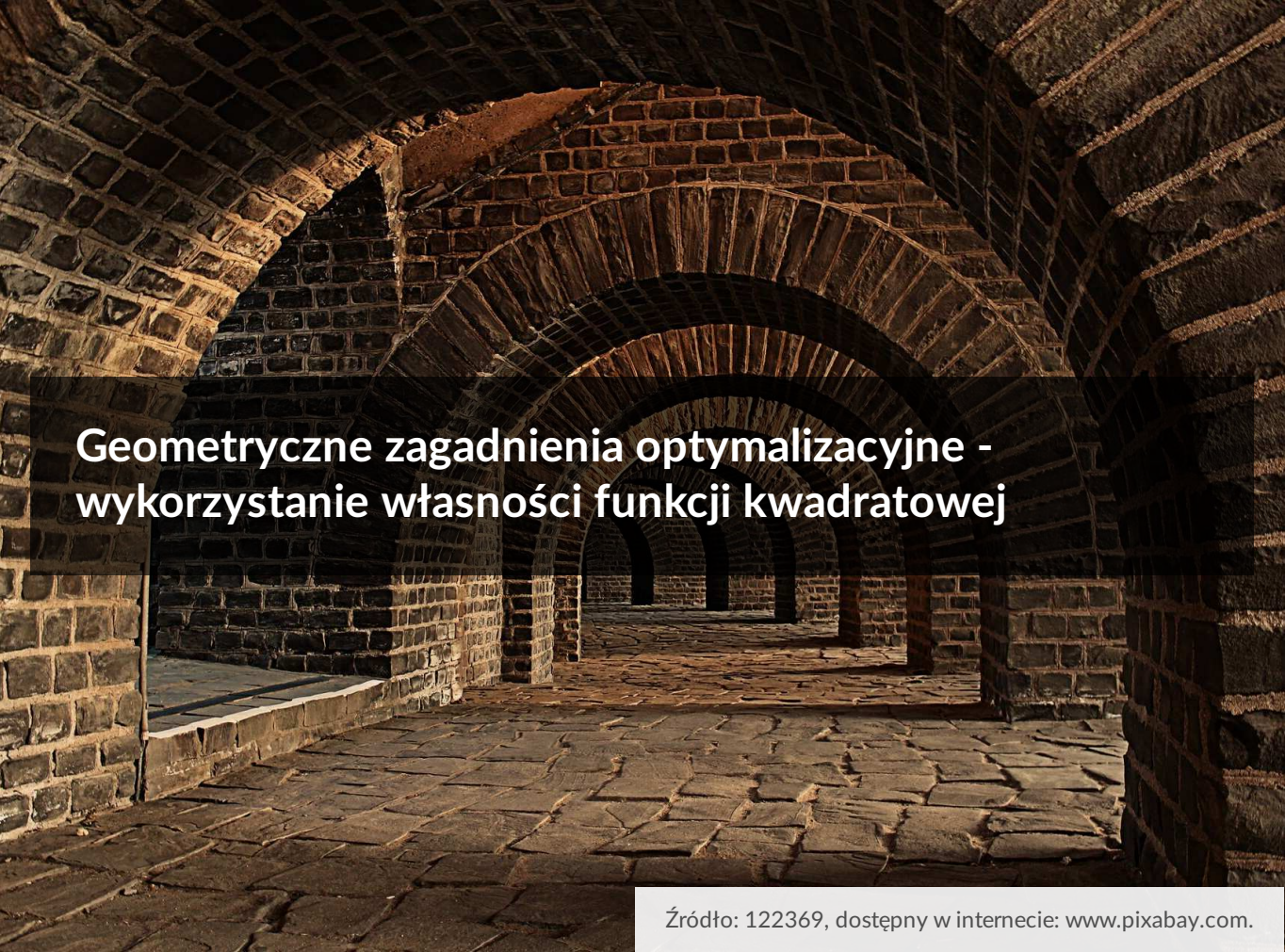




Geometryczne zagadnienia optymalizacyjne - wykorzystanie własności funkcji kwadratowej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Geometryczne zagadnienia optymalizacyjne - wykorzystanie własności funkcji kwadratowej

Źródło: 122369, dostępny w internecie: www.pixabay.com.

Według Słownika Języka Polskiego pod redakcją W. Doroszewskiego, optymalizacja to:

1. organizowanie jakichś działań, procesów itp. w taki sposób, aby dały jak największe efekty przy jak najmniejszych nakładach,
2. poszukiwanie za pomocą metod matematycznych najlepszego, ze względu na wybrane kryterium, rozwiązania danego zagadnienia gospodarczego przy uwzględnieniu określonych ograniczeń.

Optymalizacja to proces poszukiwania najlepszego rozwiązania problemu, czy metody postępowania.

Poszukiwanie największego zysku, najmniejszego kosztu, zużycia najmniejszej ilości materiału lub największej powierzchni spełniającej dane warunki – to tylko kilka przykładów problemów optymalizacyjnych.

