



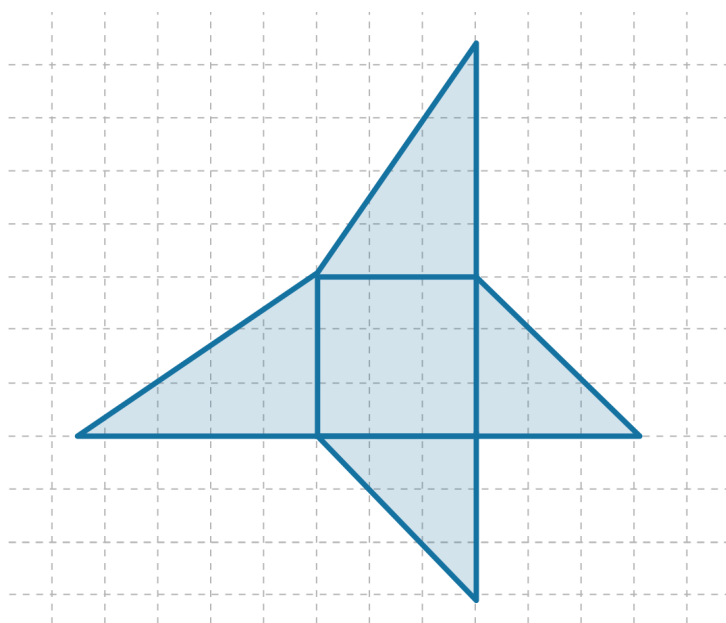
Objętość ostrosłupa

# Objętość ostrosłupa

## Wzór na objętość ostrosłupa

### Przykład 1

Rysunek przedstawia siatkę ostrosłupa.



Źródło: GroMar, licencja: CC BY 3.0.

Korzystając z tej siatki, wykonaj modele trzech jednakowych ostrosłupów. Zbuduj z nich sześcian.

Ile razy objętość tego sześcianu jest większa od objętości każdego z ostrosłupów?

### Ważne!

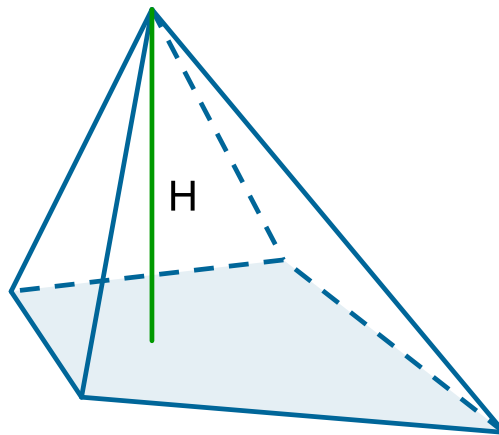
Objętość ostrosłupa jest równa trzeciej części iloczynu pola podstawy przez wysokość.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$V$  - objętość

$P_p$  - pole podstawy

$H$  - wysokość



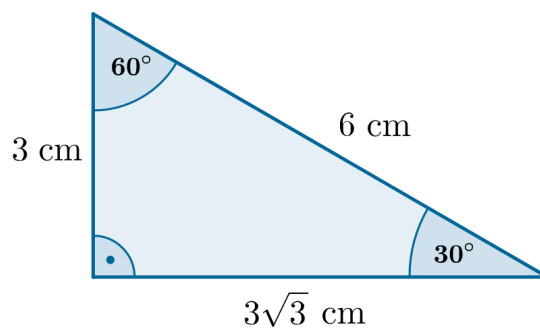
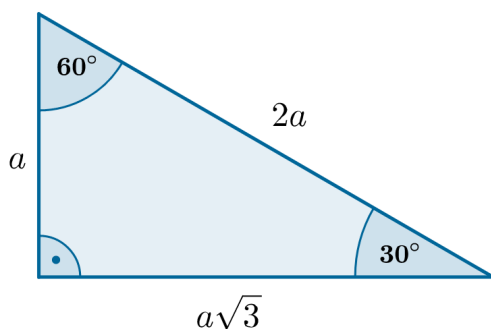
Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Obliczanie objętości ostrosłupa

