



## Monotoniczność funkcji

- Wprowadzenie
- Przeczytaj
- Animacja
- Sprawdź się
- Dla nauczyciela



## Monotoniczność funkcji

Źródło: dostępny w internecie: pxfuel.com, domena publiczna.

Jedną z umiejętności zawartych w podstawie programowej kształcenia matematycznego dla liceum ogólnokształcącego i technikum jest odczytywanie własności funkcji z wykresu. Należy do niej wykorzystanie pojęcia monotoniczności funkcji. W materiale poznamy wiadomości dotyczące monotoniczności funkcji. Będziemy rozwiązywać ćwiczenia interaktywne, opierając się na części teoretycznej materiału i podanych przykładach.

### Twoje cele

- Poznasz definicję monotoniczności funkcji.
- Wskażesz funkcje, które są monotoniczne.
- Udowodnisz, że dana funkcja jest monotoniczna.
- Ocenisz swoją wiedzę, wykonując podane ćwiczenia.

# Przeczytaj

---

## Już wiesz

Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  jest to przyporządkowanie, które każdemu elementowi  $x \in X$  przyporządkowuje dokładnie jeden element  $y \in Y$ .

Każdą funkcję, oprócz dziedziny i zbioru wartości, może charakteryzować wiele ciekawych własności. Zaliczamy do nich monotoniczność.

## Definicja: monotoniczność funkcji

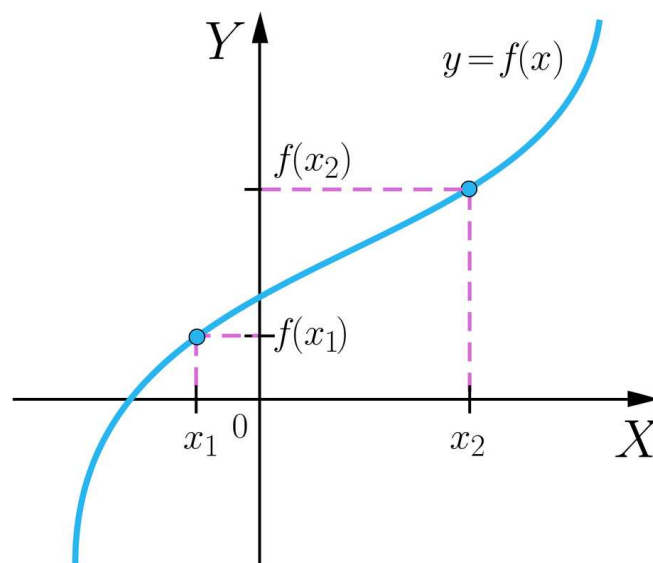
Funkcja jest monotoniczna w całej swojej dziedzinie, gdy jest rosnąca, malejąca, stała, nierosnąca lub niemalejąca.

Omówimy jakie warunki muszą spełniać [funkcje monotoniczne](#).

## Funkcja rosnąca

Funkcję liczbową  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy rosnącą w podzbiorze  $A \subset X$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in A$  z nierówności  $x_1 < x_2$  wynika, że  $f(x_1) < f(x_2)$ .

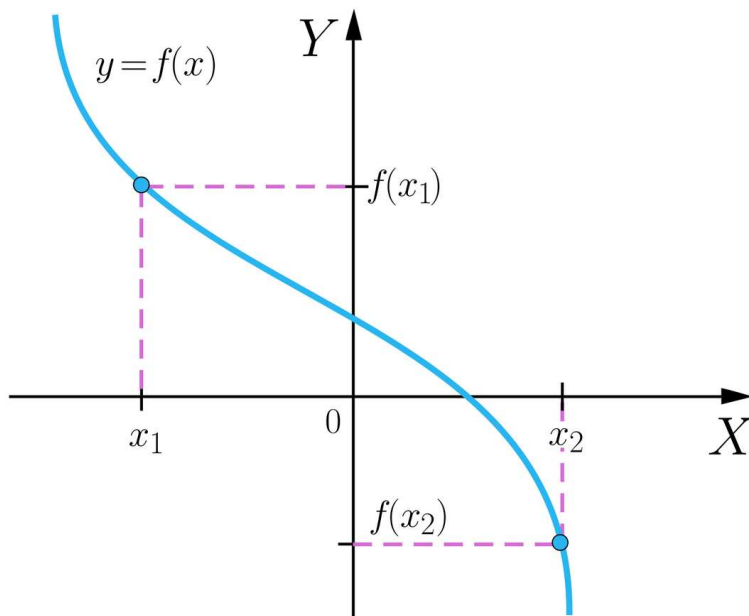
Jeśli funkcja jest rosnąca w całej swojej dziedzinie, to mówimy, że funkcja jest rosnąca.



