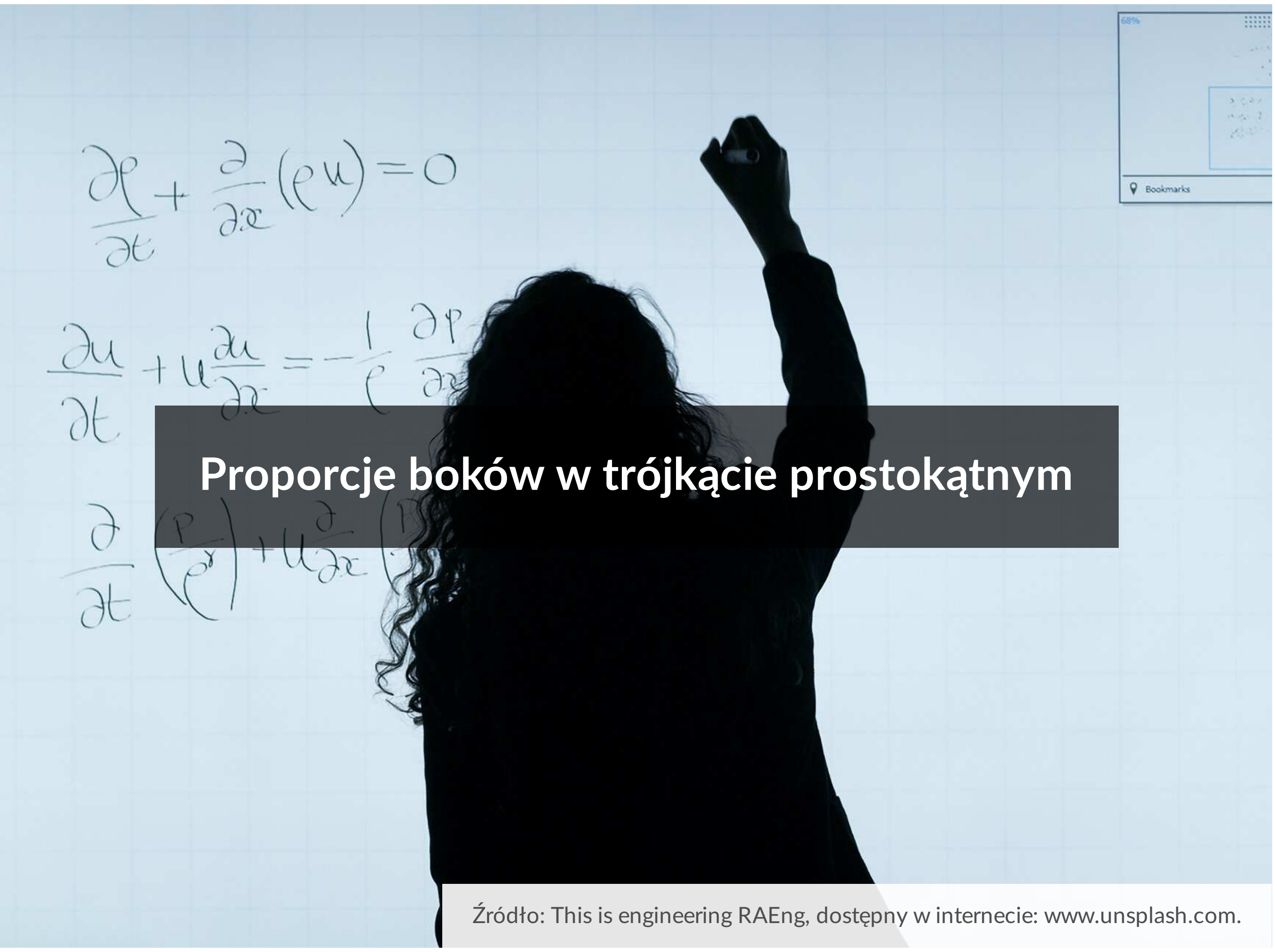
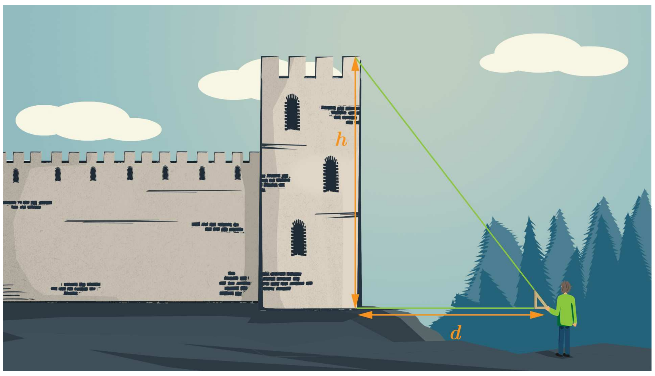
# Proporcje boków w trójkącie prostokątnym

# Proporcje boków w trójkącie prostokątnym



Źródło: This is engineering RAEng, dostępny w internecie: www.unsplash.com.




Wyobraźmy sobie, że za pomocą ekierki chcemy zmierzyć wysokość oglądanej wieży. Oczywiście, nie chodzi tu o wspinaczkę na wieżę i wielokrotne odmierzanie długości zaznaczonych na naszej ekierce.
Wygodniejszy (i bezpieczniejszy) sposób pomiaru opiera się na wykorzystaniu podobieństwa pewnych trójkątów.
Wystarczy bowiem stanąć w takiej odległości od wieży, aby jej wierzchołek widzieć wzdłuż najdłuższego boku ekierki, a jednocześnie jedno z krótszych ramion ekierki ustawić poziomo tak, jak to jest zaprezentowane na rysunku.
W tej sytuacji podobne są: mały trójkąt prostokątny z ekierki i duży trójkąt prostokątny, którego jedna z przyprostokątnych odpowiada wysokości wieży.
Oznacza to, że w każdym z tych trójkątów stosunek odpowiednich boków jest taki sam.
Pozostaje więc zmierzyć odległość obserwatora od podstawy wieży, a następnie - korzystając z odpowiednich proporcji - obliczyć jej wysokość.