### Przykład 2

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 6 cm, a miara jednego z kątów ostrych jest równa  $30^\circ$ . Wysokość ostrosłupa jest czterokrotnością krótszej przyprostokątnej podstawy. Obliczmy objętość ostrosłupa.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, w którym miara jednego z kątów ostrych jest równa  $30^\circ$ . O takim trójkącie wiemy, że przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta  $30^\circ$  jest dwukrotnie krótsza od przeciwprostokątnej, a druga przyprostokątna jest  $\sqrt{3}$  razy od niej większa.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Zatem przyprostokątne trójkąta, będącego podstawą ostrosłupa, są równe 3 cm i  $3\sqrt{3}$  cm. Obliczamy pole podstawy ostrosłupa.

$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3}$$

$$P_p = 4,5\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Wysokość ostrosłupa jest równa czterokrotności krótszej przyprostokątnej podstawy, ma zatem długość

$$4 \cdot 3 \text{ cm} = 12 \text{ cm}.$$

Obliczamy objętość ostrosłupa.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4,5\sqrt{3} \cdot 12$$

$$V = 18\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

**Odpowiedź:**

Objętość ostrosłupa jest równa  $18\sqrt{3} \text{ cm}^3$ .

Znając objętość ostrosłupa i pole jego podstawy, można obliczyć jego wysokość.

### Przykład 3

Wazon ma kształt ostrosłupa, którego podstawą jest prostokąt o polu  $150 \text{ cm}^2$ .

W wazonie mieści się litr wody. Obliczymy jaką wysokość ma ten wazon.

Zapisujemy pojemność wazonu w  $\text{cm}^3$ .

$$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3.$$

Korzystamy ze wzoru na objętość ostrosłupa i obliczamy jego wysokość.

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$$

$$1000 = \frac{1}{3} \cdot 150 \cdot H$$

$$H = \frac{3000}{150}$$

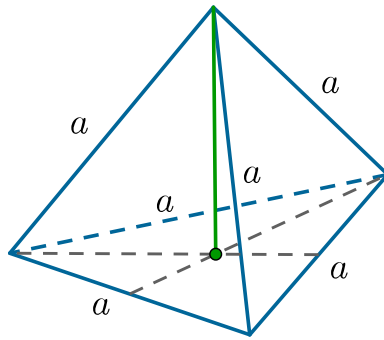
$$H = 20 \text{ cm}.$$

**Odpowiedź:**

Wysokość wazonu ma 20 cm.

## Objętość czworościanu foremnego

Obliczymy objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości  $a$ .

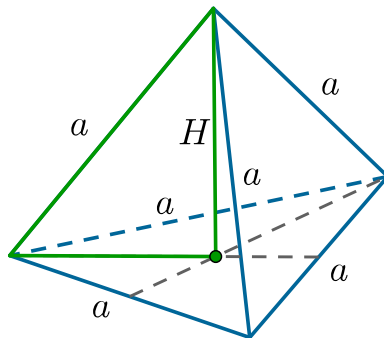


Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoboczny. Zatem pole podstawy jest równe

$$P_p = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Obliczmy teraz wysokość ostrosłupa jako przyprostokątną trójkąta prostokątnego, w którym przeciwprostokątna jest krawędzią czworościanu, a druga przyprostokątna to  $\frac{2}{3}$  wysokości podstawy (czyli wysokości trójkąta równobocznego).



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

$$H^2 + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \right)^2 = a^2$$

$$H^2 + \frac{1}{3}a^2 = a^2$$

$$H^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$$H = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Obliczamy objętość czworościanu.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$V = \frac{\sqrt{18}}{36}a^3$$

$$V = \frac{3\sqrt{2}}{36}a^3$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

