Równania stopnia trzeciego w postaci iloczynu

Szczególne przypadki rozwiązań równań wielomianowych. Rozwiązywanie równań, w których jedna ze stron jest iloczynem wielomianów, a druga strona jest równa 0.

Rozwiązywanie równań wielomianowych. Wskazywanie liczby rozwiązań. Wskazywanie rozwiązywań do danego równania wielomianowego. Zasób zawiera 10 interaktywnych zadań.

Rozwiązywanie równań wielomianowych. Podawanie liczy rozwiązań. podawanie rozwiązań. Równania z parametrem. Zasób zawiera 6 zadań, w tym interaktywne.

Rozwiązywanie równań wielomianowych. Zadania o większym stopniu trudności. Zasób zawiera 8 otwartych zadań z wyjaśnieniami i rozwiązaniami. Zadania na dowodzenie.

Równania stopnia trzeciego w postaci iloczynu

Poszukiwanie miejsc zerowych funkcji W sprowadza się najczęściej do rozwiązania równania $W(x) = 0$. Do tej pory rozwiązywaliśmy takie równania, w których $W(x)$ był wielomianem stopnia pierwszego – wtedy otrzymywaliśmy równanie liniowe. Jeżeli $W(x)$ był wielomianem stopnia drugiego, otrzymywaliśmy równanie kwadratowe. Teraz dowiesz się, jak rozwiązywać niektóre z równań, w których występuje wielomian stopnia wyższego niż dwa. Nie jest to zadanie łatwe. Dla dowolnych wielomianów stopnia piątego lub wyższego takie metody w ogóle nie istnieją. Pokażemy więc, jak możesz sobie poradzić w pewnych szczególnych przypadkach.

Przykład 1

Rozwiążemy równania:

- $x^3 + 64 = 0$

Odejmujemy od obu stron równania liczbę 64 i otrzymujemy równanie $x^3 = -64$. Jedyną liczbą spełniającą to równanie jest $x = \sqrt[3]{-64} = -4$.

- $2x^4 - 162 = 0$

$$2x^4 = 162$$

$$x^4 = 81$$

Jedyną dodatnią liczbą, która spełnia to równanie, jest $x = \sqrt[4]{81} = 3$, co wynika z definicji pierwiastka. Zauważmy, że jeżeli wykładnik k potęgi x^k jest parzysty, to $x^k = (-x)^k$, co oznacza, że jeśli liczba 3 jest rozwiązaniem równania $x^4 = 81$, to również liczba -3 jest rozwiązaniem tego równania, bo $(-3)^4 = 3^4 = 81$. Równanie ma zatem dwa rozwiązania $x = 3$ oraz $x = -3$.

- $x^6 + 64 = 0$.
  Zauważmy, że to równanie jest sprzeczne, gdyż lewa strona tego równania jest sumą nieujemnej liczby x^6 oraz 64. Jest więc nie mniejsza niż 64 dla dowolnej liczby x. Nie może więc równać się 0.

Twierdzenie: Rozwiązanie równania $x^n = a$

Dla liczby naturalnej dodatniej n, większej od 1, oraz liczby rzeczywistej $a \neq 0$ równanie $x^n = a$ ma

- jedno rozwiązanie równe $x = \sqrt[n]{a}$, gdy n jest liczbą nieparzystą,

- dwa rozwiązania równe $x = \sqrt[n]{a}$ oraz $x = -\sqrt[n]{a}$, gdy n jest liczbą parzystą oraz a jest liczbą dodatnią,
- zero rozwiązań, gdy n jest liczbą parzystą oraz a jest liczbą ujemną.

Przykład 2

Udowodnij, że równanie $-x^4 - x^2 - 5 = 0$ jest równaniem sprzecznym.
Zauważmy, że lewa strona równania jest sumą niedodatniej liczby $-x^4$, niedodatniej liczby $-x^2$ oraz ujemnej liczby -5, więc jest liczbą ujemną. Nie może więc być równa 0.
Przejdziemy teraz do rozwiązywania równań, których jedna ze stron jest iloczynem wielomianów, a druga strona jest równa 0. Będziemy tu korzystać z faktu, że iloczyn jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z czynników tego iloczynu jest równy 0
.

