości w tym etapie jest $V_{11}^8 = \frac{11!}{3!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6652800$.

Korzystając z reguły mnożenia otrzymujemy ostatecznie, że wszystkich sposobów wypełnienia pól kwadratu według powyższych warunków jest

$$V_9^4 \cdot V_{10}^4 \cdot V_{11}^8 = 3024 \cdot 5040 \cdot 6652800 = 101395058688000 =$$

$$= 1,01395058688 \cdot 10^{14} > 10^{14}.$$

To spostrzeżenie kończy dowód.

Przykład 3

Obliczymy, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach, których trzy pierwsze cyfry są nieparzyste, pozostałe cztery cyfry są parzyste oraz w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra podzielna przez 7.

Rozwiązanie

Na wstępie zauważmy, że:

- wśród cyfr zapisu dziesiętnego jest pięć nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9, przy czym jedna z nich, 7, dzieli się przez 7,

- wśród cyfr zapisu dziesiętnego jest pięć parzystych: $0, 2, 4, 6, 8$, przy czym jedna z nich, 0, dzieli się przez 7.

Rozpatrujemy grupy cyfr określone warunkami zadania.

Trzy pierwsze cyfry mają być nieparzyste i różne, zatem można je zapisać na $V_5^3 = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sposobów. Jeśli nie będzie wśród nich cyfry 7, to wtedy trzy pierwsze cyfry można zapisać na $V_4^3 = \frac{4!}{1!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sposoby. Wobec tego trzy pierwsze cyfry wśród których jest cyfra 7 można - korzystając z reguły dodawania - zapisać na $V_5^3 - V_4^3 = 60 - 24 = 36$ sposobów.

Cztery ostatnie cyfry mają być parzyste i różne, więc można je zapisać na $V_5^4 = \frac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ sposobów. Jeśli nie będzie wśród nich cyfry 0, to wtedy cztery ostatnie cyfry można zapisać na $V_4^4 = \frac{4!}{0!} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ sposoby. Oznacza to, że cztery ostatnie cyfry wśród których jest cyfra 0 można zapisać na $V_5^4 - V_4^4 = 120 - 24 = 96$ sposobów.

Wynika stąd, że liczbę spełniającą warunki zadania możemy otrzymać w jednym z dwóch rozłącznych przypadków:

- (1) kiedy wśród trzech pierwszych cyfr jest siódemka i wśród czterech ostatnich nie ma zera; korzystamy z reguły mnożenia i stwierdzamy, że wszystkich takich liczb siedmiocyfrowych jest $\left(V_5^3 - V_4^3\right) \cdot V_4^4 = 36 \cdot 24 = 864$,

- (2) kiedy wśród trzech pierwszych cyfr nie ma siódemki i wśród czterech ostatnich jest zero; korzystamy z reguły mnożenia i stwierdzamy, że wszystkich takich liczb siedmiocyfrowych jest $V_4^3 \cdot \left(V_5^4 - V_4^4\right) = 24 \cdot 96 = 2304$.

Korzystając z reguły dodawania otrzymujemy ostatecznie, że wszystkich liczb siedmiocyfrowych, które spełniają warunki zadania jest $864 + 2304 = 3168$.

Uwaga!

Aby ustalić, na ile sposobów można zapisać trzy pierwsze cyfry wśród których jest cyfra 7 można rozumować następująco: miejsce dla cyfry 7 możemy wybrać na 3 sposoby, a pozostałe dwie cyfry – na V_4^2 sposoby, więc wszystkich takich możliwości jest $3 \cdot V_4^2 = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$.

Rozumując podobnie obliczymy, że liczba sposobów, na które można zapisać cztery ostatnie cyfry wśród których jest cyfra 0, jest równa $4 \cdot V_4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$.

Przykład 4

Wyznaczymy wszystkie pary (k, n) liczb całkowitych takich, że $1 \leq k \leq n$, które spełniają równanie

$42 \cdot V_n^k = V_{n+2}^{k+2}$.

Rozwiązanie

Przekształcamy kolejno zadane równanie:

$42 \cdot V_n^k = V_{n+2}^{k+2}$

$42 \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n+2)!}{(n+2-k-2)!}$

$42 \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(n-k)!}$

$42 = (n+1) \cdot (n+2)$.

Ponieważ ciąg określony dla $n \geq 1$ wzorem ogólnym $a_n = (n+1) \cdot (n+2)$ jest rosnący oraz $a_5 = 6 \cdot 7 = 42$, więc równanie jest spełnione dla $n = 5$ oraz każdej liczby całkowitej k, która spełnia warunek $1 \leq k \leq 5$.

