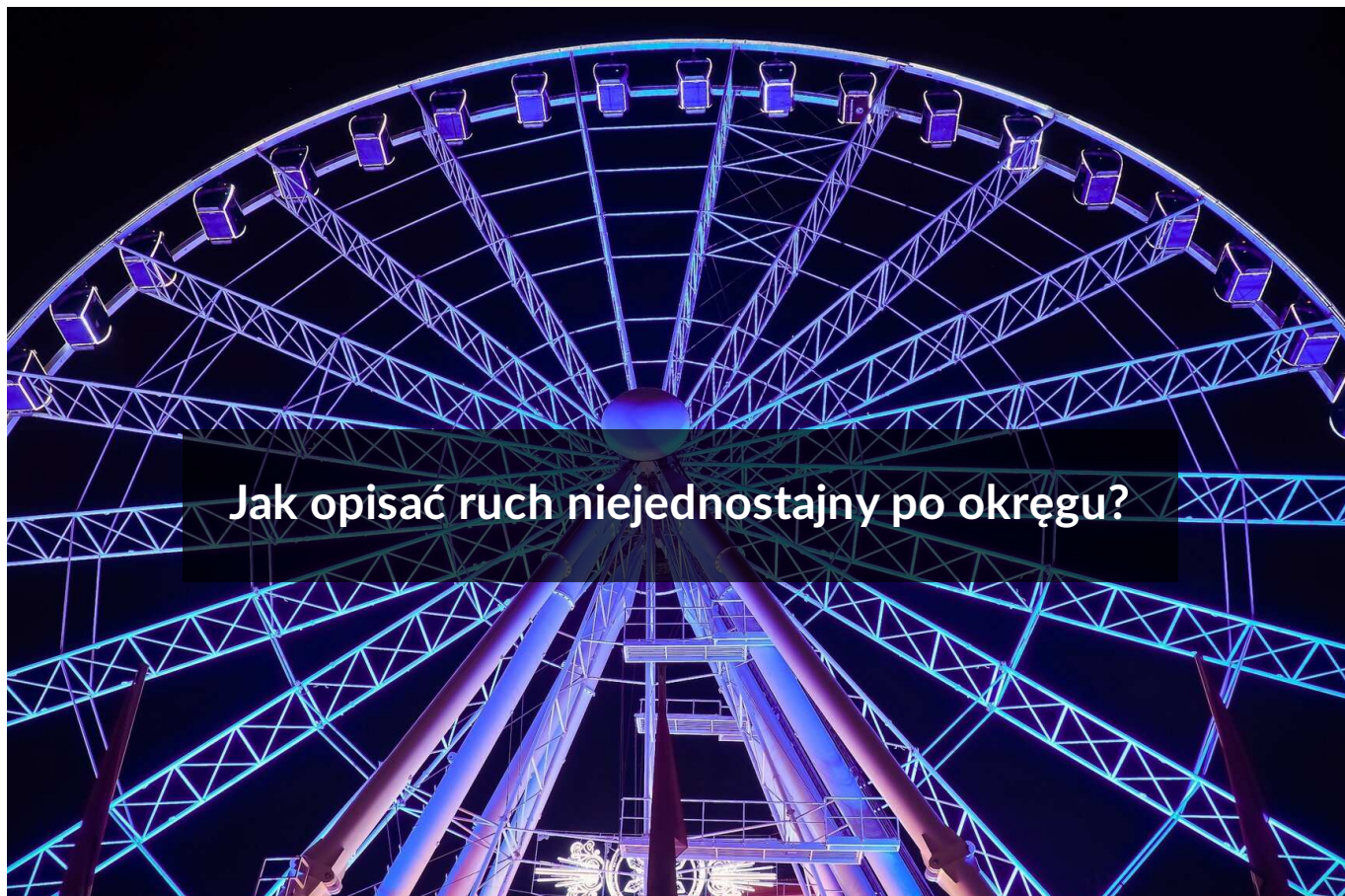




Jak opisać ruch niejednostajny po okręgu?

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Film samouczek](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Jak opisać ruch niejednostajny po okręgu?

Źródło: dostępny w internecie: <https://pixabay.com/pl/photos/diabelski-m%c5%82yn-jazda-3869397/> [dostęp 4.08.2022], domena publiczna.

Czy to nie ciekawe?