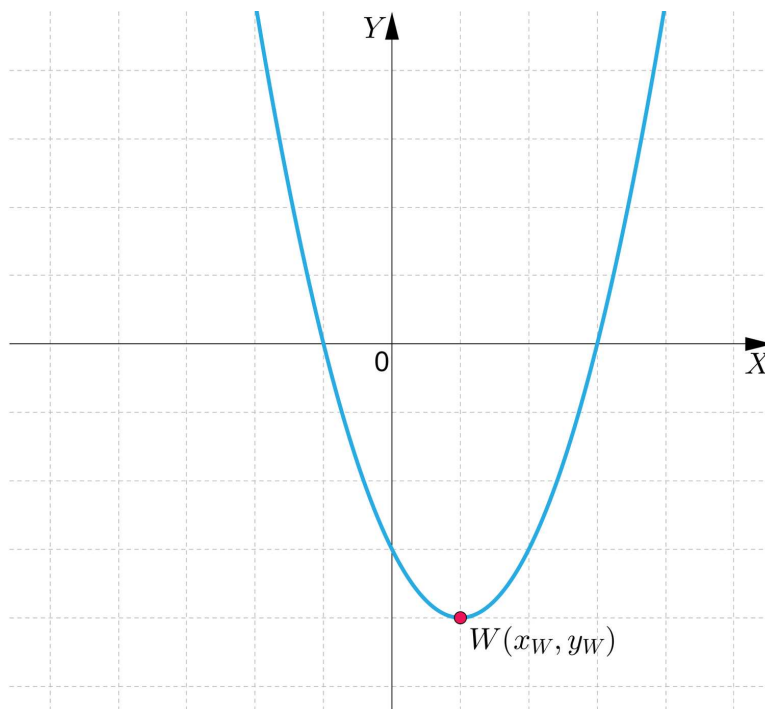
W tym materiale wykorzystamy własności funkcji kwadratowej do optymalizacji zagadnień geometrycznych.

Twoje cele

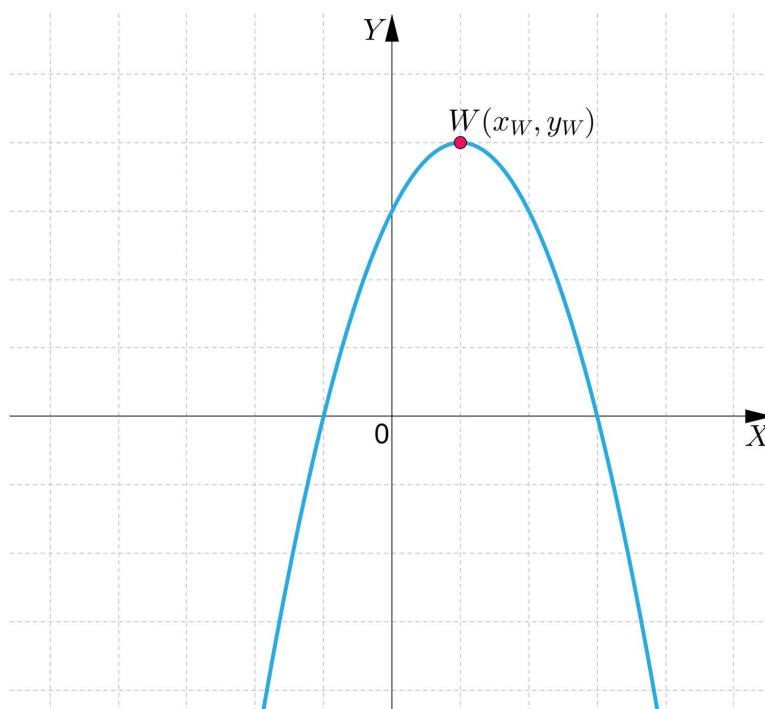
- Podasz wzór funkcji kwadratowej służący do optymalizacji danego zagadnienia geometrycznego.
- Wykorzystasz współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem danej funkcji kwadratowej, do interpretacji zagadnień geometrycznych.
- Rozwiążesz zadania optymalizacyjne za pomocą funkcji kwadratowej.
- Wykorzystasz własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych.

Przeczytaj

Jeśli $a > 0$, to funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$ przyjmuje wartość najmniejszą $y_{min} = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x = \frac{-b}{2a}$.



Jeśli $a < 0$, to funkcja $y = ax^2 + bx + c$ przyjmuje wartość największą $y_{max} = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $x = \frac{-b}{2a}$.

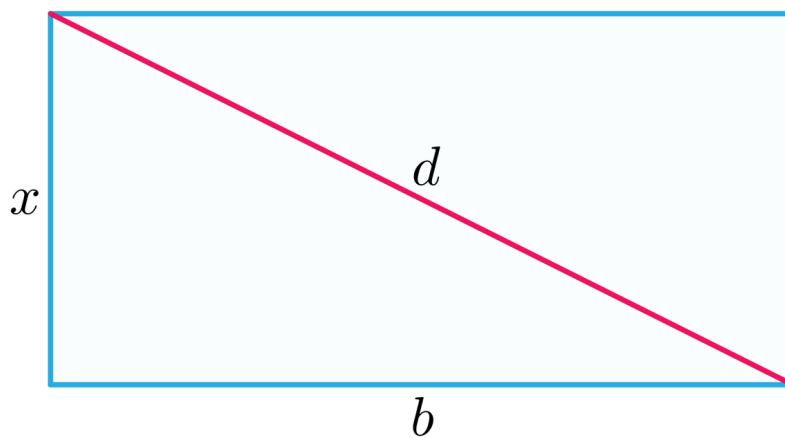


Istnienie najmniejszej lub największej wartości funkcji kwadratowej zależy od współczynnika a .