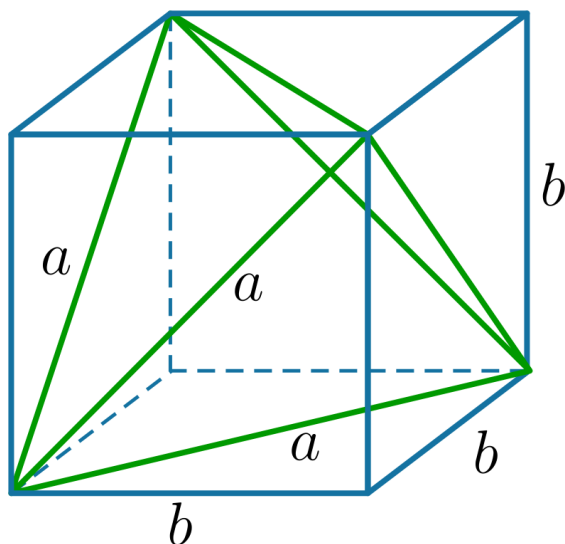
**Ważne!**

Objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości  $a$  jest równa

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

Przyjmijmy, że długość krawędzi sześcianu jest równa  $b$ , zaś  $a$  to długość krawędzi czworościanu.

Oprócz czworościanu foremego w sześcianie można umieścić cztery inne jednakowe czworościany.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Objętość każdego z nich jest równa

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{6} b^3.$$

Zatem objętość czworościanu foremnego jest równa

$$V = b^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} b^3 = b^3 - \frac{4}{6} b^3 = \frac{2}{6} b^3 = \frac{1}{3} b^3.$$

Ponieważ  $a$  jest przekątną kwadratu o boku  $b$ , zatem  $a = b\sqrt{2}$ .

Stąd:



$$b = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}b^3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{8} \cdot 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

#### Przykład 4

Ustalimy, czy 15 dm<sup>2</sup> kartonu wystarczy, aby wykonać pudełko w kształcie czworościanu foremnego o objętości  $\frac{9}{4}\sqrt{2}$  dm<sup>3</sup>.

Aby to ustalić, musimy znaleźć pole powierzchni czworościanu.

Znając objętość czworościanu, obliczymy najpierw długość  $a$  jego krawędzi.

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$\frac{9}{4}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$a^3 = \frac{9}{4}\sqrt{2} : \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$a^3 = \frac{9\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}$$

$$a^3 = 27$$

$$a = \sqrt[3]{27}$$

$$a = 3 \text{ dm.}$$

Obliczamy pole powierzchni czworościanu.

$$P = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$P = \sqrt{3} \cdot 3^2$$

$$P = 9\sqrt{3}$$

$$P = 9\sqrt{3} = 15,5884 \dots$$

$$P = 15,5884 \text{ dm}^2.$$

Odpowiedź:

Ponieważ  $15,5884 \dots > 15$ , zatem  $15 \text{ dm}^2$  kartonu nie wystarczy na wykonanie pudełka.

## Ćwiczenie 1



Oblicz objętość ostrosłupa, którego pole podstawy jest równe  $P_p$ , a wysokość jest równa  $H$ . Kliknij w lukę, aby wyświetlić listę rozwijalną i wybierz poprawną odpowiedź.

**Odpowiedź:** Objętość tego ostrosłupa wyraża się wzorem .

$V = \frac{3 \cdot P_p}{H}$

$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H$

$V = \frac{3 \cdot H}{P_p}$

$V = 3 \cdot P_p \cdot H$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 2



Wysokość ostrosłupa prawidłowego jest równa 12, a krawędź jego podstawy ma długość 2. Oblicz objętość poniższych ostrosłupów o różnych podstawach. Uzupełnij lukę w odpowiedzi. Kliknij w nią, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz poprawną liczbę.

1. Podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt.

**Odpowiedź:** Objętość tego ostrosłupa wynosi .

2. Podstawą tego ostrosłupa jest czworokąt.

**Odpowiedź:** Objętość tego ostrosłupa wynosi .

3. Podstawą tego ostrosłupa jest sześciokąt.

**Odpowiedź:** Objętość tego ostrosłupa wynosi .

$\sqrt{3}$  $4$  $24$  $16\sqrt{2}$  $\sqrt{26}$  $4\sqrt{2}$  $2\sqrt{2}$  $4\sqrt{3}$  $17\sqrt{3}$  $16$  $8\sqrt{3}$

$24\sqrt{3}$  $6\sqrt{2}$  $\sqrt{10}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 3



Pole podstawy ostrosłupa jest równe  $P_p$ , a jego objętość  $V$ . Oblicz wysokość tego ostrosłupa.