## Twoje cele

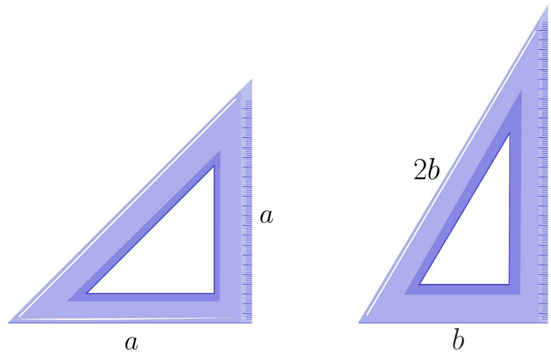
- Określisz funkcje trygonometryczne: sinus, cosinus i tangens kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
- Podasz wartość sinusa, cosinusa oraz tangensa w trójkącie prostokątnym o podanych długościach boków.
- Wyznaczysz sinus, cosinus i tangens każdego z kątów: $30^{\circ}$, $45^{\circ}$, $60^{\circ}$.
- Korzystając ze związków trygonometrycznych, obliczysz nieznane długości boków w trójkącie prostokątnym, rownież w kontekście związanym z pomiarami wysokości obiektów terenowych.

# Przeczytaj

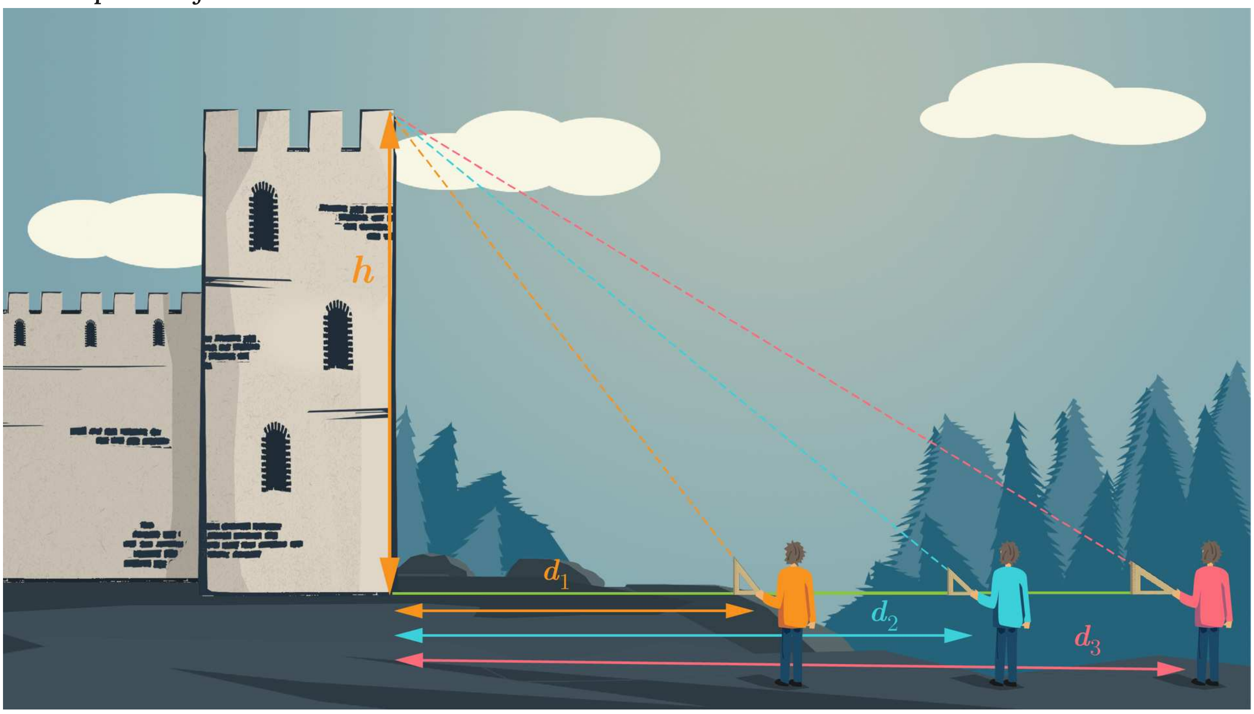
W pierwszym przykładzie omówimy pomiar wysokości wieży za pomocą ekierek używanych w praktyce szkolnej.

**Przykład 1**

Załóżmy, że w rozpatrywanych we Wprowadzeniu pomiarach wysokości wieży używamy jednej ze standardowych ekierek (to znaczy takiej o obu kątach ostrych równych $45^{\circ}$ lub takiej o kątach ostrych $30^{\circ}$ i $60^{\circ}$, jak widać na rysunku obok).




Wobec tego przy pomiarach możliwe są tylko trzy sytuacje przedstawione na rysunku poniżej.




Źródło: GroMar Sp. z o.o., licencja: CC BY-SA 4.0.

W każdej z nich wystarczy zmierzyć odległość od wieży (na powyższym rysunku oznaczoną dla kolejnych obserwatorów przez $d_1$, $d_2$, $d_3$), a następnie skorzystać z wiedzy o stosunku boków ekierki.