Wykres funkcji kwadratowej możemy wykorzystać do prostych optymalizacji, szukając największej lub najmniejszej wartości danej funkcji. Aby rozwiązać zadanie optymalizacyjne należy wyznaczyć wzór funkcji $f(x)$ opisującej sytuację z zadania oraz dziedzinę tej funkcji. Następnie należy znaleźć współrzędne wierzchołka wykresu otrzymanej funkcji kwadratowej.

Przykład 1

Jakie wymiary ma prostokąt o obwodzie 40 cm, który ma najkrótszą przekątną?



Rozwiązanie

d – przekątna prostokąta

Szukamy boków prostokąta x i b , dla których przekątna d będzie najkrótsza.

Wiemy, że obwód prostokąta wynosi $L = 40$ cm oraz wiemy, że $L = 2x + 2b$.

$$40 = 2x + 2b$$

$$2b = 40 - 2x \quad | : 2$$

$$b = 20 - x.$$

Długości boków są liczbami dodatnimi: $x > 0$ oraz $20 - x > 0$.

$$-x > -20$$

$$x < 20.$$

Zatem w powyższych obliczeniach wynika, że $x > 0$ i $x < 20$, więc $x \in (0, 20)$.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy, że długość przekątnej w prostokącie jest równa:

$$d^2 = x^2 + (20 - x)^2.$$

$$d = \sqrt{x^2 + (20 - x)^2} = \sqrt{x^2 + 400 - 40x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}.$$

Przekształcamy wyrażenie podpierwiastkowe do postaci kanonicznej.

$$2x^2 - 40x + 400 =$$

$$= 2x^2 - 40x + 200 - 200 + 400 =$$

$$= 2(x^2 - 2 \cdot 10x + 100) - 200 + 400 =$$

$$= 2(x - 10)^2 - 200 + 400 =$$

$$= 2(x - 10)^2 + 200 > 0 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Otrzymaliśmy wzór funkcji $d(x) = \sqrt{2(x - 10)^2 + 200}$, $x \in (0, 20)$, której wartością jest długość przekątnej prostokąta, w zależności od długości jego boków.

Wykresem funkcji znajdującej się pod pierwiastkiem jest fragment paraboli skierowanej ramionami do góry ($a > 0$), więc dla x_W wierzchołka przyjmuje wartość najmniejszą.

Współrzędne wierzchołka paraboli $y = 2(x - 10)^2 + 200$ to:

$$x_W = 10, x \in (0, 20) \text{ oraz } y_W = 200.$$

Dla $x = 10$ wyrażenie podpierwiastkowe przyjmuje wartość najmniejszą równą 200.

Przekątna d będzie najkrótsza, gdy wyrażenie podpierwiastkowe będzie najmniejsze, czyli dla $x = 10$. Długość przekątnej wynosi w tym przypadku $\sqrt{200}$.

Prostokąt ma boki o długościach: 10 cm i 20 cm – 10 cm = 10 cm, czyli jest to kwadrat o boku długości 10 cm.

Odpowiedź

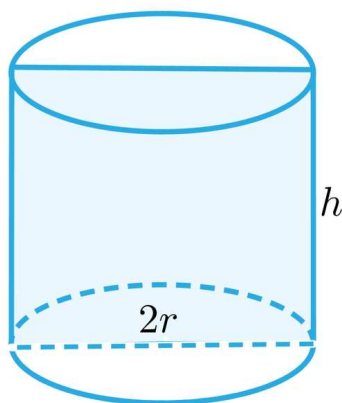
Najkrótszą przekątną ma kwadrat o boku 10 cm.

Przykład 2

Który z walców o obwodzie przekroju osiowego równym 40 cm ma największe pole powierzchni bocznej?

Rozwiązanie

Przekrojem osiowym walca jest prostokąt o bokach: h (wysokość walca) i $2r$ (r to promień podstawy walca).



Obwód prostokąta będącego przekrojem osiowym walca wyraża wzór:

$$L = 2h + 2 \cdot 2r.$$

Oznaczmy przez x promień podstawy walca.

Podstawmy dane.

$$40 = 2h + 2 \cdot 2x.$$

Po podzieleniu stronami przez 2, otrzymujemy:

$$20 = h + 2x.$$

$$\text{Stąd } h = 20 - 2x.$$

Długości boków są liczbami dodatnimi, więc $x > 0$ oraz $20 - 2x > 0$.

$$-2x > -20 \quad | : (-2)$$

$$x < 10.$$

Zauważmy, że $x < 10$ oraz jednocześnie $x > 0$, zatem mamy, że $x \in (0, 10)$.