Rozpatrując ruch po okręgu, np. jazdę po okręgu na rowerze ze zmienną prędkością, najczęściej analizujemy jedynie parametry liniowe, takie jak prędkość i przyspieszenie. W tym materiale poznasz inny sposób opisu takiego ruchu, z wykorzystaniem parametrów kątowych, takich jak prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe.

Twoje cele

- poznasz relacje wiążące parametry liniowe i kątowe w ruchu niejednostajnym po okręgu,
- wyznacysz wartości przemieszczenia kątowego w ruchu niejednostajnym po okręgu,
- obliczysz wartość końcowej prędkości kątowej w ruchu niejednostajnym po okręgu.

Przeczytaj

Warto przeczytać

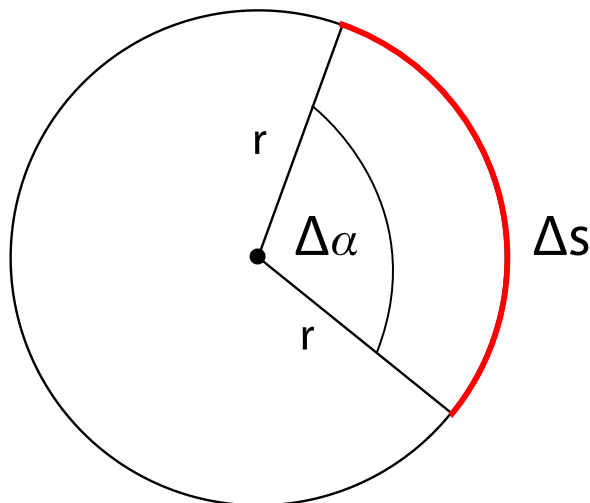
Rozpatrując zagadnienie ruchu niejednostajnego po okręgu, mamy do czynienia ze zjawiskiem, w którym wartość prędkości liniowej ciała poruszającego się po obwodzie nie jest wartością stałą: $v \neq \text{const.}$ **Prędkość kątowa** ω zdefiniowana jest jako **przyrost kąta** $\Delta\alpha$, który następuje w pewnym czasie Δt

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}.$$

Jednostką prędkości kątowej jest radian podzielony przez sekundę:

$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Poruszające się z prędkością v po okręgu ciało zakreśla pewien łuk. Spróbujmy znaleźć relację wiążącą ze sobą prędkość liniową i prędkość kątową.



Rys.1. Zależność między przyrostem kąta i długością łuku w ruchu po okręgu.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Związek pomiędzy długością łuku Δs i przyrostem kąta $\Delta\alpha$ możemy zapisać w postaci

$$\Delta s = \Delta\alpha \cdot r,$$

gdzie r jest promieniem okręgu (patrz Rys. 1.). Zauważmy, że oba te przyrosty następują w tym samym czasie Δt . Podzielmy obustronnie powyższe wyrażenie przez Δt

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \cdot r.$$

Po lewej stronie wyrażenia otrzymaliśmy stosunek przyrostu drogi do czasu. Jest to wartość prędkości liniowej: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = v$. Po prawej stronie równania widzimy natomiast stosunek

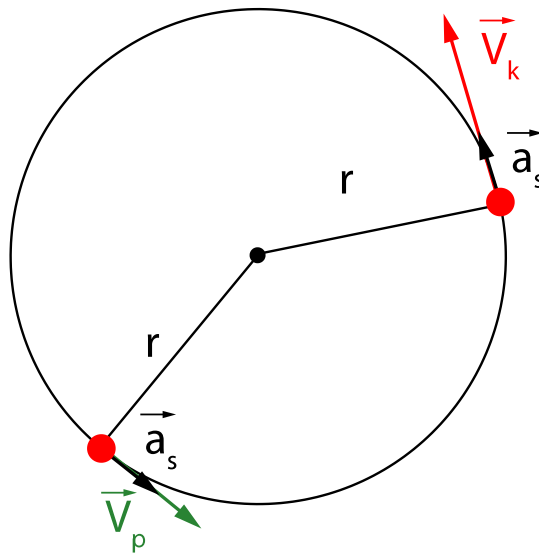
przyrostu kąta do czasu. Jest to znana nam już definicja prędkości kątowej, $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega$. Możemy zatem zapisać powyższą relację w postaci:

$$v = \omega \cdot r.$$

Jak wspomnieliśmy na początku, w ruchu niejednostajnym po okręgu wartość prędkości liniowej, z jaką porusza się ciało, również ulega zmianie. Stosunek zmiany prędkości do czasu, w którym następuje, stanowi definicję przyspieszenia.