Zauważymy, że wtedy wysokość $h$ wieży jest zależna od tych odległości zgodnie z poniższymi wzorami:

- jeżeli kąt, pod którym widać wieżę jest równy $60^{\circ}$, to otrzymujemy równość $h = d_1\sqrt{3}$,

- jeżeli kąt, pod którym widać wieżę jest równy $45^\circ$, to otrzymujemy równość $h = d_2$
- jeżeli kąt, pod którym widać wieżę jest równy $30^\circ$, to otrzymujemy równość $h = \frac{d_3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} d_3$,

  co w każdym z tych trzech przypadków pozwoli na oszacowanie wysokości wieży.

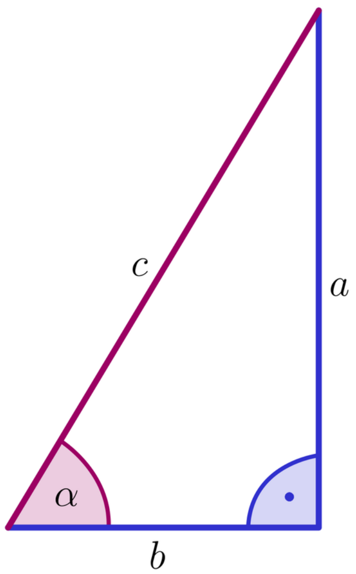
Jednak nie ma powodu, aby przy tego rodzaju pomiarach ograniczać się do używania jedynie dwóch typów ekierek. W podobny sposób możemy przecież wykorzystywać **każdy** dostępny trójkąt prostokątny, o dowolnych kątach ostrych (a od tego, jaki jest kąt ostry, zależeć będzie stosunek przyprostokątnych i w konsekwencji: odległość od wieży, w jakiej musimy się ustawić).

Ponadto takie różnorodne „ekierki” przydają się przy rozwiązywaniu wielu problemów dotyczących m.in. pomiarów w terenie (mierzenie wysokości wieży jest jednym z przykładowych sposobów ich zastosowania).

Zupełnie naturalnie pojawia się wówczas potrzeba nazwania proporcji poszczególnych boków w takich „ekierkach”, czyli w trójkątach prostokątnych o zadanym kształcie.

**Definicja: tangens kąta ostrego**

Rozważmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a$ i $b$ oraz przeciwprostokątnej $c$, w którym kąt $\alpha$ leży naprzeciw boku $a$.




Wtedy **tangensem** kąta $\alpha$ nazywamy stosunek  długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości drugiej przyprostokatnej:

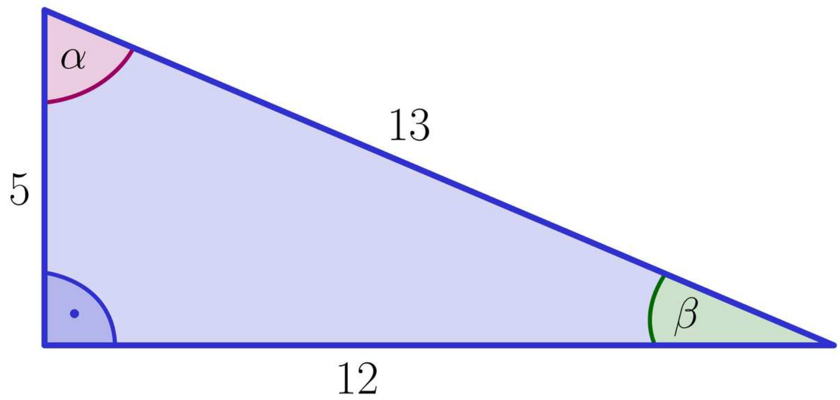
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

**Przykład 2**

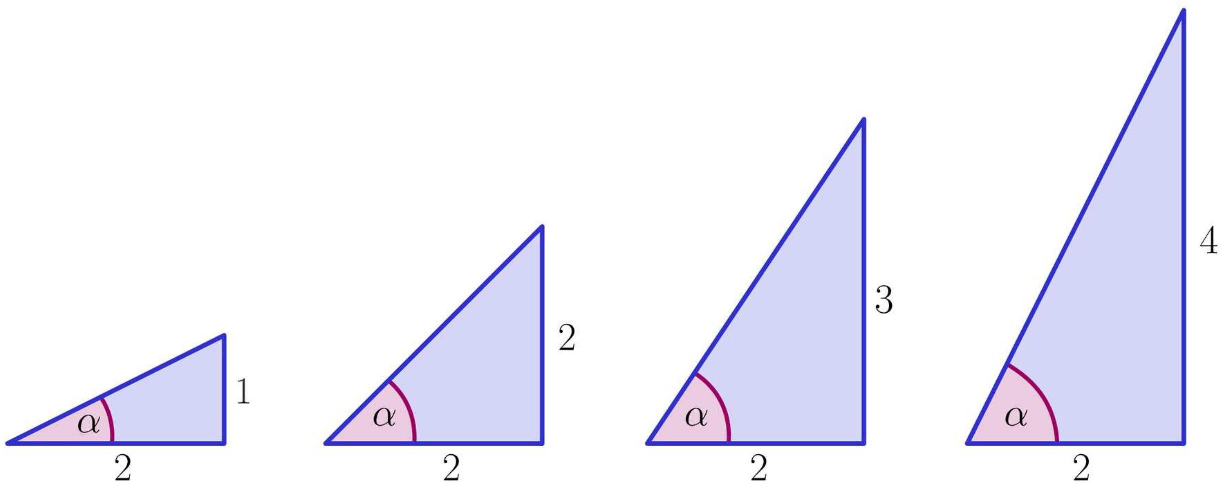
Obliczymy tangensy kątów ostrych w trójkącie prostokątnym widocznym na rysunku:

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$,

$\operatorname{tg} \beta = \frac{5}{12}$.

