



Ciąg arytmetyczny – pojęcie

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Letnie igrzyska olimpijskie uważane są za największe i najbardziej prestiżowe zawody sportowe na świecie. Odbývają się cyklicznie, co 4 lata, począwszy od pierwszej olimpiady, która odbyła się w 1896 r. W matematyce odpowiednikami zdarzeń powtarzających się w stałych odstępach czasu są wyrazy ciągu arytmetycznego.

W tym materiale poznamy właśnie ciąg arytmetyczny i jego podstawowe własności.



Paavo Nurmi zapala znicz olimpijski w 1952 r.
Źródło: dostępny w internecie: commons.wikimedia.org,
licencja: CC BY 4.0.

- Rozpoznaś wśród innych ciągów ciąg arytmetyczny.
- Podasz przykład ciągu arytmetycznego.
- W danym ciągu arytmetycznym określisz pierwszy wyraz i różnicę ciągu.
- Mając pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego, określisz kilka wyrazów ciągu.
- Znając wzór ogólny ciągu arytmetycznego, określisz jego pierwszy wyraz, różnicę, konkretny wyraz ciągu.

Przeczytaj

Przyjrzyjmy się poniższym ciągom.

- Ciąg liczb naturalnych: $0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, n + 1, \dots$
- Ciąg liczb parzystych: $0, 2, 4, 6, \dots, 2n, 2n + 2, \dots$
- Ciąg kolejnych wielokrotności liczby 7: $0, 7, 14, 21, 28, \dots, 7n, 7n + 7, \dots$

Zauważmy, że w każdym z ciągów różnica między kolejnymi wyrazami jest stała i równa odpowiednio: 1, 2, 7. Zatem kolejne wyrazy ciągów powstają przez dodanie do wyrazu poprzedniego tej samej liczby. O ciągach mających taką własność mówimy, że są to ciągi arytmetyczne.

Ciągi arytmetyczne mogą być ciągami nieskończonymi, bądź skończonymi. Ale aby stwierdzić czy dany ciąg jest arytmetyczny, ten ciąg musi mieć co najmniej trzy wyrazy.

Będziemy przy tym zakładać, że dany ciąg, np. ciąg (a_n) , jest określony dla $n \geq 1$ i $n \in \mathbb{N}$.

Definicja: Ciąg arytmetyczny

Ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu.

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r , to dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwa jest równość:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Przykład 1

Ciąg $(-1, 3, 7)$ jest ciągiem arytmetycznym, gdyż

$$3 - (-1) = 7 - 3 = 4$$

Liczba 4 jest różnicą tego ciągu.

Przykład 2

Ciąg $(1, 6, 12)$ nie jest ciągiem arytmetycznym, bo drugi wyraz powstaje z pierwszego poprzez dodanie liczby 5, ale trzeci wyraz powstaje z drugiego poprzez dodanie liczby 6.

Ważne!

Ciąg arytmetyczny zwykle określany jest poprzez pierwszy wyraz ciągu i różnicę ciągu.

Przykład 3

Przykłady ciągów arytmetycznych nieskończonych		
Kolejne początkowe wyrazy ciągu	Pierwszy wyraz	Różnica ciągu
1, 4, 7, 10, 13, ...	1	3
-6, -4, -2, 0, 2, 4, ...	-6	2
10, 20, 30, 40, 50, ...	10	10
9, 8, 7, 6, 5, ...	9	-1
$\sqrt{2}$, 0, $-\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$, ...	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$

Ciekawym rodzajem ciągu arytmetycznego jest **ciąg stały**. To znaczy taki, którego różnica jest równa 0.

Przykład 4

Przykłady ciągów stałych		
Kolejne początkowe wyrazy ciągu	Pierwszy wyraz	Różnica ciągu
-1, -1, -1, -1, -1, -1, ...	-1	0
5, 5, 5, 5, 5, ...	5	0
$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, ...	$\frac{1}{3}$	0

Z określenia ciągu arytmetycznego wynika, że różnica między kolejnymi wyrazami jest dla danego ciągu stała, zatem mając pierwszy wyraz i różnicę ciągu, możemy wyznaczyć jego dowolny wyraz. W przypadku ciągu skończonego można wyznaczyć wszystkie wyrazy tego ciągu.

Zatem:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 4r$$

...

...