Oznacza to, że jest 5 par (k, n) spełniających warunki zadania: $(1, 5)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$, $(4, 5)$, $(5, 5)$.

Słownik

wariacja bez powtórzeń

k–wyrazowy ciąg o elementach wybieranych bez powtórzeń ze zbioru n–elementowego, gdzie $1 \leq k \leq n$

liczba wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego

Liczba V_n^k wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest równa

$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

reguła mnożenia

liczba wszystkich możliwych wyników doświadczenia polegającego na wykonaniu po kolei n czynności, z których pierwsza może zakończyć się na jeden z k_1 sposobów, druga – na jeden z k_2 sposobów, trzecia – na jeden z k_3 sposobów i tak dalej do n-tej czynności, która może zakończyć się na jeden z k_n sposobów, jest równa

$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$

reguła równoliczności

Dwa zbiory A i B są równoliczne (mają tyle samo elementów) jeżeli ich elementy można przyporządkować wzajemnie jednoznacznie, to znaczy: każdemu elementowi zbioru A przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru B oraz każdemu elementowi zbioru B przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru A

reguła dodawania

jeżeli zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to liczba elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ jest równa sumie liczb elementów każdego ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$: $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$

ciąg

funkcja, której dziedziną jest zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych lub pewien jego podzbiór, a wartościami są liczby rzeczywiste

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z przedstawioną poniżej animacją. Przeanalizuj zaprezentowane w niej rozwiązanie zadania. Jest w nim pokazane, jak obliczyć, ile jest wszystkich pięciocyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach, które są większe od 62571.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D15jzg1G0

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej wariacji bez powtórzeń.

Polecenie 2

Rozumując podobnie, jak w rozwiązaniu zadania omówionego w powyższej animacji oblicz, ile jest wszystkich sześciocyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach, które są mniejsze od 470913.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Ćwiczenie 2

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Ćwiczenie 6

Ćwiczenie 7

Ćwiczenie 8

Dla nauczyciela

Autor: Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wariacje bez powtórzeń - zadania ze złożonymi warunkami

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

XI. Kombinatoryka

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- analizuje modele odwołujące się do pojęcia wariacji bez powtórzeń w zadaniach dotyczących m.in. zapisu dziesiętnego liczb naturalnych o różnych cyfrach, a także funkcji różnowartościowych, których dziedziną i zbiorem wartości są zbiory skończone;
- stosując regułę dodawania zapisuje liczbę wszystkich możliwych wyników danego doświadczenia na dwa sposoby, dzięki czemu oblicza, ile jest wyników spełniających zadane warunki.

- dowodzi tożsamości algebraicznych zapisanych z użyciem symboliki odwołującej się do liczby V_n^k wszystkich k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- praca z tekstem przewodnim;
- metoda krokodyla;
- dyskusja.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

1. Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się z treściami zapisanymi w sekcji „Przeczytaj”.

Faza wstępna:

1. Nauczyciel określa temat lekcji: „Wariacje bez powtórzeń - zadania ze złożonymi warunkami” oraz cele.
2. Wybrana osoba formułuje kryteria sukcesu i zapisuje je na tablicy.
3. Uczniowie przypominają sobie pojęcie wariacji bez powtórzeń oraz twierdzenie o liczbie wariacji bez powtórzeń.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie w parach zapoznają metodą tekstu przewodniego zapoznają się z materiałem w sekcji „Przeczytaj”. Notują pytania do przedstawionych przykładów, które następnie omawiane są na forum klasy.

2. Uczniowie w parach zapoznają się z przedstawionym w animacji sposobami na obliczanie liczby wszystkich pięciocyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach, które są większe od 62571. Następnie obliczają, ile jest wszystkich sześciocyfrowych liczb naturalnych o różnych cyfrach, które są mniejsze od 470913.
3. Uczniowie indywidualnie wykonują ćwiczenia interaktywne nr 3-8, metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, odnosząc się do wcześniej zapisanych kryteriów sukcesu.

Praca domowa:

- Uczniowie rozwiązują ćwiczenie interaktywne nr 1-2.

Materiały pomocnicze:

- Inne spojrzenie. Permutacje, kombinacje, wariacje

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać jako materiał, służący powtórzeniu materiału z wariacji bez powtórzeń.