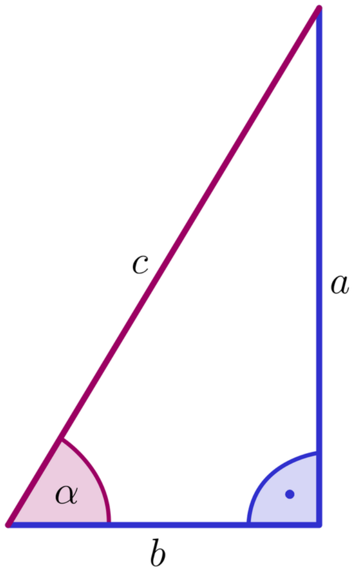



Zaś na poniższym rysunku zilustrowano trójkąty prostokątne, w których tangensy zaznaczonego kąta $\alpha$ są równe kolejno:
$\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ i 2.




Można zaobserwować, że:
**im większy jest kąt ostry $\alpha$, tym większa jest wartość jego tangensa**.
**Definicja: sinus i cosinus kąta ostrego w trójkącie prostokątnym**

Rozważmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych $a$ i $b$ oraz przeciwprostokątnej $c$, w którym kąt $\alpha$ leży naprzeciw boku $a$.




Wtedy:

- **sinusem** kąta $\alpha$ nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej:
  $\sin\alpha = \frac{a}{c}$;
- **cosinusem** kąta $\alpha$ nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej:
  $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

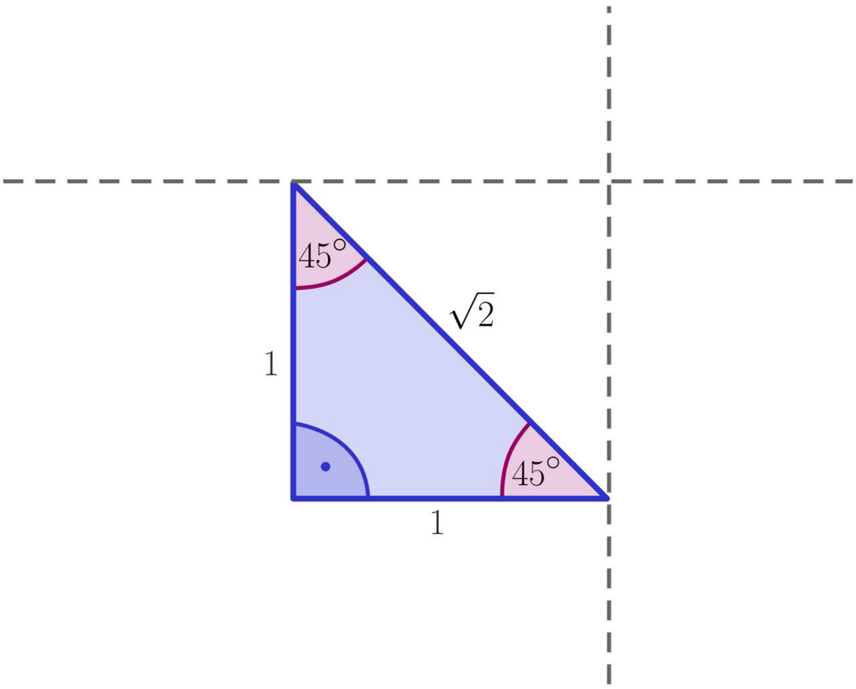
**Uwaga!** Bezpośrednio z definicji wynika, że wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta ostrego są dodatnie. Ponadto, ponieważ w każdym trójkącie prostokątnym najdłuższym bokiem jest przeciwprostokątna, więc dla dowolnego kąta ostrego $\alpha$ zarówno wartości $\sin\alpha$, jak i $\cos\alpha$ są mniejsze niż $1$.

**Przykład 3**

Rozważmy trójkąt prostokątny zaprezentowany na rysunku w przykładzie $2$.
Zgodnie z definicją otrzymujemy wówczas, że:
$\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, oraz $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\cos\beta = \frac{12}{13}$.

**Przykład 4**

W kwadracie o boku $1$ przekątna ma długość $\sqrt{2}$.
Rozcinamy taki kwadrat wzdłuż przekątnej i bierzemy jeden z otrzymanych w ten sposób trójkątów prostokątnych, który ma kształt standardowej ekierki o dwóch równych bokach.

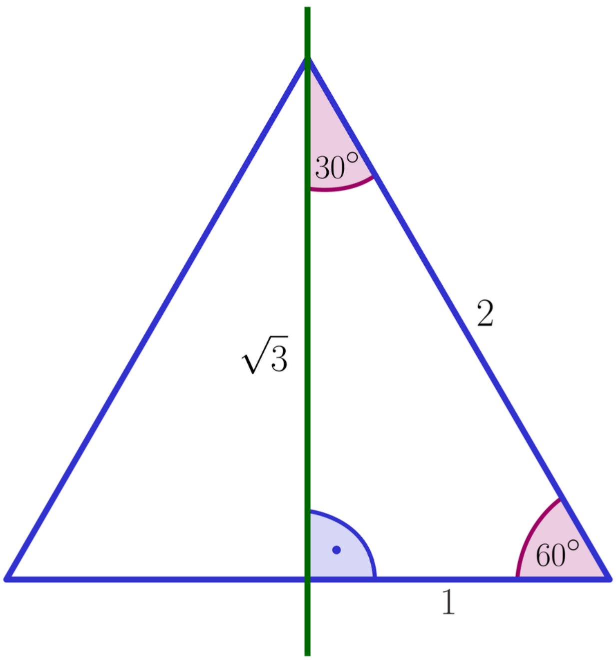



Mamy przy tym:
$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\mathrm{tg}\, 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$.