Przypomnijmy, że pole powierzchni bocznej walca wyraża wzór: $P_p = 2\pi rh$.

$$P_p = 2\pi x(20 - 2x) \text{ dla } x \in (0, 10).$$

Otrzymaliśmy funkcję wyrażoną wzorem: $P(x) = -2\pi x(2x - 20)$.

Ponieważ $a < 0$, to funkcja dla x_W wierzchołka przyjmuje wartość największą. Aby wyliczyć współrzędne wierzchołka, wykorzystamy fakt, że funkcja jest przedstawiona

w postaci iloczynowej. Pierwsza współrzędna wierzchołka x_W jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych funkcji kwadratowej.

$$x_W = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_W = \frac{0+10}{2} = 5 \in (0, 10).$$

Zatem $x = r = 5$ cm.

$$P_{max} = P(5) = 2\pi \cdot 5(20 - 2 \cdot 5) = 100\pi$$

$$P_{max} = 100\pi \text{ cm}^2$$

Obliczmy wysokość walca.

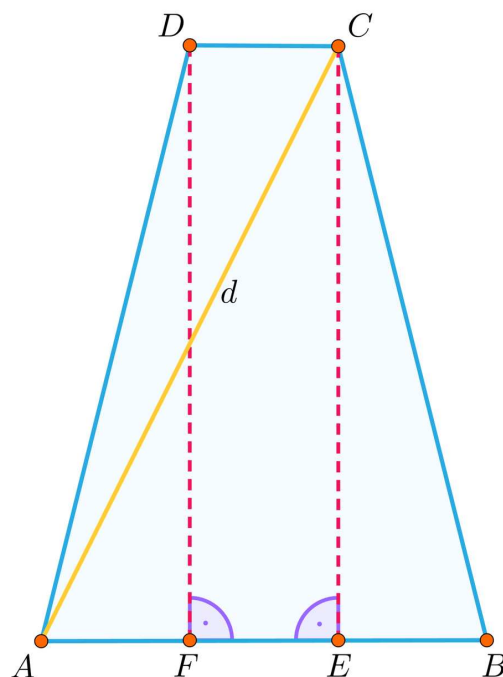
$$h = 20 - 2x = 20 - 2 \cdot 5 = 20 - 10 = 10$$

Odpowiedź

Walec, którego promień podstawy wynosi 5 cm i wysokość 10 cm ma największe pole powierzchni bocznej wynoszące $100\pi \text{ cm}^2$.

Przykład 3

Suma długości wysokości i obu podstaw trapezu równoramiennego wynosi 16. Oblicz długość przekątnej tego trapezu, gdy trapez ma pole największe z możliwych.



Rozwiązanie

Oznaczmy: $|AB| = a$, $|DC| = b$, $|CE| = h$, $|AC| = d$.

Z treści zadania wiemy, że $a + b + h = 16$.

Oznaczmy $a + b = x$.

Otrzymamy więc, że $x + h = 16$.

Stąd $h = 16 - x$.

Długości boków są dodatnie: $x > 0$ oraz $16 - x > 0$, stąd $x \in (0, 16)$.

Pole trapezu wyraża wzór: $P = \frac{a+b}{2}h$.

$$P = \frac{x}{2}(16 - x) = -\frac{1}{2}x(x - 16)$$

Wzór szukanej funkcji to $P(x) = -\frac{1}{2}x(x - 16)$, przy czym $x \in (0, 16)$.

Funkcja jest zapisana w postaci iloczynowej. Jej miejscami zerowymi są liczby 0 i 16. Ponieważ $a < 0$, funkcja w wierzchołku przyjmuje wartość największą, a współrzędna x_W wierzchołka jest średnią arytmetyczną miejsc zerowych odpowiedniej funkcji kwadratowej.

$$x_W = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_W = \frac{0 + 16}{2} = 8 \in (0, 16).$$

Zatem dla $x = 8$ pole przyjmuje wartość największą.

$$P_{max} = P(8) = -\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (8 - 16) = 32$$

Obliczmy wysokość trapezu z poniższego wzoru.

$$h = 16 - x$$

$$h = 16 - 8 = 8$$

Aby obliczyć długość przekątnej tego trapezu, skorzystamy z twierdzenia Pitagorasa zapisanego dla trójkąta prostokątnego AEC , mianowicie: $|AE|^2 + |EC|^2 = |AC|^2$.

Przyjmijmy oznaczenia:

$|AC| = d$ - przekątna trapezu,

$|EC| = h$ - wysokość trapezu.

$$d^2 = |AE|^2 + h^2$$

$$d = \sqrt{|AE|^2 + h^2}$$

Z rysunku wynika, że $|AE| = |AB| - |EB|$.

Zauważmy, że $|EB| = \frac{a-b}{2}$, ponieważ trapez jest równoramienny. Mamy więc, że $|AF| = |EB|$ oraz $|AB| = a = b + 2|EB|$.

