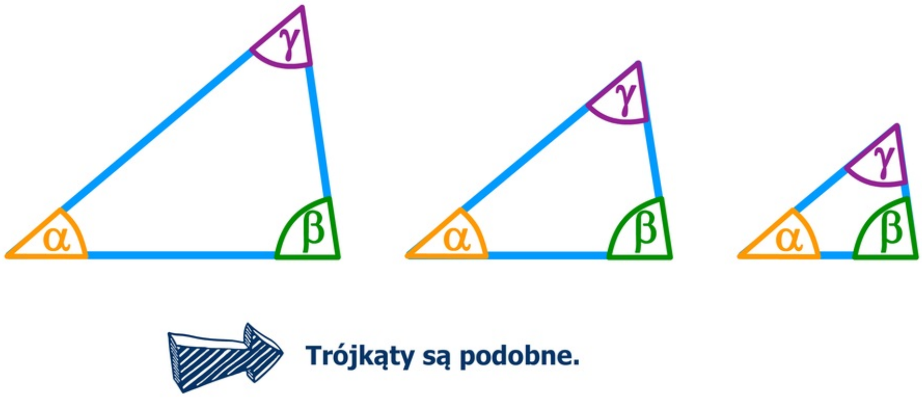
Wprowadzenie do trygonometrii

Trójkąty podobne. Przekątna kwadratu. Trójkąt prostokątny o kątach 30, 60, 90 stopni. Animacje: trójkąty podobne, trójkąty prostokątne podobne.

Wprowadzenie do trygonometrii

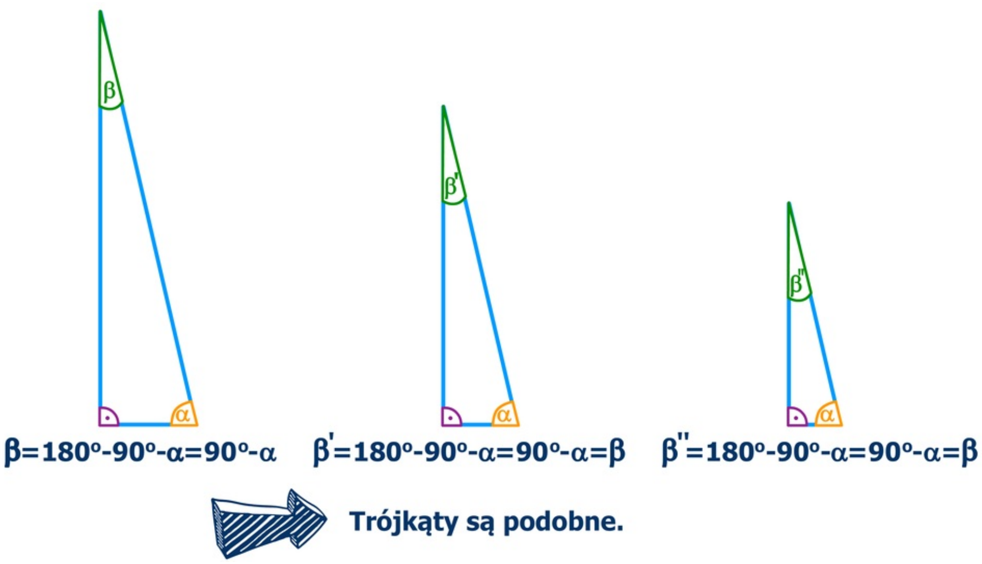
Przypomnijmy, że trójkąty są podobne, jeśli wszystkie ich odpowiednie kąty są równe (cecha kąt-kąt-kąt).



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje trzy różnych wymiarów zdjęcia tej samej budowli w kształcie trójkątna ostrokątnego. Na zdjęciu największym zaznaczono kąty alfa, beta i gamma. Porównując, w dwóch etapach (zdjęcie największe i średnie a potem największe i najmniejsze) odpowiednie kąty tych budowli, zauważamy że odpowiednie kąty w tych trójkątach są tej samej miary, a więc trójkąty są podobne.

Korzystając z cechy podobieństwa kąt-kąt-kąt, możemy sprawdzić, czy dwa trójkąty prostokątne są podobne, gdy w każdym z nich znamy miarę jednego z kątów ostrych.



Film dostępny na portalu epodreczniki.pl

Animacja pokazuje trzy różnych wymiarów zdjęcia żaglówki, na których narysowano trójkąty prostokątne o kątach 90 stopni i alfa. W pierwszym trójkącie brakujący kąt beta równy 90 stopni minus alfa. W drugim trójkącie kąt beta prim równy 90 stopni minus alfa równy beta. W trzecim trójkącie kąt beta bis równy 90 stopni minus alfa równy beta, więc trójkąty są podobne.

Przykład 1

W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku C jest prosty, a miara kąta ABC jest równa $35°$.
W trójkącie prostokątnym KLM kąt przy wierzchołku K jest prosty, a miara kąta KLM jest równa $55°$.
A zatem

$$|\measuredangle ACB| = |\measuredangle LKM| = 90°,\ |\measuredangle ABC| = |\measuredangle KML| = 35°,\ |\measuredangle BAC| = |\measuredangle KLM| = 55°.$$

Trójkąty ABC i KLM są więc podobne, co stwierdzamy, powołując się na cechę podobieństwa kąt-kąt-kąt.