**Przykład 5**

W trójkącie równobocznym o boku $2$ wysokość ma długość $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$ i dzieli na pół przeciwległy bok oraz kąt przy wierzchołku.

Po rozcięciu danego trójkąta wzdłuż wysokości otrzymamy dwa przystające trójkąty prostokątne. Obliczymy wartości sinusa, cosinusa i tangensa dla obu kątów ostrych w jednym z tych trójkątów.



**Rozwiązanie**

Zauważmy, że w trójkącie prostokątnym widocznym na rysunku powyżej:

- dla kąta $30^\circ$ otrzymujemy:
  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
- dla kąta $60^\circ$ mamy:
  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ oraz $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

Wyniki uzyskane w dwóch poprzednich przykładach zbieramy w tabelce.

| **funkcja trygonometryczna** | $\alpha = 30^\circ$ | $\alpha = 45^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$ |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |

**Przykład 6**

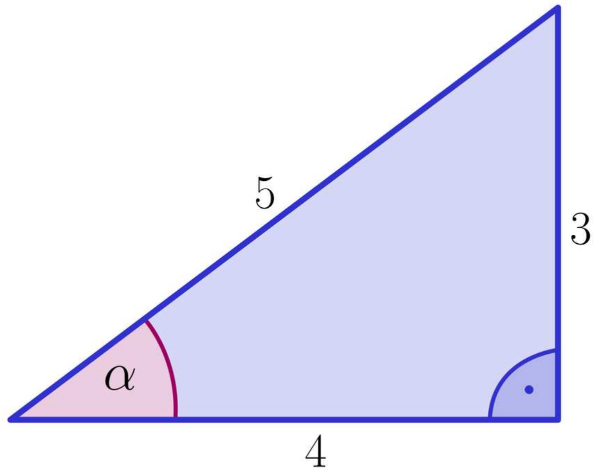
Narysujemy przykładowy trójkąt prostokątny, w którym sinus jednego z kątów ostrych jest równy $\frac{3}{5}$.

**Rozwiązanie**

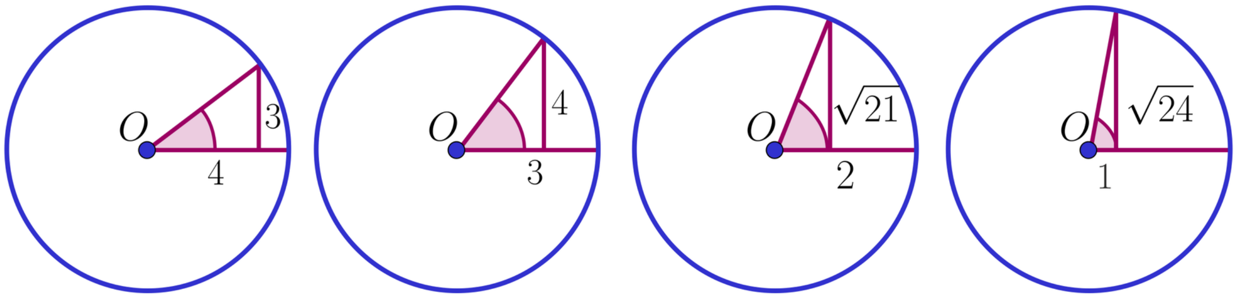
Rozważmy w tym celu trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości $3$ i przeciwprostokątnej długości $5$. Druga przyprostokątna takiego trójkąta ma wówczas, zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa, długość:

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

Rysujemy więc trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $3$ i $4$, w którym, na podstawie definicji, otrzymujemy $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.
Zauważmy przy okazji, że $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.



**Uwaga!** Warto zaobserwować, jak zmienia się sinus i cosinus kąta ostrego wraz ze wzrostem miary kąta. Na poniższych rysunkach przedstawiono okręgi o promieniu 5.




Nietrudno zauważyć, że wraz ze zwiększaniem się miary kąta ostrego jego cosinus maleje:

$\frac{4}{5} > \frac{3}{5} > \frac{2}{5} > \frac{1}{5}$.

Sinusy zaznaczonych kątów zachowują się natomiast odwrotnie: wraz ze wzrostem miary kąta stają się coraz większe:

$\frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{\sqrt{21}}{5} < \frac{\sqrt{24}}{5}$

Zaobserwowana prawidłowość dotyczy wszystkich kątów ostrych.

Zapamiętajmy zatem, że:

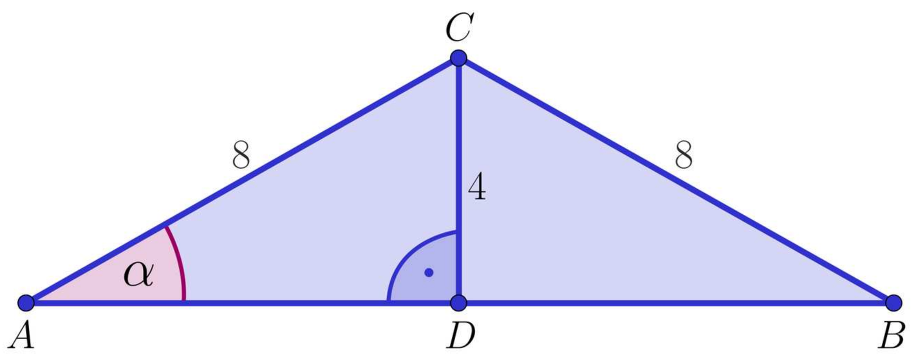
- **im większy jest kąt ostry , tym mniejsza jest wartość jego cosinusa,**
- **im większy jest kąt ostry , tym większa jest wartość jego sinusa.**

**Ważne!**

Przyjmujemy, że: $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$ oraz $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$.