Przykład 3

Rozwiążemy równania

- $x(x-4)(x+2) = 0$

Lewa strona równania jest iloczynem trzech czynników. Jeśli iloczyn ten równa się zero, to co najmniej jeden z czynników jest równy zero, czyli $x = 0$ lub $x - 4 = 0$ lub $x + 2 = 0$.
Stąd wynika, że równanie ma trzy rozwiązania $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ oraz $x_3 = -2$.

- $\left(x^2 - 16\right)\left(2x^2 + 9x - 5\right)\left(x^4 + 4\right) = 0$

W tym równaniu także lewa strona jest iloczynem trzech czynników, a prawa strona jest równa zero. Tak jak poprzednio wnioskujemy, że co najmniej jeden z czynników musi być równy zero, czyli $x^2 - 16 = 0$ lub $2x^2 + 9x - 5 = 0$ lub $x^4 + 4 = 0$. Rozwiązujemy kolejno otrzymane równania.
$x^2 - 16 = 0$ przekształcamy równoważnie, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, do równania

$$(x-4)(x+4) = 0$$

Stąd $x - 4 = 0$ lub $x + 4 = 0$. Otrzymujemy więc dwa rozwiązania $x_1 = 4$ oraz $x_2 = -4$.

$$2x^2 + 9x - 5 = 0$$

jest równaniem kwadratowym, którego $\Delta = 121$. Równanie to ma więc dwa rozwiązania

$$x_1 = \frac{-9-11}{4} = -5$$

oraz

$$x_2 = \frac{-9+11}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x^4+4=0$$

zgodnie z podanym wcześniej twierdzeniem, nie ma rozwiązań.
Zatem rozpatrywane równanie ma cztery rozwiązania $x_1=4$, $x_2=-4$, $x_3=-5$ oraz $x_4=\frac{1}{2}$.

Teraz pokażemy, jak niektóre równania doprowadzić do takiej postaci, jaką miały równania omawiane w poprzednim przykładzie.

Przykład 4

Rozwiążemy równanie $x^3+x^2-6x=0$.
Wyłączając x przed nawias, otrzymujemy równanie

$$x\left(x^2+x-6\right)=0,$$

którego lewa strona jest iloczynem dwóch czynników, a prawa jest równa zero. Zatem co najmniej jeden z tych czynników jest równy zero, czyli $x=0$ lub $x^2+x-6=0$.
Rozwiązujemy drugie równanie.

$$\Delta=1^2-4\cdot(-6)=25$$

Ponieważ $\Delta>0$, więc równanie to ma dwa rozwiązania $x_1=\frac{-1-5}{2}=-3$ oraz $x_2=\frac{-1+5}{2}=2$. Rozwiązywane równanie ma więc trzy rozwiązania $x_1=0$, $x_2=-3$ oraz $x_3=2$.

Przykład 5

Rozwiążemy równanie

$$x^4-8x^2+16=0$$

Zauważmy, że lewą stronę możemy zapisać, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, w następujący sposób

$$\left(x^2-4\right)^2=0$$

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, otrzymujemy kolejno

$$[(x-2)(x+2)]^2=0$$

$$(x-2)^2(x+2)^2=0$$

Stąd wnioskujemy, że $(x-2)^2=0$ lub $(x+2)^2=0$, czyli $x-2=0$ lub $x+2=0$. Zatem $x=2$ lub $x=-2$.