## Funkcja malejąca

Funkcję liczbową  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy malejącą w podzbiore  $A \subset X$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in A$  z nierówności  $x_1 < x_2$  wynika, że  $f(x_1) > f(x_2)$ .

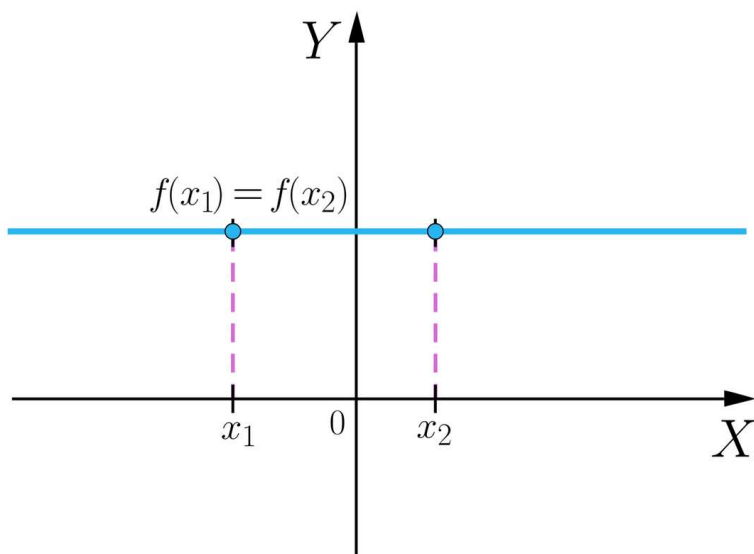
Jeśli funkcja jest malejąca w całej swojej dziedzinie, to mówimy, że funkcja jest malejąca.



## Funkcja stała

Funkcję liczbową  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy stałą w podzbiore  $A \subset X$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in A$  z nierówności  $x_1 < x_2$  wynika, że  $f(x_1) = f(x_2)$ .

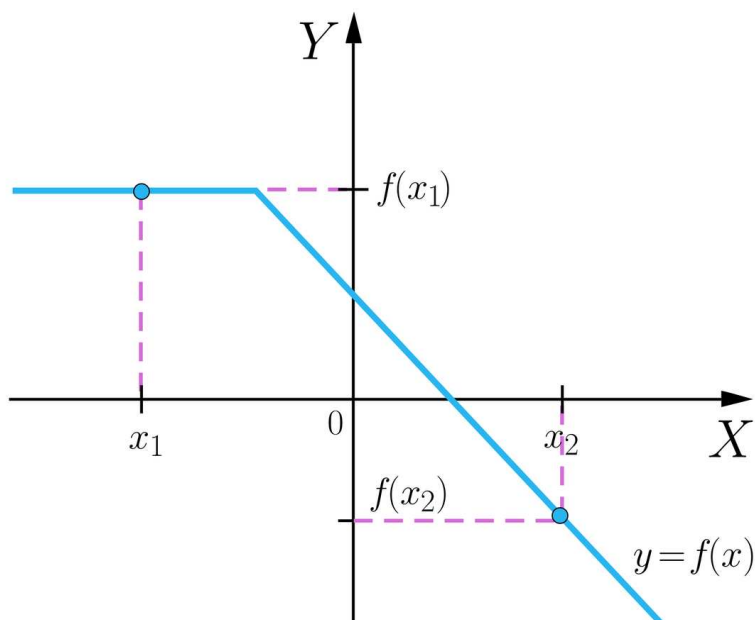
Jeśli funkcja jest stała w całej swojej dziedzinie, to mówimy, że funkcja jest stała.



## Funkcja nierosnąca

Funkcję liczbową  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy nierosnącą w podzbiornie  $A \subset X$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in A$  z nierówności  $x_1 < x_2$  wynika, że  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

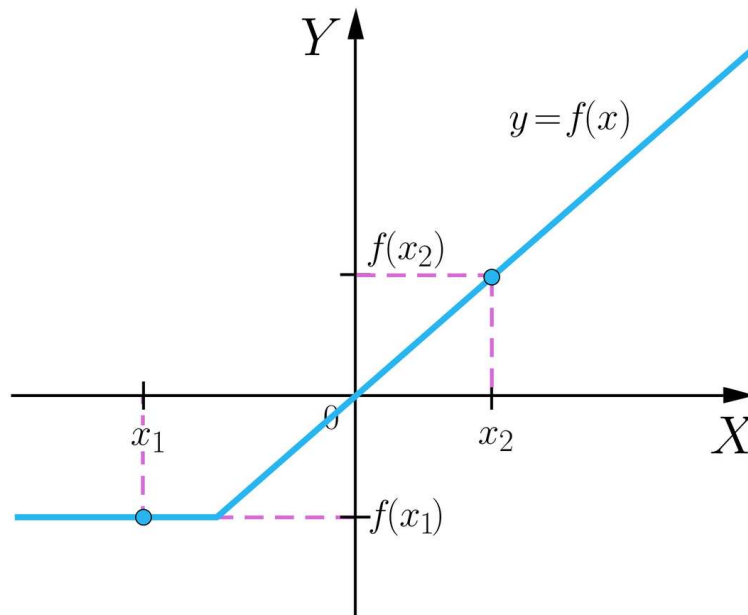
Jeśli funkcja jest nierosnąca w całej swojej dziedzinie, to mówimy, że funkcja jest nierosnąca.