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a.$$

W analizowanym zagadnieniu przyspieszenie to rozumiane jest jako przyspieszenie styczne do toru a_s . Jego wektorową postać przedstawia Rys. 2.



Rys. 2. Przyspieszenie styczne w ruchu po okręgu.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Zastanówmy się nad konsekwencją obecności przyspieszenia stycznego. Zmiana wartości prędkości liniowej, z jaką ciało porusza się po okręgu, wymusza również zmianę prędkości kątowej, zgodnie ze wzorem

$$\Delta v = \Delta\omega \cdot r.$$

Ponownie zauważmy, że przyrosty tych parametrów następują w takim samym czasie Δt

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \cdot r.$$

Część wyrażenia po prawej stronie, określająca przyrost prędkości kątowej w czasie, znana jest jako **przyspieszenie kątowe**:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_k - \omega_p}{\Delta t} = \varepsilon.$$

Jednostką przyspieszenia kątowego jest radian podzielony przez sekundę w kwadracie

$$[\varepsilon] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Możemy zatem zapisać relację wiążącą przyspieszenie styczne i przyspieszenie kątowe jako

$$a_s = \varepsilon r.$$

W zadaniach rachunkowych często pojawia się konieczność wyznaczenia kąta $\alpha(t)$, jaki zakreśliło ciało w czasie ruchu, lub wyznaczenia jego prędkości kątowej $\omega(t)$. I tak, kąt, który został zakreślony przez ciało poruszające się początkowo z prędkością kątową ω_p , a która wzrosła do wartości końcowej ω_k w czasie t , określa wzór :

$$\alpha(t) = \frac{\omega_p + \omega_k}{2} t.$$

Zwróćmy uwagę, że czynnik $\frac{\omega_p + \omega_k}{2}$ jest wartością średnią prędkości kątowej. Jest to ważne, ponieważ powyższe równanie jest prawdziwe tylko w przypadku ruchu niejednostajnego po okręgu, w którym wartość przyspieszenia kątowego jest stała $\varepsilon = \text{const}$.

Z definicji przyspieszenia kątowego wynika, że:

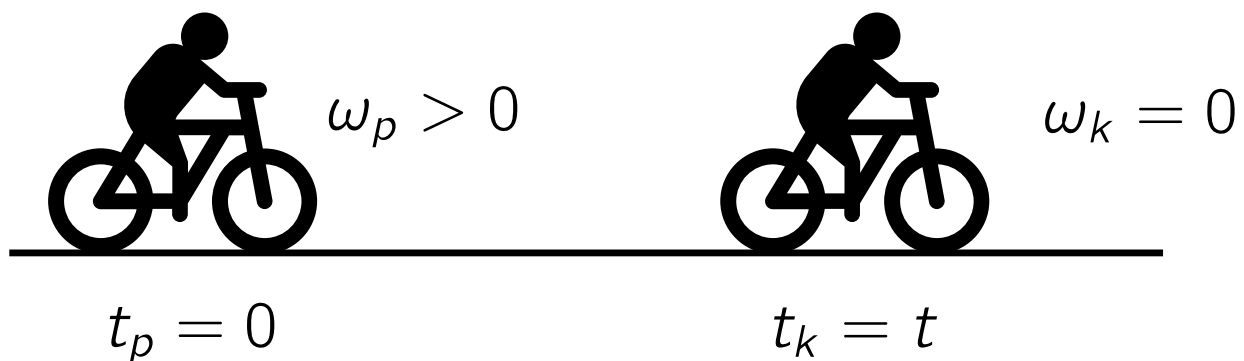
$$\Delta\omega = \varepsilon t,$$

a zatem wartość końcową prędkości kątowej wyrażamy jako

$$\omega_k = \omega_p + \varepsilon t.$$

Przykład 1.

Przeanalizujmy przykład chłopca jadącego na rowerze. Rowerzysta jedzie w taki sposób, że koła jego roweru mają początkową prędkość kątową ω_p . W pewnej chwili chłopiec zaczyna hamować i zatrzymuje się po upływie czasu t . Wyznamy prędkość kątową kół w chwili będącej połową czasu hamowania oraz liczbę obrotów, jakie wykonają one do tego momentu (Rys. 3.).