Ponieważ $a + b = x = 8$, mamy

$$|AE| = a - \frac{a-b}{2} = \frac{2a}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{2a-a+b}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{x}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Zatem $|AE| = 4$ oraz $h = 8$. Podstawmy obliczone wartości do poniższego wzoru.

$$d = \sqrt{|AE|^2 + h^2}$$

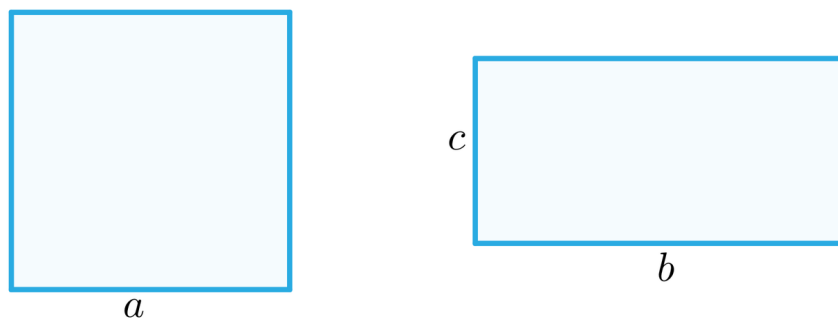
$$d = \sqrt{|AE|^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

Odpowiedź

Długość przekątnej trapezu o największym polu wynosi $4\sqrt{5}$.

Przykład 4

Drut o długości 68 cm dzielimy na dwie części. Z jednej tworzymy kwadrat, z drugiej prostokąt, w którym stosunek długości boków wynosi 2 : 1. Na jakie części trzeba rozciąć drut, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?



Korzystając z powyższych rysunków dostajemy, że:

obwód kwadratu: $L_k = 4a$;

obwód prostokąta: $L_p = 2b + 2c$.

Stosunek długości boków prostokąta wynosi 2 : 1, więc $b = 2c$ oraz $L_p = 2 \cdot 2c + 2c = 6c$.

Z treści zadania wynika, że suma obwodów kwadratu i prostokąta jest równa długości drutu.

L – długość drutu.

$$L = L_k + L_p$$

Z powyższych rozważań oraz z treści zadania mamy więc, że $68 = 4a + 6c$.

Z powyższego równania wyznaczmy a .

$$4a = 68 - 6c \quad |:4$$

$$a = 17 - \frac{6}{4}c$$

$$a = 17 - \frac{3}{2}c.$$

$$\text{Pole kwadratu: } P_k = a^2 = \left(17 - \frac{3}{2}c\right)^2.$$

$$\text{Pole prostokąta: } P_p = bc = 2c \cdot c = 2c^2.$$

$$\text{Suma pól kwadratu i prostokąta: } P = P_k + P_p = \left(17 - \frac{3}{2}c\right)^2 + 2c^2.$$

Możemy zapisać powyższy wzór na pole jako wzór funkcji.

$$P(c) = \left(17 - \frac{3}{2}c\right)^2 + 2c^2.$$

Ponieważ długości boków nie mogą być ujemne, muszą być spełnione warunki:

$$c > 0 \text{ oraz } 17 - \frac{3}{2}c > 0.$$

$$-\frac{3}{2}c > -17$$

$$c < \frac{34}{3} \text{ oraz } c > 0, \text{ zatem } c \in \left(0, \frac{34}{3}\right).$$

$$P(c) = \left(17 - \frac{3}{2}c\right)^2 + 2c^2 = 289 - 51c + \frac{9}{4}c^2 + 2c^2 = 289 - 51c + \frac{17}{4}c^2$$

$$P(c) = \frac{17}{4}c^2 - 51c + 289, \quad c \in \left(0, \frac{34}{3}\right)$$

Otrzymaliśmy funkcję wyrażoną wzorem $P(c) = \frac{17}{4}c^2 - 51c + 289$. Ponieważ $c > 0$, funkcja w wierzchołku wykresu przyjmuje wartość najmniejszą. Aby obliczyć współrzędne wierzchołka, wykorzystamy poniższy wzór.

$$c_W = -\frac{b}{2a}$$

$$c_W = -\frac{-51}{2 \cdot \frac{17}{4}} = 6.$$

Funkcja przyjmuje wartość najmniejszą dla $c = 6$ cm, $c \in \left(0, \frac{34}{3}\right)$.

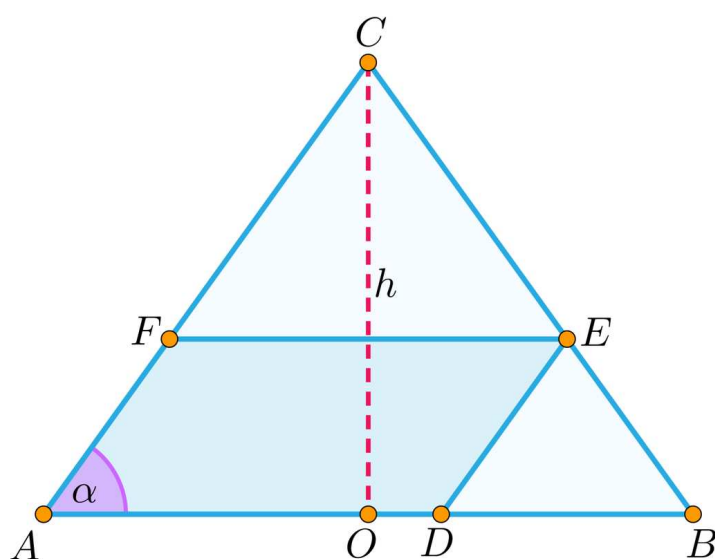
$$a = 17 - \frac{3}{2}c = 17 - \frac{3}{2} \cdot 6 = 17 - 9 = 8.$$

Odpowiedź

Drut należy przeciąć na dwie części o długościach: $4 \cdot 8 \text{ cm} = 32 \text{ cm}$ oraz $6 \cdot 6 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$.