Twierdzenie: Wyraz ogólny ciągu arytmetycznego

Jeżeli ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r , to dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Na podstawie tego twierdzenia dla $m \in \mathbb{N}_+$ i $k \in \mathbb{N}_+$ możemy napisać:

$$a_m = a_1 + (m - 1) \cdot r$$

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot r$$

Odejmujemy stronami zapisane równości.

$$a_m - a_k = (m - k) \cdot r$$

$$a_m = a_k + (m - k) \cdot r$$

Twierdzenie: Wyraz a_m ciągu arytmetycznego

Jeżeli a_m i a_k to dowolne wyrazy ciągu arytmetycznego (a_n) o różnicy r to

$$a_m = a_k + (m - k) \cdot r$$

Przykład 5

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym. Zapiszemy piąty wyraz ciągu, za pomocą innego wyrazu ciągu i różnicy ciągu.

$$a_5 = a_1 + 4r$$

$$a_5 = a_3 + 2r$$

$$a_5 = a_4 + r$$

Korzystając z twierdzenia o wyrazie ogólnym ciągu arytmetycznego, można udowodnić twierdzenie o wyrazach jednakowo oddalonych od początku i końca ciągu.

Twierdzenie: Twierdzenie o wyrazach jednakowo oddalonych od początku i końcu ciągu

Jeżeli dla wyrazów a_1, a_k, a_m, a_n ciągu arytmetycznego (a_n) zachodzi równość $k + m = 1 + n$ to

$$a_k + a_m = a_1 + a_n$$

Możemy powiedzieć, że w skończonym ciągu arytmetycznym (a_n) o n wyrazach suma wyrazów jednakowo oddalonych od początku i końca ciągu ma stałą wartość, równą $a_1 + a_n$.

Pokażemy teraz zastosowanie poznanych wzorów i twierdzeń.

Przykład 6

Wyznamy wyrazy pięcioelementowego ciągu arytmetycznego (a_n) wiedząc, że jego pierwszy wyraz jest równy 120, a różnica (-6) .

$$a_1 = 120$$

$$a_2 = 120 - 6 = 114$$

$$a_3 = 114 - 6 = 108$$

$$a_4 = 108 - 6 = 102$$

$$a_5 = 102 - 6 = 96$$

Odpowiedź:

Szukany ciąg ma postać: $(120, 114, 108, 102, 96)$.

Znając co najmniej dwa kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego (niekoniecznie początkowe), można wyznaczyć łatwo różnicę tego ciągu.

Ważne!

Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r , to dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ prawdziwa jest równość

$$a_{n+1} - a_n = r$$

Przykład 7

Wiadomo, że trzeci wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 90, a czwarty 270 obliczymy pierwszy wyraz tego ciągu.

Mamy dane dwa kolejne wyrazy ciągu, zatem możemy obliczyć różnicę tego ciągu.

$$a_3 = 90$$

$$a_4 = 270$$

$$r = 270 - 90 = 180$$

Mając trzeci wyraz i różnicę ciągu, można obliczyć pierwszy wyraz.

$$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot 180$$

$$90 = a_1 + 360$$

$$a_1 = 90 - 360 = -270$$

Odpowiedź:

Pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy (-270) .

Przykład 8

Logarytmy czterech liczb dodatnich przy podstawie dwa tworzą **ciąg arytmetyczny**, w którym iloczyn wyrazów skrajnych jest równy (-8) , a iloczyn wyrazów środkowych jest równy 0 . Znajdziemy te liczby.

Oznaczmy:

x, y, z, w – szukane liczby,

r – różnica ciągu,

$$\log_2 x = a.$$

Wtedy:

$$\log_2 y = a + r$$

$$\log_2 z = a + 2r$$

$$\log_2 w = a + 3r$$

Na podstawie treści zadania zapisujemy układ równań.

$$\begin{cases} a(a + 3r) = -8 \\ (a + 2r)(a + r) = 0 \end{cases}$$

Otrzymujemy dwa układy równań.

$$\begin{cases} a + 2r = 0 \\ a(a + 3r) = -8 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a + r = 0 \\ a(a + 3r) = -8 \end{cases}$$

1. Rozwiązujemy pierwszy z układów.

$$\begin{cases} a + 2r = 0 \\ a(a + 3r) = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2r \\ -2r \cdot r = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2r \\ r^2 = 4 \end{cases}$$

Drugie równanie ma dwa rozwiązania $r_1 = 2, r_2 = -2$.

$$r_1 = 2 \text{ i } a_1 = -4, \text{ stąd } \log_2 x_1 = -4 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{16}$$

Wyznaczamy pozostałe wyrazy ciągu.

$$\log_2 y_1 = -2 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{4}$$

$$\log_2 z_1 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$$

$$\log_2 w_1 = 2 \Rightarrow w_1 = 4$$

Szukane liczby to: $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4$.

$$r_2 = -2 \text{ i } a_2 = 4, \text{ stąd } \log_2 x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 16$$

Wyznaczamy pozostałe wyrazy ciągu.

$$\log_2 y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 4$$

$$\log_2 z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = 1$$

$$\log_2 w_2 = -2 \Rightarrow w_2 = \frac{1}{4}$$

Szukane liczby to: $16, 4, 1, \frac{1}{4}$.