Rys. 3. Schemat sytuacji opisanej w przykładzie 1.

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Rozwiązanie:

Wyznaczenie obu szukanych parametrów wymaga określenia wartości przyspieszenia kąowego, z jakim poruszają się koła roweru. Wykorzystajmy definicję przyspieszenia kąowego:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_k - \omega_p}{t_k - t_p}.$$

W analizowanym przykładzie pozwala ona na wyznaczenie przyspieszenia kąowego kół

$$\varepsilon = \frac{0 - \omega_p}{t} = -\frac{\omega_p}{t}.$$

Wykorzystując znajomość wartości przyspieszenia kąowego możemy wyznaczyć zmianę prędkości kąowej kół, do jakiej dojdzie w czasie $\frac{1}{2}t$

$$\Delta\omega = \varepsilon \frac{1}{2}t = -\frac{\omega_p}{t} \cdot \frac{1}{2}t = -\frac{\omega_p}{2}.$$

Określmy zatem pierwszy z szukanych parametrów, jakim jest prędkość kąowa po upływie czasu $\frac{1}{2}t$

$$\omega\left(\frac{1}{2}t\right) = \omega_p + \Delta\omega = \omega_p - \frac{\omega_p}{2} = \frac{\omega_p}{2}.$$

Wyznaczenie liczby obrotów, jakie wykonają koła roweru, wymaga obliczenia kąta, jaki zakreślą w zadanym czasie. Zauważmy, że wartość przyspieszenia kąowego w analizowanym przypadku jest stała, $\varepsilon = \text{const}$. Wykorzystamy w tym celu wzór

$$\alpha(t) = \frac{\omega_p + \omega_k}{2} t,$$

który przekształcimy zgodnie z warunkami analizowanego przykładu do postaci

$$\alpha\left(\frac{1}{2}t\right) = \frac{\omega_p + \omega_{\frac{1}{2}t}}{2} \cdot \frac{1}{2}t = \frac{\omega_p + \frac{\omega_p}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}t = \frac{3\omega_p}{8} \cdot t.$$

Zwróćmy uwagę, że powyższy wynik nie jest odpowiedzią, której poszukujemy. Jest to wartość przesunięcia kąowego. Wyznaczenie liczby obrotów każdego z kół rowerowych wymaga podzielenia otrzymanego wyniku przez kąt odpowiadający pełnemu obrotowi

$$n = \frac{\alpha\left(\frac{1}{2}t\right)}{2\pi} = \frac{3\omega_p t}{16\pi}.$$

Zapamiętajmy, że zaprezentowany tok rozumowania zakłada, że ruch niejednostajny po okręgu odbywa się ze stałym przyspieszeniem kąowym.

Słowniczek

Zmiana położenia kąowego

(ang. *change of angular position*) - kąt, jaki zakreśla punkt umieszczony na okręgu w trakcie ruchu.