**Przykład 7**

W trójkącie równoramiennym $ABC$, w którym $|AC| = |BC| = 8$, wysokość poprowadzona z wierzchołka $C$ ma długość 4.
Obliczymy miary kątów tego trójkąta.



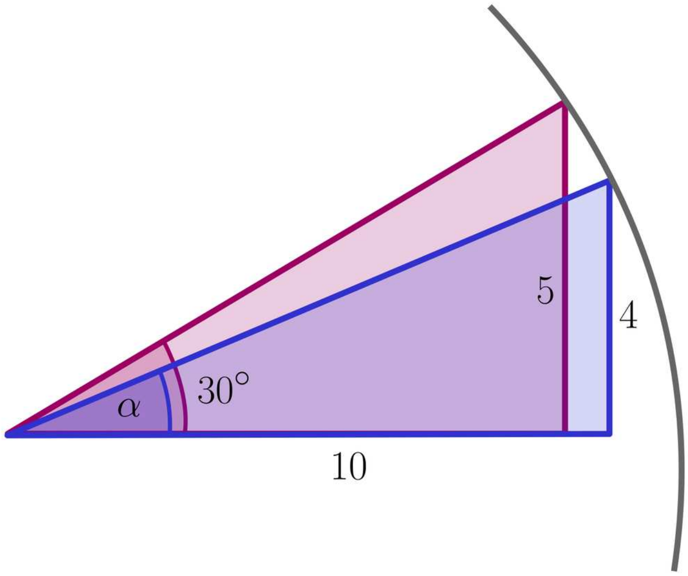

**Rozwiązanie**

Zauważmy, że wysokość poprowadzona z $C$ na bok $AB$ dzieli dany trójkąt na dwa przystające trójkąty prostokątne: $ACD$ i $BCD$.

Jeżeli kąt ostry przy wierzchołku $A$ oznaczymy jako $\alpha$, to:
$\sin\alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Ponieważ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, więc $\alpha = 30^\circ$ (wynika to stąd, że daną wartość sinus może przyjmować tylko dla jednego kąta ostrego).
A zatem kąty w trójkącie $ABC$ mają miary:
$|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = 30^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$.
**Przykład 8**

Kąt $\alpha$ jest ostry i $\sin\alpha = 0,4$. Wykażemy, że $\alpha < 30^\circ$.




**Rozwiązanie**

Mamy $\sin 30^\circ = 0,5 > \sin\alpha = 0,4$.

Ponieważ wraz ze wzrostem kąta ostrego $\alpha$ rośnie jego sinus, więc $\alpha < 30^\circ$.

Ilustracja tego faktu znajduje się na rysunku obok (oba trójkąty mają przeciwprostokątną równą 10).
**Ważne!**

Zapis $\sin^2\alpha$ oznacza wyrażenie, które jest kwadratem (drugą potęgą) sinusa kąta $\alpha$.
Podobnie $\cos^2\alpha$ oznacza wyrażenie, które jest kwadratem (drugą potęgą) cosinusa kąta $\alpha$
.
**Przykład 9**

Obliczymy wartość wyrażenia $\frac{3\cos 60^\circ - 5\,\mathrm{tg}\,45^\circ}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,60^\circ + \sin^2 45^\circ}$.

**Rozwiązanie**

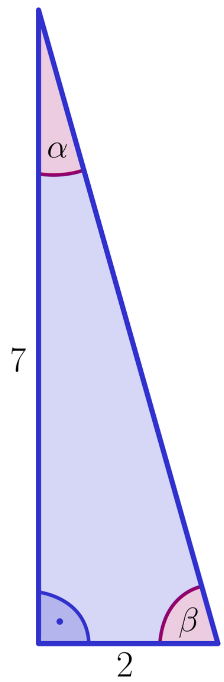
Podstawiamy wartości odpowiednich sinusów, cosinusów i tangensów, skąd otrzymujemy, że:

$$\frac{3\cos 60^\circ - 5\,\mathrm{tg}\,45^\circ}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,60^\circ + \sin^2 45^\circ} = \frac{3\cdot\frac{1}{2} - 5\cdot 1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2} - 5}{3 + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}} = -1.$$

**Odpowiedź**: Wartość podanego wyrażenia wynosi $(-1)$.

**Przykład 10**

Rozważmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości $2$ i $7$. Na podstawie tabeli wartości trygonometrycznych określimy z dokładnością do $1^\circ$ miary kątów ostrych w tym trójkącie.




**Rozwiązanie**. Ponieważ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{7} = 0,285\ldots$, więc $\alpha \approx 16^\circ$.

Trójkąt jest prostokątny, zatem $\beta \approx 90° - 16° = 74°$.

**Odpowiedź**: W rozważanym trójkącie kąty ostre są w przybliżeniu równe $16^\circ$ i $74^\circ$.

## Słownik

**tangens kąta ostrego**

**tangensem** kąta ostrego $\alpha$ w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości drugiej przyprostokatnej

**sinus kąta ostrego**

**sinusem** kąta ostrego $\alpha$ w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko tego kąta do długości przeciwprostokątnej

**cosinus kąta ostrego**

cosinusem kąta ostrego $\alpha$ w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przeciwprostokątnej

# Animacja

**Polecenie 1**

Obejrzyj animację, w której prezentowane są rozwiązania zadań dotyczących proporcji boków w trójkątach prostokątnych.

Rozwiąż następnie ćwiczenia zaproponowane poniżej.