## Funkcja niemalejąca

Funkcję liczbową  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy niemalejącą w podzbiornie  $A \subset X$  wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in A$  z nierówności  $x_1 < x_2$  wynika, że  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Jeśli funkcja jest niemalejąca w całej swojej dziedzinie, to mówimy, że funkcja jest niemalejąca.



W poniższych dwóch przykładach przedstawimy przykłady funkcji: pierwsza z nich jest funkcją monotoniczną, druga nie jest funkcją monotoniczną.

### Przykład 1

Dana jest funkcja opisana przez zbiór par  $\{(-3, 1), (-1, 1), (0, 3), (1, 5), (2, 7)\}$ .  
Określmy, czy funkcja jest monotoniczna.

#### Rozwiązanie:

Ponieważ zachodzi zależność:

$$f(-3) = f(-1) < f(0) < f(1) < f(2), \text{ zatem funkcja jest niemalejąca.}$$

### Przykład 2

Sprawdźmy, czy funkcja określona wzorem  $f(x) = -x^2 + 1$  dla  $x \in \{-3, -1, 0, 2, 3\}$  jest monotoniczna.

#### Rozwiązanie:

Obliczymy wartości tej funkcji dla podanych argumentów:

$$f(-3) = -(-3)^2 + 1 = -8$$

$$f(-1) = -(-1)^2 + 1 = 0$$

$$f(0) = -0^2 + 1 = 1$$

$$f(2) = -2^2 + 1 = -3$$

$$f(3) = -3^2 + 1 = -8$$

Z otrzymanych kolejnych wartości tej funkcji wynika, że ta funkcja nie jest monotoniczna.

Mając funkcję zadaną wzorem, możemy wykazać, że jest monotoniczna. Kolejne kroki w dowodzeniu zostały opisane w poniższych przykładach.

### Przykład 3

Wykażemy, że funkcja zadana wzorem  $f(x) = -3x + 1$  jest malejąca.

#### Rozwiązanie:

Założmy, że  $x_1, x_2 \in D_f$  oraz  $x_1 < x_2$ .

$$\text{Wtedy } f(x_2) - f(x_1) = -3x_2 + 1 - (-3x_1 + 1) = -3x_2 + 3x_1.$$

Ponieważ  $x_1 < x_2$ , zatem  $-3x_2 + 3x_1 = -3(x_2 - x_1) < 0$ , czyli

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Stąd, wobec dowolności  $x_1, x_2$  wnioskujemy, że funkcja jest malejąca.

### Przykład 4

Wykażemy, że funkcja określona wzorem  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$  dla  $x \in (-1, +\infty)$  jest rosnąca.

#### Rozwiązanie:

Jeśli  $-1 < x_1 < x_2$ , to:

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2x_2}{x_2+1} - \frac{2x_1}{x_1+1} = \frac{2x_2(x_1+1) - 2x_1(x_2+1)}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{2x_2 - 2x_1}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{2(x_2 - x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0,$$

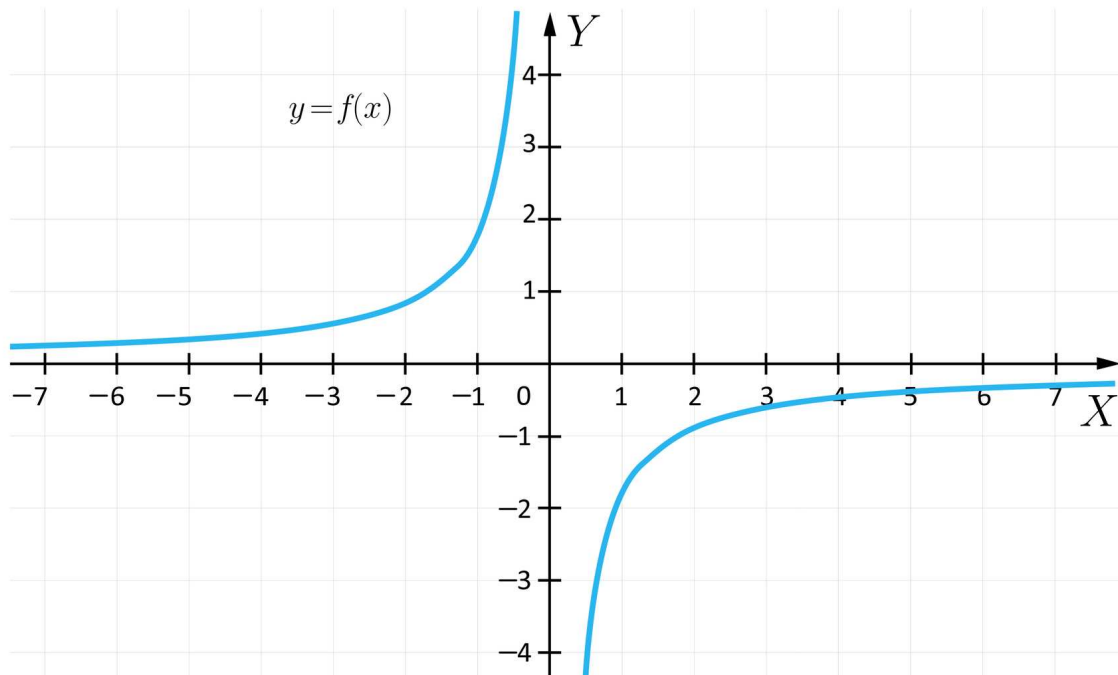
ponieważ  $x_2 > x_1$  i  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$ .