Prędkość kąowa

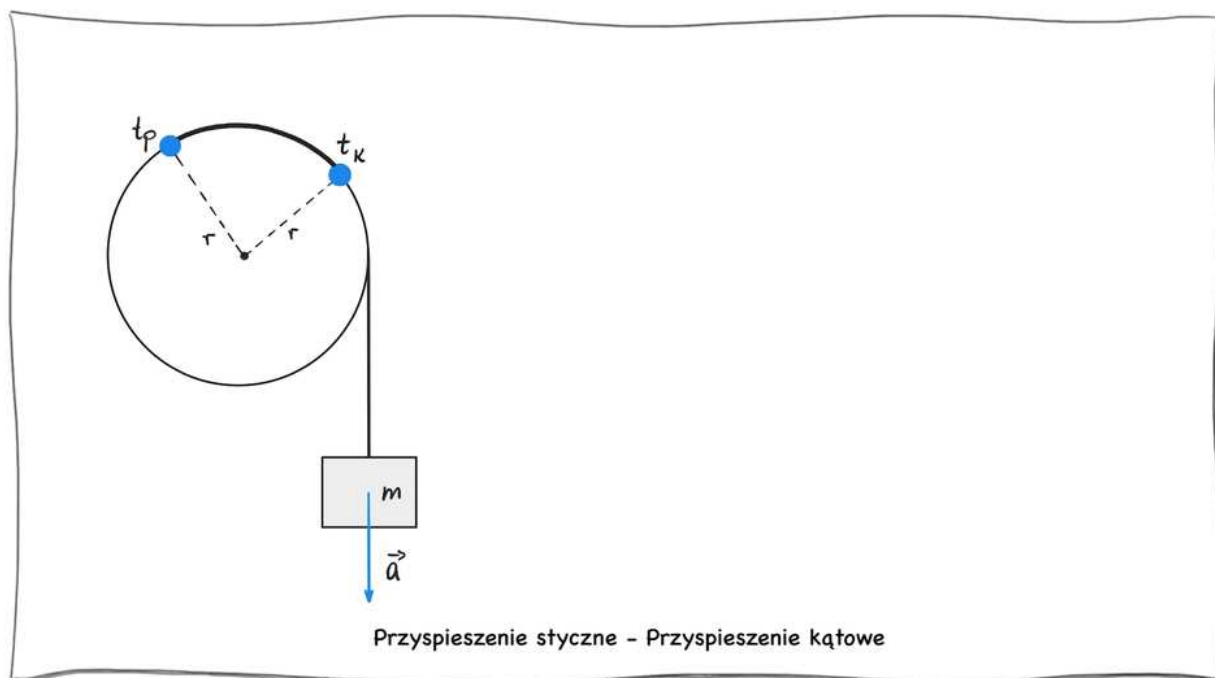
(ang. *angular velocity*) – wielkość fizyczna określająca zmianę kąta w funkcji czasu. Jednostką prędkości kątowej jest radian podzielony przez sekundę (rad/s).

Przyspieszenie kątowe

(ang. *angular acceleration*) – wielkość określająca zmianę prędkości kątowej w czasie. Jednostką przyspieszenia kątowego jest radian podzielony przez sekundę w kwadracie (rad/s²).

Film samouczek

Jak opisać ruch niejednostajny po okręgu?



Film dostępny pod adresem </preview/resource/RFwU2JymjS7DD>

Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Wysłuchaj alternatywnej ścieżki lektorskiej.

Polecenie 1

Czy związek wyprowadzony w filmie pozostanie bez zmiany, jeśli ruch będzie ruchem opóźnionym?



Nie



Tak

Polecenie 2

Czy przyspieszenie styczne zawsze rośnie wraz ze wzrostem wartości przyspieszenia kątownego? Odpowiedź uzasadnij.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



W ruchu niejednostajnym po okręgu zmiana położenia kąowego może być wyrażona jako iloczyn:

- ☐ Wartości średniej prędkości kąowej i czasu, w jakim dochodzi do jej zmiany.
- ☐ Różnicy prędkości kąowych końcowej i początkowej, oraz czasu w jakim prędkość ta, ulegała zmianie.
- ☐ Przyspieszenia kąowego oraz czasu, w jakim odbywa się ruch.

Ćwiczenie 2



Podaj wzór na przyspieszenie styczne.

= ·

Ćwiczenie 3



Wyznacz kąt, jaki zakreśli punkt znajdujący na obwodzie obracającej się tarczy. Tarcza początkowo ma prędkość kątową $\omega_p = 0,5 \text{ rad/s}$, która wzrasta w czasie $t = 3 \text{ s}$ do wartości $\omega_k = 2 \text{ rad/s}$.

Odp.: rad

Ćwiczenie 4



Wyznacz wartość prędkości kąowej koła rowerowego po upływie czterech sekund od chwili, gdy miało prędkość kąową równą 4 rad/s . Koło zwalniało jednostajnie z przyspieszeniem kąowym $\varepsilon = 0,75 \text{ rad/s}^2$.

Odp.: rad/s

Ćwiczenie 5



Określ liczbę obrotów, jakie wykona w ciągu $t = 10$ s koło startującego samochodu wyścigowego. Wiadomo, że po upływie rozpatrywanego czasu od startu obraca się ono z prędkością kątową $\omega_k = 30\pi$ rad/s.