Uzupełnij lukę w odpowiedzi. Kliknij w nią, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz poprawną liczbę.

**Odpowiedź:** Wysokość tego ostrosłupa wyraża się wzorem

$H = \frac{3 \cdot P_p}{V}$

$H = \frac{3 \cdot V}{P_p}$

$H = \frac{P_p}{3 \cdot V}$

$H = \frac{V}{3 \cdot P_p}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 4



Wysokość ostrosłupa jest równa 18 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa w podanych przypadkach, a następnie wpisz odpowiednie liczby tak, aby odpowiedzi były poprawne.

1. Podstawą tego ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 4 cm i 10 cm.

**Odpowiedź:** Objętość tego ostrosłupa wynosi  $V =$    $\text{cm}^3$ .

2. Podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny, w którym suma długości przyprostokątnych jest równa  $2\sqrt{5}$  cm.

**Odpowiedź:** Objętość tego ostrosłupa wynosi  $V =$    $\text{cm}^3$ .

3. Podstawą tego ostrosłupa jest romb o przekątnych długości 7 cm i 8 cm.

**Odpowiedź:** Objętość tego ostrosłupa wynosi  $V =$    $\text{cm}^3$ .

4. Podstawą tego ostrosłupa jest równoległobok, w którym jeden z boków ma długość 6 cm, a wysokość poprowadzona do tego boku jest równa 4 cm.

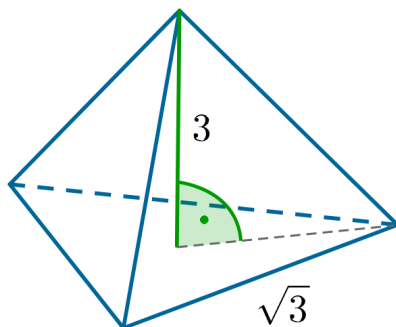
**Odpowiedź:** Objętość tego ostrosłupa wynosi  $V =$    $\text{cm}^3$ .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 5



Wyznacz objętość ostrosłupa prawidłowego przedstawionego na rysunku.



Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

Wskaż odpowiedź zawierającą prawidłowe rozwiązanie.

☐  $27\sqrt{3}$

☐  $0,75\sqrt{3}$

☐  $2,25\sqrt{3}$

☐ 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 6



Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach długości 6 mm i 8 mm. Objętość ostrosłupa wynosi  $80 \text{ mm}^3$ . Ile wynosi długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 3,5 mm

☐  $5\sqrt{2}$  mm

☐ 4 mm

☐  $3\sqrt{3}$  mm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 7



Objętość ostrosłupa jest dwukrotnie większa od objętości graniastosłupa o takiej samej podstawie. Ile wynosi stosunek wysokości graniastosłupa do wysokości ostrosłupa. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 1 : 6

☐ 2 : 1

☐ 1 : 3

☐ 2 : 3

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 8



Oblicz objętość czworościanu foremnego w podanych przypadkach.

Uzupełnij lukę w odpowiedzi. Kliknij w nią, aby rozwinąć listę, a następnie wybierz poprawną liczbę.

1. Krawędź tego czworościanu ma długość 2.

**Odpowiedź:** Objętość czworościanu wynosi .

2. Wysokość ściany bocznej tego czworościanu jest równa 3.

**Odpowiedź:** Objętość czworościanu wynosi .

3. Pole ściany bocznej tego czworościanu jest równe  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**Odpowiedź:** Objętość czworościanu wynosi .