Przykład 5

Z trójkąta ABC , w którym $|AC| = |BC| = 10 \text{ cm}$, $|AB| = 12 \text{ cm}$, należy wyciąć równoległobok, którego jeden bok byłby zawarty w podstawie AB , a drugi – w jednym z pozostałych boków trójkąta ABC i który miałby największe pole. Oblicz długości boków i pole szukanego równoległoboku.



Czworokąt $ADEF$ jest równoległobokiem, oznaczmy $|AF| = |DE| = x$ oraz $|AD| = |FE| = z$.

Trójkąt CFE jest podobny do trójkąta ABC – trójkąty mają takie same kąty.

$$\triangle CFE \sim \triangle ABC.$$

Z cechy (k, k, k) wiemy, że odpowiednie odcinki są proporcjonalne:

$$\frac{|CF|}{|FE|} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$|AC| = 10 \text{ cm} \text{ oraz } |AB| = 12 \text{ cm}.$$

$$\frac{10-x}{z} = \frac{10}{12}$$

$$120 - 12x = 10z$$

$$z = 12 - 1,2x.$$

Długości boków spełniają warunki:

$$x > 0 \text{ oraz } z = 12 - 1,2x$$

$$-1,2x > -12$$

$$x < 10.$$

Zatem mamy, że $x > 0$ oraz $x < 10$, więc $x \in (0, 10)$.

Pole równoległoboku wyraża wzór: $P = |AD| \cdot |AF| \cdot \sin \alpha$, co możemy też zapisać za pomocą przyjętych oznaczeń: $P = z \cdot x \cdot \sin \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{h}{|AC|} = \frac{h}{10}.$$

Wysokość trójkąta ABC wyliczymy z twierdzenia Pitagorasa zapisanego poniżej dla trójkąta prostokątnego AOC .

$$h^2 + |AO|^2 = |AC|^2$$

$$h^2 = |AC|^2 - |AO|^2$$

$$h = \sqrt{|AC|^2 - |AO|^2}$$

$$|AO| = \frac{1}{2}|AB| = 6, \text{ ponieważ trójkąt } ABC \text{ jest równoramienny.}$$

$$\text{Stąd } h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8.$$

$$\text{Zatem } \sin \alpha = \frac{h}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Pole równoległoboku wyraża wzór: $P(x) = (12 - 1,2x) \cdot x \cdot \frac{4}{5}$, gdzie $x \in (0, 10)$.

Funkcja przyjmuje wartość największą w wierzchołku paraboli będącej wykresem funkcji $P(x) = (12 - 1,2x) \cdot x \cdot \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}x(1,2x - 12)$, ponieważ $a < 0$.

Funkcja zapisana jest w postaci iloczynowej. Skorzystamy z faktu, że pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli jest średnią arytmetyczną jej miejsc zerowych. Miejsca zerowe funkcji $P(x)$ to $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 10$.

$$x_W = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 10}{2} = 5, x \in (0, 10).$$

Maksymalne pole jest równe:

$$P_{max} = P(5) = (12 - 1,2 \cdot 5) \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = (12 - 6) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24.$$

$$|AF| = x = 5 \text{ cm}$$

$$|AD| = z = 12 - 1,2x = 12 - 1,2 \cdot 5 = 12 - 6 = 6.$$

Odpowiedź

Długości boków szukanego równoległoboku wynoszą: 5 cm i 6 cm, a jego pole wynosi 24 cm^2 .

Słownik

funkcja kwadratowa

funkcję $f(x) = ax^2 + bx + c$ określoną dla wszystkich liczb rzeczywistych, gdzie a, b, c są liczbami rzeczywistymi, przy czym $a \neq 0$, nazywamy funkcją kwadratową; jej wykresem jest parabola

postać kanoniczna funkcji kwadratowej

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, a \neq 0$$

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją prezentującą wykorzystanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych. Rozwiąż zadania znajdujące się pod animacją i porównaj z odpowiedziami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DVwF0Ypal>

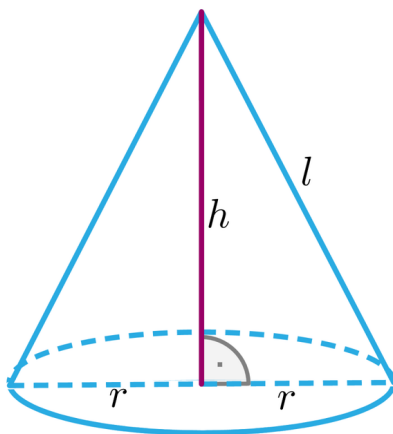
Film nawiązujący do treści materiału dotyczący geometrycznych zagadnień optymalizacyjnych- wykorzystanie własności funkcji kwadratowej.