Stąd, wobec dowolności  $x_1$  i  $x_2$  wnioskujemy, że funkcja  $f$  jest rosnąca.

Niektóre funkcje rozpatrywane w całej swojej dziedzinie nie są monotoniczne, ale są monotoniczne przedziałami.

### Przykład 5

Uzasadnimy, że funkcja, której wykres przedstawiono na poniższym rysunku, nie jest rosnąca w całej swojej dziedzinie.



### Rozwiązanie:

Z wykresu funkcji możemy odczytać, że dziedziną tej funkcji jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Na podstawie wykresu wydaje się też, że funkcja jest rosnąca. Jednak okazuje się, że tak nie jest.

Niech  $x_1 = -2$  oraz  $x_2 = 2$ .

Wtedy  $f(x_1) = f(-2) = 1 > f(2) = f(x_2)$ , zatem funkcja nie jest rosnąca w całej swojej dziedzinie.

Zauważmy, że funkcja jest przedziałami monotoniczna i jest rosnąca w każdym z przedziałów  $(-\infty, 0)$  oraz  $(0, \infty)$ .

## Słownik

### monotoniczność funkcji

własność funkcji, która określa zmianę wartości tej funkcji wraz ze wzrostem argumentów

# Animacja

---

## Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją, a następnie wykonaj polecenie.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1B4TuVqF>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący monotoniczności.

---

## Polecenie 2

Wykaż, że funkcja określona wzorem  $f(x) = \frac{x}{x+2}$  dla  $x \in (-2, +\infty)$  jest rosnąca.

# Sprawdź się

---

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Ćwiczenie 8



# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Tomasz Wójtowicz

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Monotoniczność funkcji**

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
- 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- stosuje definicję monotoniczności funkcji,
- rozpoznaje funkcje monotoniczne,
- wykorzystuje definicję monotoniczności funkcji w dowodzeniu

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

## **Metody i techniki nauczania:**

- dyskusja;
- liga zadaniowa;
- burza mózgów;
- metoda krokodyla.

## **Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Przedstawienie uczniom tematu: „Monotoniczność funkcji” oraz celów lekcji, a następnie określenie kryteriów sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

### **Faza realizacyjna:**

1. Nauczyciel dzieli uczniów na 4-osobowe grupy. Uczniowie w grupach zapoznają się z informacjami w sekcji „Przeczytaj”. Analizują przedstawione przykłady i notują pytania. Następnie przedstawiają pytania na forum klasy. Odpowiadają na nie uczniowie z innych grup. Nauczyciel wyjaśnia ewentualne wątpliwości.
2. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Animacja”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
3. Uczniowie wykonują pierwsze dwa ćwiczenia interaktywne z sekcji „Sprawdź się”. Wyniki pracy omawiane są na forum i komentowane przez nauczyciela.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy w celu przeprowadzenia ligi zadaniowej. Uczniowie rozwiązują zadania 3-5 na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel może nagrodzić uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

5. Uczniowie wykonują indywidualnie ćwiczenia 6, 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się” metodą krokodyla. Krokodylem jest nauczyciel, który „czeka nieruchomo na brzegu rzeki” i „ożywia się” tylko w przypadku, gdy uczeń nie może sobie poradzić z zadaniem.

#### **Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

#### **Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

#### **Materiały pomocnicze:**

- [Monotoniczność funkcji](#)

#### **Wskazówki metodyczne:**

- Materiał w sekcji „Animacja” można wykorzystać jako powtórzenie i utwalenie wiadomości w zakresie monotoniczności funkcji.