4. Pole powierzchni tego czworościanu jest równe  $81\sqrt{3}$ .

**Odpowiedź:** Objętość czworościanu wynosi .

|                         |               |                       |                          |                       |                |                          |               |                       |                |                       |
|-------------------------|---------------|-----------------------|--------------------------|-----------------------|----------------|--------------------------|---------------|-----------------------|----------------|-----------------------|
| $\frac{3\sqrt{2}}{2}$   | $3\sqrt{3}$   | $\frac{7\sqrt{3}}{4}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{9}$    | $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ | 112            | $\sqrt{10}$              | $103\sqrt{3}$ | $\sqrt{14}$           | $2\frac{1}{2}$ | $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ |
| $\frac{320\sqrt{2}}{3}$ | $1,5\sqrt{3}$ | $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{729}{12}\sqrt{2}$ | $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | $1\frac{2}{3}$ | $\frac{421}{48}\sqrt{3}$ | $2\sqrt{6}$   | $\frac{\sqrt{2}}{12}$ |                |                       |

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 9



Wysokość ostrosłupa jest równa  $H$ . Podstawą ostrosłupa jest trapez równoramienny o podstawach długości  $3H$  oraz  $H$ . Obwód podstawy jest równy  $2H(2 + \sqrt{2})$ .

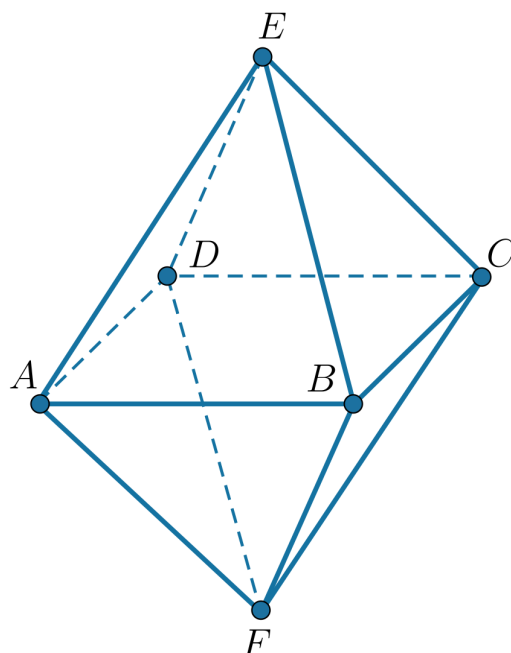
Wykaż, że objętość tego ostrosłupa jest mniejsza od  $H^3$ .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 10



Dwa jednakowe ostrosłupy prawidłowe czworokątne o krawędzi podstawy długości 5 cm połączono podstawami tak jak na poniższym rysunku.



Źródło: GroMar, licencja: CC BY 3.0.

Odległość między wierzchołkami  $E$  i  $F$  ostrosłupów wynosi 40 cm. Ile wynosi objętość otrzymanej bryły? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 352 cm<sup>3</sup>

☐  $\frac{1000}{3}$  cm<sup>3</sup>

☐ 500 cm<sup>3</sup>

☐  $\frac{881}{3}$  cm<sup>2</sup>

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.



### Ćwiczenie 11



Oblicz wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o objętości  $125 \text{ cm}^3$  i krawędzi podstawy długości  $5 \text{ cm}$ .

Uzupełnij lukę w odpowiedzi, wpisując odpowiednią liczbę.

**Odpowiedź:** Wysokość ostrosłupa wynosi  cm.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 12



Oblicz pole podstawy ostrosłupa ośmiokątnego o wysokości  $10 \text{ cm}$ , którego objętość jest równa  $169 \text{ cm}^3$ .

Uzupełnij lukę w odpowiedzi, wpisując odpowiednią liczbę.

**Odpowiedź:** Pole podstawy jest równe   $\text{cm}^2$ .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 13



Jaką długość ma krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego o wysokości  $36 \text{ cm}$  i objętości  $3\sqrt{3} \text{ cm}^3$ ? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $0,36 \text{ cm}$

☐  $5\frac{2}{3} \text{ cm}$

☐  $1 \text{ cm}$

☐  $7,2 \text{ cm}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 14



Graniastosłup i ostrosłup mają takie same podstawy. Objętość graniastosłupa jest dwa razy większa od objętości ostrosłupa. Wysokość graniastosłupa jest równa 8 cm. Jaką długość ma wysokość ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 18 cm

☐ 3 cm

☐ 14 cm

☐ 12 cm

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 15



Suma długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego wynosi 18 cm. Oblicz objętość tego czworościanu.