Polecenie 2

Dany jest prostokąt o bokach 5 cm i 4 cm. Jeden bok tego prostokąta powiększamy, a drugi pomniejszamy o x cm. Dla jakiej wartości x cm pole otrzymanego prostokąta będzie największe?

Polecenie 3

Czy można określić wymiary stożka, którego obwód przekroju osiowego jest równy 20 cm i jego pole powierzchni bocznej jest największe?



h – wysokość stożka

r – promień podstawy stożka

l – tworząca stożka

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



W ogrodzeniu prostokątnej działki zamontowano 2 furtki o szerokości 1 m każda. Na ogrodzenie działki zużyto jeszcze 46 m bieżących siatki. Wyznacz największe możliwe pole powierzchni ogrodzonego obszaru. Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ 121 m²

☐ 169 m²

☐ 144 m²

☐ 100 m²

Ćwiczenie 2



Dany jest prostokąt o bokach 6 cm i 21 cm. Dobierz odpowiednią zmianę długości boków tego prostokąta do wartości x tak, aby pole otrzymanego prostokąta było największe.

Krótszy bok tego prostokąta powiększamy o $3x$, a dłuższy pomniejszamy o $2x$

$$x = 3,75$$

Krótszy bok tego prostokąta powiększamy o x , a dłuższy zmniejszamy o $3x$

$$x = 0,5$$

Krótszy bok tego prostokąta powiększamy o $\frac{1}{2}x$, a dłuższy zmniejszamy o $\frac{3}{2}x$

$$x = 4,25$$

Krótszy bok tego prostokąta powiększamy o $2x$, a dłuższy zmniejszamy o $2x$

$$x = 1$$

Ćwiczenie 3



Dany jest prostokąt o obwodzie 60 cm.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Najkrótsza możliwa przekątna tego prostokąta ma długość $\sqrt{450}$ cm.

☐ Prostokąt ten ma najkrótszą możliwą przekątną, jeśli jego wymiary to 1 cm i 29 cm.

☐ Największe możliwe pole tego prostokąta wynosi 225 cm^2 .

☐ Prostokąt ten ma największe pole, jeśli jego wymiary to 10 cm i 20 cm.

Ćwiczenie 4



Dany jest walec o obwodzie przekroju osiowego równym 60 cm. W puste miejsca wstaw odpowiednie liczby całkowite, przeciągając je.

- Walec, którego średnica podstawy wynosi cm, ma największe pole powierzchni bocznej.
- Największe pole powierzchni bocznej ma walec o przekątnej przekroju osiowego równej $\sqrt{2}$ cm.
- Największe możliwe pole powierzchni bocznej tego walca wynosi $\pi \text{ cm}^2$.

Ćwiczenie 5



Suma długości wszystkich krawędzi graniastopu prawidłowego sześciokątnego wynosi 72 cm. W którym przypadku graniastop osiąga największe pole powierzchni bocznej? Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ Krawędź podstawy ma długość 3 cm a wysokość ma długość 6 cm.

☐ Krawędź podstawy ma długość 6 cm a wysokość ma długość 3 cm.

☐ Krawędź podstawy ma długość 3 cm i wysokość ma długość 3 cm.

☐ Krawędź podstawy ma długość 6 cm i wysokość ma długość 6 cm.

Ćwiczenie 6



Suma długości wysokości i obu podstaw trapezu równoramiennego wynosi 14 cm. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Przy każdym zdaniu w tabeli zaznacz „Prawda” albo „Fałsz”.

Zdanie	Prawda	Fałsz
Trapez ten osiąga największe pole przy wysokości równej 7 cm.	☐	☐
Największe możliwe pole tego trapezu wynosi $24,5 \text{ cm}^2$.	☐	☐
Długość przekątnej takiego trapezu o największym polu wynosi $7\sqrt{2} \text{ cm}$.	☐	☐

Ćwiczenie 7



Odcinek o długości 32 cm dzielimy na dwie części. Z jednej tworzymy kwadrat, natomiast z drugiej prostokąt, w którym stosunek długości boków wynosi 7 : 1. Odcinek dzielimy tak, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza.

Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

☐ Dłuższy bok prostokąta musi mieć długość $\frac{32}{23}$.

☐ Odcinek musimy podzielić na dwie równe części, każda o długości 16.