Przykład 6

Rozwiążemy równanie

$$x^4 - x^3 - 8x + 8 = 0$$

Żeby rozwiązać to równanie, pogrupujemy wyrazy. W tym celu wyłączmy przed nawias x^3 z dwóch pierwszych wyrazów oraz -8 z dwóch ostatnich. W ten sposób otrzymamy równanie równoważne

$$x^3(x-1) - 8(x-1) = 0,$$

w którym lewa strona jest różnicą dwóch iloczynów. W każdym z tych iloczynów występuje wspólny czynnik $(x-1)$. Gdy wyłączymy go przed nawias, otrzymamy równanie

$$(x-1)\left(x^3-8\right) = 0$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie, którego lewa strona jest iloczynem dwóch czynników, a prawa jest równa zero. Stąd otrzymujemy $x_1 - 1 = 0$ lub $x^3 - 8 = 0$. Pierwsze równanie spełnia jedynie liczba $x = 1$. Drugie równanie przekształcimy do postaci $x^3 = 8$. Jedyną liczbą, która spełnia to równanie, jest $x_2 = \sqrt[3]{8} = 2$. Ostatecznie otrzymaliśmy dwa rozwiązania $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 2$ rozwiązywanego równania.

Ćwiczenie 1

Połącz w pary.

$x^3 - 3x - 2$	$3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$
$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	$(x-1)(x-2)(x-3)$
$3x^4 - 3$	$(x+1)^2(x-2)$
$x^3 - 4x^2 + 5x - 2$	$(x-1)(x+1)$
$x^2 - 1$	$(x-1)^2(x-3)$
$x^3 - 5x^2 + 7x - 3$	$(x-1)^2(x-2)$

Ćwiczenie 2

Dane są wielomiany:

$W\left(x\right) = x^2 - 3x$

$P\left(x\right) = x^3 + 5x^2.$

$Q\left(x\right) = x^4 + 3x^2$

$R(x) = 5x$

Połącz w pary działania na wielomianach z odpowiadającymi im wynikami.

$x^3 + 6x^2 - 3x$	$P(x) - Q(x)$
$5x^4 + 25x^3$	$W(x) \cdot R(x)$
$-x^4 + x^3 + 2x^2$	$W(x) - Q(x)$
$5x^3 - 15x^2$	$P(x) \cdot R(x)$
$x^2 + 2x$	$W(x) + P(x)$
$-x^4 - 2x^2 - 3x$	$W(x) + R(x)$

Ćwiczenie 3

Połącz w pary wielomian z jego stopniem.

2	$2x(x+2)^3(x+5)$
5	$x^3\left(x-2\right)\left(x-3\right)^2$
8	$\left(x^2+5\right)\left(x^2+4\right)^3$
3	$(x+4)^2(x-4)^2$
7	$(2x-1)^8(x+2)$
6	$x\left(x^2+3\right)^3$
4	$(x-1)(x+2)(x+3)$
9	$2(x+2)(x-3)$

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

Dane są wielomiany $W(x)=(x-3)(x+1)$, $V(x)=(x-3)(x-1)$. Wtedy równanie $W(x)\cdot V(x)=0$ ma

- 3 rozwiązania
- 2 rozwiązania
- 4 rozwiązania
- 1 rozwiązanie

Ćwiczenie 6

Liczby $x_1,\ x_2,\ x_3$ są rozwiązaniami równania $(x+1)(x+2)(x+3)=0$. Jeżeli $x_1<x_2<x_3$, to

- $2x_1+x_2=-4$
- $x_3=x_1+x_2$
- $x_1\cdot x_2<x_3$
- $x_1=x_2+x_3$

Ćwiczenie 7

Wybierz równanie, które ma dwa różne rozwiązania całkowite.