Uzupełnij lukę w odpowiedzi, wpisując odpowiednią liczbę.

**Odpowiedź:** Objętość czworościanu wynosi .

☐  $3\sqrt{5}$

☐  $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

☐  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

☐  $2\sqrt{3}$

☐  $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 16



Suma długości krawędzi bocznej oraz krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wynosi 8 cm. Długości tych krawędzi są w stosunku 3 : 1. Ile wynosi objętość tego ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $3\frac{1}{2}\sqrt{2}$

☐  $8\sqrt{6}$

☐  $3\sqrt{5}$

☐  $\frac{3}{5}\sqrt{2}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 17



Ostrosłup prawidłowy sześciokątny ma wysokość 1 cm oraz objętość  $8\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $3\frac{1}{3}$

☐  $\sqrt{17}$

☐  $3\sqrt{5}$

☐  $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 18



Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest 4 razy mniejsze od jego powierzchni bocznej. Krawędź podstawy ma długość 6 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Uzupełnij lukę w odpowiedzi, wpisując odpowiednią liczbę.

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi  cm<sup>3</sup>.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

### Ćwiczenie 19



Prostopadłościan ma wymiary 6, 6 i 8. Krawędzie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, który nie jest czworościanem foremnym, mają długości równe długościom przekątnych ścian prostopadłościanu.

Oblicz objętość ostrosłupa. Ile różnych rozwiązań ma to zadanie?

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 20



Ile wynosi objętość ośmiościanu foremnego, którego każda krawędź ma długość 5 cm? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $34\sqrt{5} \text{ cm}^3$

☐  $\frac{231}{2}\sqrt{3} \text{ cm}^3$

☐  $42\frac{2}{3} \text{ cm}^3$

☐  $\frac{125\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 21



W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 8 cm a krawędź boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $30^\circ$ . Ile wynosi objętość tego ostrosłupa? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐  $9\sqrt{6} \text{ cm}^3$

☐  $\frac{19\sqrt{5}}{3} \text{ cm}^3$

☐  $\frac{256\sqrt{6}}{9} \text{ cm}^3$

☐  $\frac{24}{5}\sqrt{3} \text{ cm}^3$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 22



W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej ma długość 20 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem  $30^\circ$ . Oblicz objętość tego ostrosłupa. Uzupełnij lukę w odpowiedzi, wpisując odpowiednią liczbę.

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi   $\text{cm}^3$ .

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

## Ćwiczenie 23



Dwa pojemniki, jeden w kształcie prostopadłościanu o wymiarach: 4 m i 4 m i 5 m, drugi w kształcie ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości 9 m i krawędzi podstawy 6 m należy napełnić gazem.

W którym pojemniku będzie więcej gazu?

Sprawdź, czy do napełnienia obu pojemników wystarczy  $200 \text{ m}^3$  gazu.

Odpowiedzi uzasadnij.

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.

# Ćwiczenie 24

Uzupełnij komórki tabeli, wpisując odpowiednie wartości.



| Ostrosłup prawidłowy $n$ -kątny        | $n = 3$      | $n = 4$     | $n = 6$                   |
|----------------------------------------|--------------|-------------|---------------------------|
| Pole powierzchni bocznej ostrosłupa    | <div></div>  | 20          | $48\sqrt{6}$              |
| Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa | <div></div>  | <div></div> | $48\sqrt{6} + 24\sqrt{3}$ |
| Pole podstawy ostrosłupa               | $9\sqrt{3}$  | 16          | <div></div>               |
| Objętość ostrosłupa                    | $30\sqrt{3}$ | <div></div> | <div></div>               |

17

$\sqrt{107}$

$24\sqrt{3}$

$15\sqrt{11}$

42

$9(\sqrt{103} + \sqrt{3})$

$14\sqrt{5}$

8

36

$16\sqrt{63}$

$9\sqrt{103}$

$10\sqrt{233}$

Źródło: Zespół autorski Politechniki Łódzkiej, licencja: CC BY 3.0.