☐ 60

☐ 75

☐ 125

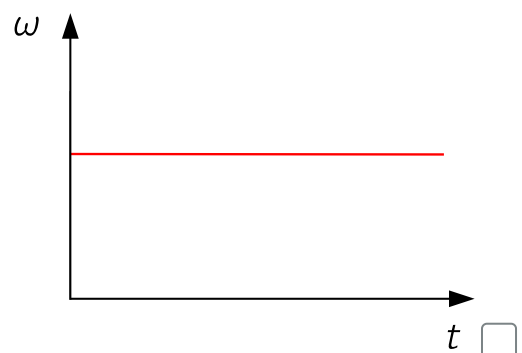
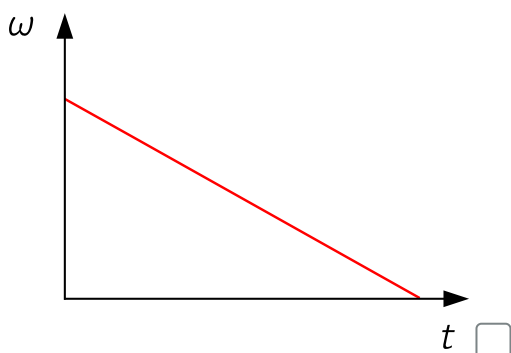
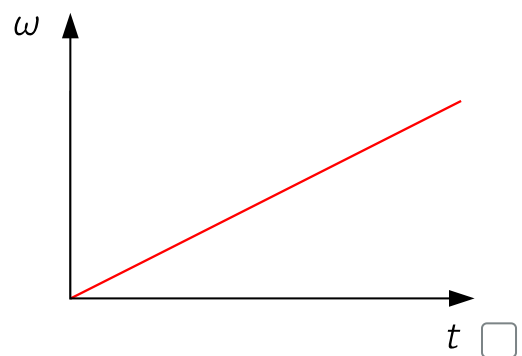
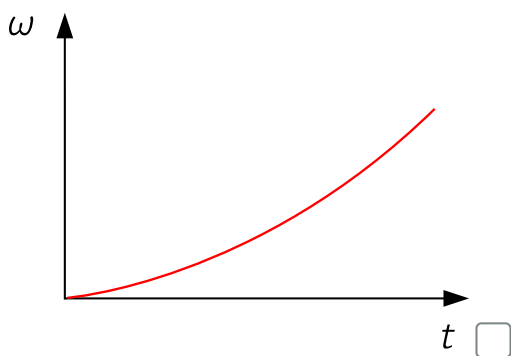
☐ 15

☐ 30

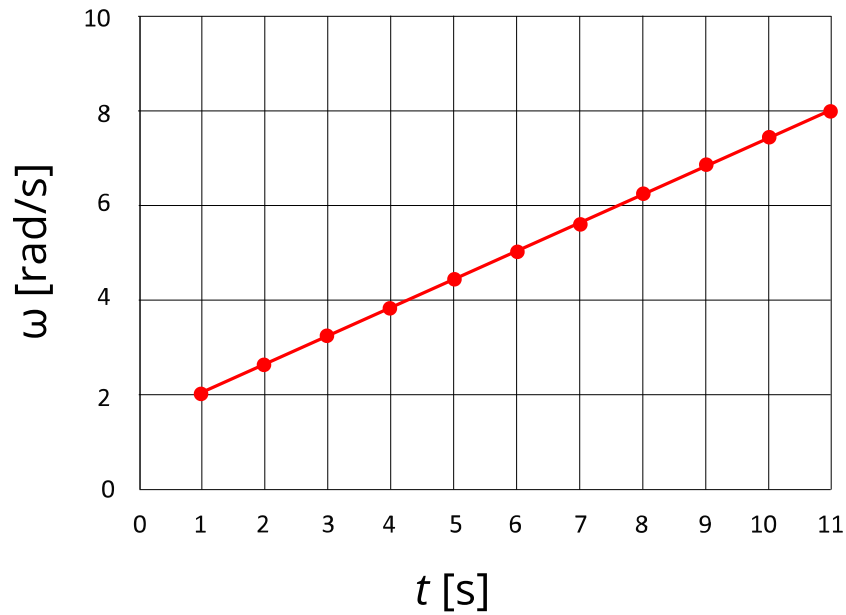
Ćwiczenie 6



Wybierz wykres opisujący zależność prędkości kątowej od czasu w ruchu niejednostajnym po okręgu.



Ćwiczenie 7



Źródło: Politechnika Warszawska, Wydział Fizyki, licencja: CC BY 4.0.

Korzystając z danych zawartych na wykresie, wyznacz wartość przyspieszenia kąowego, z jakim porusza się ciało.