- $x^4 - 2 = 0$
- $x(x-3)(2x+1) = 0$
- $x\left(x^2 - 4\right) = 0$
- $\left(x^2 - 2\right)\left(x^2 - 3\right) = 0$

Ćwiczenie 8

Liczby -1 i 3 są jedynymi rozwiązaniami równania

- $\left(x^2 - 2x - 3\right)(x-3) = 0$
- $5(x-1)(x+3) = 0$
- $\left(x^2 - 2x + 1\right)(x-3)^2 = 0$
- $2x\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0$

Ćwiczenie 9

Równanie $x^5 - 9 = 9x^3 - x^2$ ma dokładnie

- dwa rozwiązania $x = 1$, $\mathrm{x} = 9$
- cztery rozwiązania $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$
- trzy rozwiązania $x = -3$, $x = -1$, $x = 3$
- jedno rozwiązanie $x = 1$

Ćwiczenie 10

Wielomian $W(x) = x(x-1)(x-3) - (3-x)$ można zapisać w postaci

- $W(x) = (x-3)\left(x^2 - x + 1\right)$
- $W(x) = x(x-1)(x-3)(3-x)$
- $W(x) = (3-x)(x-1)^2$
- $W(x) = (x-3)\left(x^2 - x - 1\right)$

Ćwiczenie 11

Równanie $3x^4 - x^2 = 0$ można zapisać w postaci równoważnej

- $x^2(3x-1)(3x+1) = 0$
- $x\left(\sqrt{3}x - 1\right)\left(\sqrt{3}x + 1\right) = 0$
- $\left(\sqrt{3}x - 1\right)\left(\sqrt{3}x + 1\right)x^2 = 0$
- $x^2(3x-1)^2 = 0$

Ćwiczenie 12

Równanie $-4x^4 - 6x^3 + 18x^2 = 0$ można zapisać w postaci równoważnej

- $2x^2(2x+3)(x-3) = 0$
- $-2x^2(2x-3)(x-3) = 0$
- $-2x^2(2x-3)(x+3) = 0$
- $2x^2(2x-3)(x+3) = 0$

Ćwiczenie 13

Liczba wszystkich rozwiązań równania $x^2\left(2x^2-7\right)\left(x^2+16\right) = 0$ jest równa

- cztery
- pięć
- trzy
- dwa

Ćwiczenie 14

Rozwiąż równanie.

1. $2x^3 - 432 = 0$
2. $\frac{5x^3}{2} + 160 = 0$

Ćwiczenie 15

Rozwiąż równanie.

1. $3x^4 - 48 = 0$
2. $x^6 - 27 = 0$
3. $5x^8 + 20 = 0$

Ćwiczenie 16

Rozwiąż równanie.

1. $7x^2(x+3)^2(3x-1) = 0$
2. $\left(4x^2 + 4x + 1\right)\left(x^2 + 10\right) = 0$
3. $\left(16x^2 - 9\right)\left(25x^4 - 1\right) = 0$

Ćwiczenie 17

Oblicz taką wartość m, dla której równanie $(x-3)(3x+m) = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie.

Ćwiczenie 18

Ile rozwiązań ma równanie $\left(x^4 - 16\right)\left(x^2 + 3x - 10\right) = 0$?

Ćwiczenie 19

Rozwiąż równanie.

1. $x^4 - 8x^3 + 16x^2 = 0$
2. $2x^3 - x^2 - x = 0$
3. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 = 0$

Ćwiczenie 20

Rozwiąż równanie.

1. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
2. $x^4 + 6x^3 + x^2 + 6x = 0$
3. $3x^3 + 4x^2 - 6x - 8 = 0$
4. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

Ćwiczenie 21

Uzasadnij, że iloczyn pierwiastków równania $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$ jest dodatni.

Ćwiczenie 22

Uzasadnij, że suma rozwiązań równania $x^{50} + x^2 = 50x^{48} + 50$ jest liczbą całkowitą.

Ćwiczenie 23

Przez jaki wielomian trzeba pomnożyć wielomian $W(x) = x^2 - 4$, żeby otrzymać wielomian $V(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 8$?

Ćwiczenie 24

Udowodnij, że jeżeli liczba 2 jest rozwiązaniem równania $(x-2)^2(x+7)-x\left(x^2-\mathrm{ax}+a\right)=0$, to równanie to nie ma więcej rozwiązań.