W trójkątach podobnych pary odpowiednich boków są proporcjonalne – boki trójkątów ABC i KLM spełniają więc zależność

$$\frac{|AB|}{|LM|} = \frac{|BC|}{|KM|} = \frac{|AC|}{|KL|}.$$

Wynika z tego, że każdy stosunek długości dwóch boków w trójkącie ABC jest równy stosunkowi długości odpowiednich boków w trójkącie KLM, np.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|LM|}{|KM|},\ \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|KL|}{|KM|},\ \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|KL|}{|LM|}.$$

Przykład 2

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC, którego przyprostokątne AC i BC są równe 1.
Ponieważ trójkąt ten jest równoramienny, to miary jego kątów ostrych ABC i CAB są równe $45°$.
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość przeciwprostokątnej AB tego trójkąta.

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

$$|AB|^2 = 1^2 + 1^2.$$

Ponieważ $|AB| > 0$, stąd

$$|AB| = \sqrt{2}.$$

Wówczas $\frac{|AC|}{|BC|} = 1$, $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, czyli $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a także $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Każdy równoramienny trójkąt prostokątny jest podobny do trójkąta ABC, co stwierdzamy na mocy cechy podobieństwa kąt-kąt-kąt. Zatem w każdym trójkącie prostokątnym, którego jeden z kątów ostrych jest równy $45°$, stosunek dowolnie wybranej przyprostokątnej do przeciwprostokątnej jest równy $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Przykład 3

Pokażemy, że trójkąt prostokątny, w którym stosunek jednej z przyprostokątnych do przeciwprostokątnej jest równy $\frac{\sqrt{2}}{2}$, jest trójkątem, w którym oba kąty ostre są równe $45°$.
Oznaczając długość przeciwprostokątnej tego trójkąta przez x, gdzie $x > 0$, zauważmy, że jedna z jego przyprostokątnych ma długość $\frac{\sqrt{2}}{2}x$, a zatem (na podstawie twierdzenia Pitagorasa) druga

przyprostokątna ma długość $\sqrt{x^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$. Wobec tego dany trójkąt prostokątny jest równoramienny, więc każdy z jego kątów ostrych ma miarę $45°$.

Przykład 4

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC, którego przyprostokątna AC jest równa 1, a przeciwprostokątna AB jest równa 2. Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy $|BC| = \sqrt{3}$.

Na prostej AC wybierzmy teraz punkt D symetryczny do punktu A względem punktu C. Wtedy

$$|AD| = 2, \ |DB| = |AB|,$$

bo odcinki AB i DB są symetryczne względem prostej BC. Wobec tego trójkąt ABD jest równoboczny, a BC to jego wysokość poprowadzona do boku AD.

Wynika z tego, że w trójkącie ABC kąt ostry leżący naprzeciwko przyprostokątnej AC ma miarę $30°$, a kąt ostry leżący naprzeciwko przyprostokątnej BC ma miarę $60°$.

Przykład 5

Rozpatrzmy trójkąt prostokątny ABC, którego przyprostokątna BC jest równa 9, a przeciwprostokątna AB jest równa 15.
Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy $|AC| = 12$.

Wybierzmy na półprostej CB takie punkty D i E, że $|CD| = 12$ i $|CE| = 4\sqrt{3}$.

Wtedy:

- w trójkącie ACD jest $|AC| = |CD|$, więc kąt DAC ma miarę $45°$.
- w trójkącie ACE jest $\frac{|CE|}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a zatem kąt EAC ma miarę $30°$.

Zatem kąt ostry BAC w trójkącie ABC ma miarę większą niż $30°$ i mniejszą niż $45°$.
Za pomocą kątomierza, można zmierzyć na rysunku, że kąt ten ma miarę około $39°$.

Przykład 6

Każdy trójkąt prostokątny, którego kąty ostre mają miary $30°$, $60°$ jest podobny do trójkąta ABC, opisanego w poprzednim przykładzie. Wobec tego w każdym takim trójkącie prostokątnym:

- stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta $30°$ do przeciwprostokątnej jest równy $\frac{1}{2}$,
- stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie $30°$ do przeciwprostokątnej jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta $30°$ do drugiej przyprostokątnej jest równy $\frac{1}{\sqrt{3}}$, czyli $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Wynika z tego również, że:

- w każdym trójkącie prostokątnym, w którym jedna z przyprostokątnych jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej, kąt ostry leżący naprzeciw tej przyprostokątnej jest równy $30°$,
- w każdym trójkącie prostokątnym, w którym stosunek długości jednej z przyprostokątnych do długości przeciwprostokątnej jest równy $\frac{\sqrt{3}}{2}$, kąt ostry leżący naprzeciw tej przyprostokątnej jest równy $60°$,
- w każdym trójkącie prostokątnym, w którym stosunek długości jednej z przyprostokątnych do długości drugiej przyprostokątnej jest równy $\sqrt{3}$, kąt ostry leżący naprzeciw krótszej przyprostokątnej jest równy $30°$.

Przetwarzam wzory matematyczne: 100%