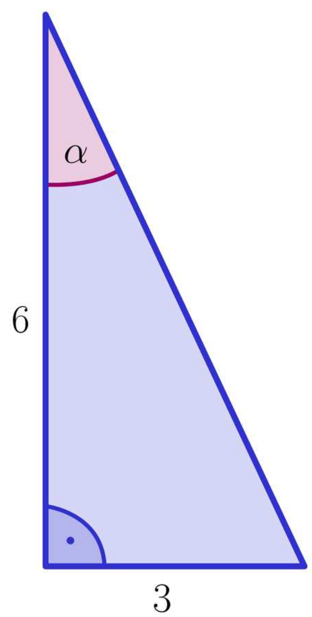
Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1D9eHsff

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącego proporcji boków w trójkącie prostokątnym.

---

**Polecenie 2**

Podaj wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta α zaznaczonego na rysunku poniżej.



**Polecenie 3**

W trójkącie prostokątnym:

- jeden z kątów ostrych ma miarę $\alpha$,
- jedna z przyprostokątnych ma długość $12$,
- druga przyprostokątna jest o $6$ mniejsza od przeciwprostokatnej.

Oblicz wartość iloczynu $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

**Polecenie 4**

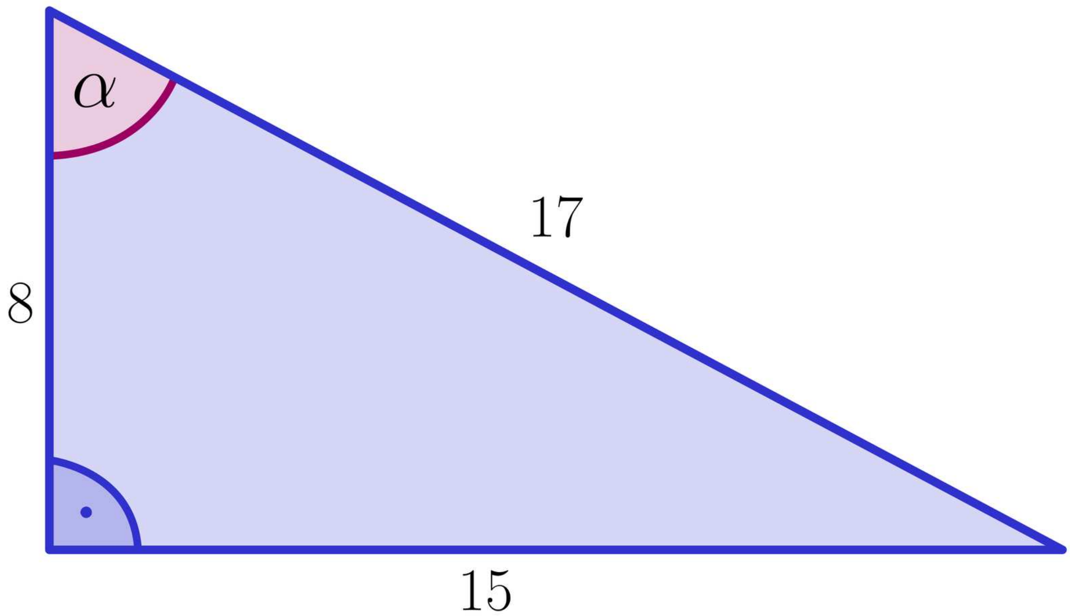
Kąt $\alpha$ jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha=2$. Wykaż, że $\alpha>60^\circ$.

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

**Ćwiczenie 1**

Zaznacz prawidłową odpowiedź. W trójkącie prostokątnym, prezentowanym na rysunku poniżej, $\cos\alpha$ jest równy:




**Ćwiczenie 2**

Dany jest trójkąt prostokątny $ABC$ o przyprostokątnej $AB$ długości $1$ i przeciwprostokątnej $BC$ długości $7$. Wynika stąd, że sinus kąta leżącego naprzeciw boku $AC$ jest równy:

$\frac{\sqrt{48}}{7}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{6}{7}$

............

## Ćwiczenie 3

W trójkącie prostokątnym cosinus kąta leżącego naprzeciw boku $AB$ jest równy $\frac{5}{13}$. Przeciwprostokątna $BC$ ma długość $26$. Wynika stąd, że długość boku $AB$ jest równa:

............

## Ćwiczenie 4

## Ćwiczenie 5

W trójkącie prostokątnym, o kącie ostrym $\alpha$, przyprostokątne mają długości $9$ i $40$. Wtedy wartość sumy $\sin\alpha + \cos\alpha$ jest równa:

- $\frac{49}{41}$
- $\frac{40}{49}$
- $1$
- $0{,}98$

## Ćwiczenie 6

Wiadomo, że $0,6 < \sin 37^{\circ} < 0,61$. Wynika stąd, że w trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej $10$ i jednym z kątów ostrych równym $53^{\circ}$ każda z przyprostokątnych ma długość:

większą niż $8$, mniejszą niż $8$, większą niż $6{,}1$, większą niż $7$

....................................