Odp.: rad/s²

Ćwiczenie 8



Wyznacz przyspieszenie kąowe kółka deskorolki, na której porusza się chłopiec. W chwili początkowej kółko wykonywało $n_p = 6$ obrotów/s. Po upływie czasu $t = 8$ s prędkość obrotu wzrosła i wynosiła $n_k = 14$ obrotów/s. Wynik podaj z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.

Odp.: rad/s²

Dla nauczyciela

Imię i nazwisko autora:	Bartłomiej Klus
Przedmiot:	Fizyka
Temat zajęć:	Jak opisać ruch niejednostajny po okręgu?
Grupa docelowa:	II etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony
Podstawa programowa:	Cele kształcenia – wymagania ogólne II. Rozwiązywanie problemów z wykorzystaniem praw i zależności fizycznych. Zakres rozszerzony Treści nauczania – wymagania szczegółowe I. Wymagania przekrojowe. Uczeń: 4) przeprowadza obliczenia liczbowe posługując się kalkulatorem; 7) wyodrębnia z tekstów, tabel, diagramów lub wykresów, rysunków schematycznych lub blokowych informacje kluczowe dla opisywanego zjawiska bądź problemu; przedstawia te informacje w różnych postaciach. II. Mechanika. Uczeń: 11) opisuje ruch niejednostajny po okręgu.
Kształtowane kompetencje kluczowe:	Zalecenia Parlamentu Europejskiego i Rady UE z 2018 r.: • kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji, • kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii, • kompetencje cyfrowe, • kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:	Uczeń: 1. wyprowadza relacje wiążące parametry liniowe i kątowe, w ruchu niejednostajnym po okręgu; 2. wyznacza wartości przemieszczenia kątowego w ruchu niejednostajnym po okręgu, 3. oblicza wartość końcowej prędkości kątowej w ruchu niejednostajnym po okręgu.
Strategie nauczania:	Strategia Kształcenia Wyprzedzającego
Metody nauczania:	dyskusja i wykład informacyjny
Formy zajęć:	praca w grupach, praca indywidualna
Środki dydaktyczne:	film samouczek obrazujący ruch niejednostajny po okręgu, i sposób jego opisu, zestaw zadań
Materiały pomocnicze:	e-materiał: „Jak opisać ruch niejednostajny po okręgu?”
PRZEBIEG LEKCJI	
Faza wprowadzająca:	
Uczniowie w grupie zapoznają się z treścią e-materiału. Uczniowie w grupie dyskutują nad znanymi im parametrami ruchu, które mogą zostać wykorzystane do jego opisu. Uczniowie zapoznają się z filmem samouczkiem prezentującym ruch niejednostajny po okręgu oraz sposób jego opisu.	
Faza realizacyjna:	
Nauczyciel na tablicy wyprowadza związek pomiędzy liniowymi i kątowymi parametrami ruchu, dla ruchu niejednostajnego po okręgu ze stałym przyspieszeniem stycznym. Nauczyciel przedstawia uczniom przykłady ruchu niejednostajnego po okręgu, natomiast uczniowie - w formie burzy mózgów - starają się podać inne sytuacje, które można opisać w ten sposób. Uczniowie na tablicy rozwiązują zadania 5, 7 i 8 z zestawu ćwiczeń. Na podstawie zadania 5 zapoznają się z różnymi formami przedstawienia ruchu niejednostajnego po okręgu na wykresie. W zadaniach 7 i 8 uczniowie zapoznają się z rachunkami, związanymi z rozwiązaniem konkretnego zagadnienia, w ramach ruchu niejednostajnego po okręgu.	
Faza podsumowująca:	
Uczniowie odnoszą się do postawionych sobie celów lekcji, ustalają które osiągnęli a które wymagają jeszcze pracy, jakiej i kiedy. W razie potrzeby nauczyciel dostarcza im informację zwrotną kształtującą.	
Praca domowa:	

Uczniowie utrwalają wiedzę i poszerzają rozumienie czytając tekst e-materiału oraz ponownie oglądając film samouczek. Uczniowie rozwiązują samodzielnie zadania 1-4 zamieszczone w zestawie zadań dołączonych do e-materiału.

**Wskazówki
metodyczne
opisujące różne
zastosowania danego
multimedium**

Multimedium bazowe może być wykorzystane przez uczniów przed lekcją i stanowić podstawę do dyskusji na lekcji na temat ruchu niejednostajnego po okręgu oraz sposobów jego opisu.