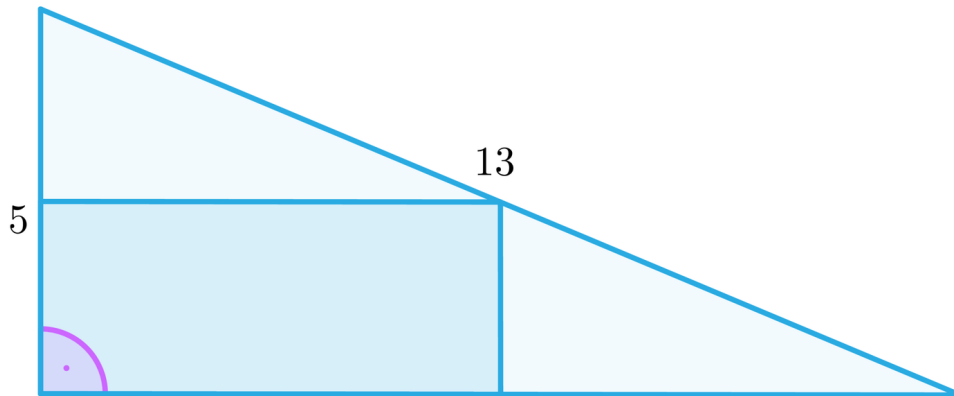
☐ Bok kwadratu musi mieć długość $\frac{56}{23}$.

☐ Obwód prostokąta powinien wynosić $\frac{512}{23}$.

Ćwiczenie 8



W trójkąt prostokątny o jednej z przyprostokątnych długości 5 i przeciwprostokątnej długości 13 wpisano prostokąt jak na rysunku poniżej.



Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz zdanie prawdziwe.

- ☐ Długości boków prostokąta o największym możliwym polu to 2, 5 oraz 6.
- ☐ Długości boków prostokąta o największym możliwym polu to 3 oraz 5.
- ☐ Długości boków prostokąta o największym możliwym polu to 2 oraz 7, 5.
- ☐ Długości boków prostokąta o największym możliwym polu to 3 oraz 6.

Dla nauczyciela

Autor: Katarzyna Podfigurna

Przedmiot: Matematyka

Temat: Geometryczne zagadnienia optymalizacyjne – wykorzystanie własności funkcji kwadratowej

Grupa docelowa: III etap edukacyjny, liceum, technikum, rozszerzony.

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

- 2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
- 3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
- 4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
- 8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
- 9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
- 11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii;
- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- opisuje zależności między wielkościami wynikającymi z sytuacji opisanej w zadaniu za pomocą funkcji kwadratowej;

- zapisuje wzór funkcji spełniającej warunki wynikające z sytuacji opisanej w zadaniu;
- oblicza najmniejsze i największe wartości funkcji kwadratowej oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
- interpretuje otrzymane wyniki;
- wykorzystuje wiedzę z planimetrii do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych;
- z zaangażowaniem rozwiązuje zadania, wykorzystując wiadomości na temat różnych postaci funkcji kwadratowej;
- analizuje zadania tekstowe oraz dokonuje wyboru najefektywniejszej metody prowadzącej do ich rozwiązania.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- praca z tekstem;
- dyskusja;
- burza mózgów;

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu.

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu;
- tablica interaktywna/rzutnik multimedialny.

Przebieg lekcji

Faza wprowadzająca:

- uczniowie przypominają definicję i metodą burzy mózgów własności funkcji kwadratowej;
- uczniowie na tablicy rysują przykładowe wykresy funkcji kwadratowej dla $a < 0$ i $a > 0$;
- uczniowie przypominają, jak obliczyć najmniejszą/największą wartości funkcji kwadratowej oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
- nauczyciel podaje temat i cele zajęć.

Faza realizacyjna:

- nauczyciel dzieli uczniów na małe grupy;
- każda grupa otrzymuje do analizy po jednym spośród przykładów zawartych w sekcji „Przeczytaj”;
- w czasie 10 min uczniowie w grupach analizują rozwiązania oraz przygotowują omówienie celem zaprezentowania na forum klasy;
- nauczyciel kontroluje pracę uczniów, udzielając im wskazówek,
- wybrani uczniowie prezentują analizowane przez siebie przykłady; dyskusja – jakie są najefektywniejsze metody rozwiązywania zadań omawianych typów,
- następnie nauczyciel wyświetla zawartość w sekcji „Animacja”. Uczniowie w grupach rozwiązują polecenie nr 2 i 3. Wybrane grupy prezentują swoje rozwiązania. Nauczyciel, w razie potrzeby, uzupełnia informacje;

Faza podsumowująca:

- przedstawiciel każdej grupy omawia sposób pracy grupy, napotkane trudności;
- uczniowie określają, co było dla nich trudne lub niezrozumiałe, a nauczyciel udziela wyjaśnień;
- nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia aktywność uczniów.

Praca domowa:

- zadaniem uczniów jest rozwiązanie ćwiczeń interaktywnych.

Materiały pomocnicze:

- [Współrzędne wierzchołka paraboli](#)
- [Wartość najmniejsza oraz wartość największa funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym](#)
- [Zależności między wartościami współczynników występujących we wzorach funkcji kwadratowej zapisanej w postaci ogólnej i w postaci kanonicznej](#)
- [Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci kanonicznej. Wykres funkcji kwadratowej zapisanej wzorem w postaci ogólnej](#)

Wskazówki metodyczne:

- materiały zawarte w animacji i w sekcji Przeczytaj uczniowie mogą przeanalizować jako pracę własną przed lekcją; umożliwi im to wystąpienie na zajęciach w roli ekspertów.
- „Animację” można również wykorzystać w realizacji lekcji dotyczącej znajdowania najmniejszej/największej wartości funkcji kwadratowej.