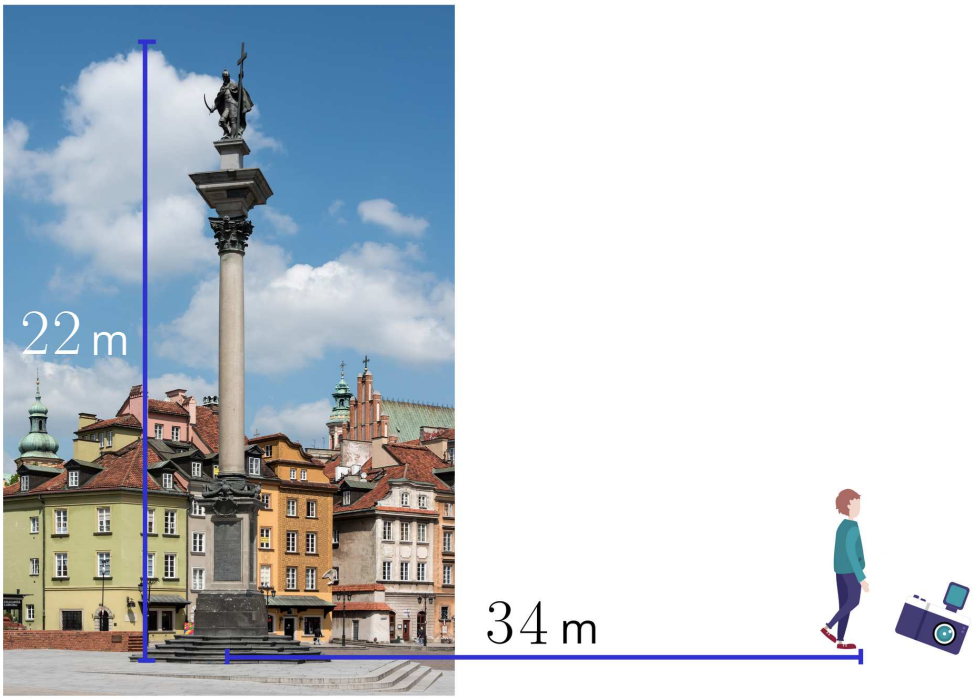
## Ćwiczenie 7

W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych jest równy $\alpha$, a przyprostokątna leżąca naprzeciw tego kąta jest cztery razy krótsza od przeciwprostokątnej. Oblicz $\operatorname{tg} \alpha$

- $\frac{1}{\sqrt{15}}$
- $\frac{\sqrt{15}}{5}$
- $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- $\frac{1}{5}$

## Ćwiczenie 8

Franek robi sobie zdjęcia z kolumną Zygmunta w tle, z żabiej perspektywy, tak jak na rysunku poniżej.
Franek mierzy $176\ \text{cm}$ i stoi w odległości $34\ \text{m}$ od kolumny, której wysokość jest równa $22\ \text{m}$.
Jedno ze zdjęć zostało zrobione z miejsca, z którego Franka było widać pod kątem $30^\circ$, a drugie - z miejsca, z którego Franka było widać pod kątem $45^\circ$.
Z poniższych stwierdzeń wybierz zdanie prawdziwe.



## Ćwiczenie 9

Spośród poniższych stwierdzeń wybierz i zaznacz te zdania, które są prawdziwe dla każdego kąta ostrego $\alpha$.

- $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$
- $\sin\alpha \cdot \cos\alpha \leq \frac{1}{2}$
- $\sin\alpha - \cos\alpha > 0$
- $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha > 1$

# Dla nauczyciela

**Autor:** Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat: Proporcje boków w trójkącie prostokątnym**

**Grupa docelowa:**

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**
Treści nauczania – wymagania szczegółowe:
VII. Trygonometria. Zakres podstawowy. Uczeń:
1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od 0° do 180° ,
w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- określa funkcje sinus, cosinus i tangens w trójkącie prostokątnym,
- oblicza z definicji wartości funkcji trygonometrycznych,
- rozwiązuje dowolny trójkąt prostokątny,
- stosuje własności funkcji trygonometrycznych w rozwiązywaniu zadań z geometrii.

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm;
- konektywizm.

**Metody i techniki nauczania:**

- odwrócona klasa;
- dyskusja;
- opowiadanie.

**Formy pracy:**

- praca indywidualna;
- praca w parach;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

**Środki dydaktyczne:**

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda.

**Przebieg lekcji:**

Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się w domu z materiałem z sekcji Przeczytaj.

Jeden z uczniów ma za zadanie przygotowanie opowiadania - prezentacji wprowadzającej w temat zajęć. Mogą to być na przykład ciekawostki dotyczące funkcji trygonometrych lub krótki rys historyczny.

**Faza wstępna:**

1. Nauczyciel podaje temat zajęć i kryteria sukcesu.

2. Wybrany wcześniej uczeń przedstawia prezentację - opowiadanie wprowadzające w tematykę funkcji trygonometrycznych.

**Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie w grupach dzielą się informacjami pozyskanymi w domu i opracowują algorytm obliczania wartości funkcji trygonometrycznych w danym trójkącie prostokątnym o dwóch danych bokach.

2. Uczniowie, nadal pracując w grupach, oglądają animację i korzystając z opracowanego algorytmu, rozwiązują zadania z Poleceń.

3. Wspólna dyskusja - który z algorytmów okazał się najskuteczniejszy?

4. Metodą ja i ty uczniowie w parach rozwiązują ćwiczenia interaktywne (czyli na przemian - jeden z uczniów rozwiązuje ćwiczenie, a drugi sprawdza jego poprawność, w razie wątpliwości, prosząc nauczyciela o pomoc).

**Faza podsumowująca:**

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.

2. Na koniec zajęć nauczyciel prosi uczniów o rozwinięcie zdania: „Na dzisiejszych zajęciach nauczyłam/łem się jak...”.

**Praca domowa:**

1. Zadanie dla kolegi/koleżanki. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują zadania analogiczne do ćwiczeń 7 i 8 z sekcji „Sprawdź się”. Następnie przesyłają je do siebie mailem, rozwiązują i na następnej lekcji porównują wyniki.

- Sinus, cosinus i tangens kąta ostrego

**Wskazówki metodyczne**:

Animacja może być wykorzystana na zajęciach poświęconych zastosowaniu funkcji trygonometrycznych w zadaniach geometrycznych.