2. Rozwiązujemy drugi z układów.

$$\begin{cases} a + r = 0 \\ a(a + 3r) = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -r \\ r^2 = 4 \end{cases}$$

Drugie równanie ma dwa rozwiązania $r_3 = 2, r_4 = -2$.

$$r_3 = 2 \text{ i } a_3 = -2, \text{ stąd } \log_2 x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4}$$

Wyznaczamy pozostałe wyrazy ciągu.

$$\log_2 y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = 1$$

$$\log_2 z_3 = 2 \Rightarrow z_3 = 4$$

$$\log_2 w_3 = 4 \Rightarrow w_3 = 16$$

Szukane liczby to: $\frac{1}{4}, 1, 4, 16$.

$$r_4 = -2 \text{ i } a_4 = 2, \text{ stąd } \log_2 x_4 = 2 \Rightarrow x_4 = 4$$

Wyznaczamy pozostałe wyrazy ciągu.

$$\log_2 y_4 = 0 \Rightarrow y_4 = 1$$

$$\log_2 z_4 = -2 \Rightarrow z_4 = \frac{1}{4}$$

$$\log_2 w_4 = -4 \Rightarrow w_4 = \frac{1}{16}$$

Szukane liczby to: $4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$.

Odpowiedź:

Są cztery ciągi liczb spełniających warunki zadania:

$(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4), (16, 4, 1, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, 1, 4, 16), (4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16})$.

Słownik

ciąg arytmetyczny

ciągiem arytmetycznym nazywamy ciąg liczbowy co najmniej trzywyrazowy, w którym każdy wyraz, począwszy od drugiego, powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego liczby r , zwanej różnicą ciągu

Animacja

Polecenie 1

Zapoznaj się z animacją. Spróbuj najpierw samodzielnie wykonać zapisane tam zadania, a następnie porównaj z proponowanymi rozwiązaniami.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DWjqmpuSq>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczącej pojęcia ciągu arytmetycznego.

Polecenie 2

Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = -5n + 70$. Określ ile wyrazów tego ciągu jest dodatnich i oblicz najmniejszy z nich.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Ćwiczenie 3



Ćwiczenie 4



Ćwiczenie 5



Ćwiczenie 6



Ćwiczenie 7



Znajdź liczbę x , dla której ciąg $(5x - 1, x^2, 3x + 1)$ jest ciągiem arytmetycznym o wyrazach dodatnich.

Ćwiczenie 8



W ciągu arytmetycznym (a_n) suma wyrazów drugiego i szóstego jest równa 36, a suma wyrazów trzeciego i siódmego jest równa 46. Znajdź wzór ogólny ciągu.

Dla nauczyciela

Autor: Justyna Cybulska

Przedmiot: Matematyka

Temat: Ciąg arytmetyczny – pojęcie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VI. Ciągi. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- 4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- 5) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

Cele operacyjne:

Uczeń:

- rozpoznaje wśród innych ciągów ciąg arytmetyczny
- podaje przykłady ciągów arytmetycznych
- w danym ciągu arytmetycznym określa pierwszy wyraz i różnicę ciągu
- mając pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego, określa kilka wyrazów ciągu
- określa wzór ciągu arytmetycznego jego pierwszy wyraz, różnicę ciągu, konkretny wyraz ciągu

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- fotografia dnia pracy
- technika CPM

Formy pracy:

- praca w grupach
- praca w parach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Uczniowie pracują w grupach metodą *fotografia dnia pracy* – ich zadaniem jest zarejestrowanie najważniejszych wiadomości i umiejętności dotyczących ciągów zdobytych na kilku poprzednich lekcjach. Powinni też zarejestrować kluczowe umiejętności dotyczące ciągów, na których będą mogli bazować, poznając pojęcie ciągu arytmetycznego.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć.
3. Grupy prezentują swoje przemyślenia i zapisują na tablicy te wzory, które będą mogli wykorzystać przy wprowadzaniu pojęcia ciągu arytmetycznego.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie pracują metodą CPM. Grupa 1 i grupa 2 pracują z tekstem z „Przeczytaj”, grupa 3 i 4 analizują materiał zawarty w animacji. Każda grupa opracowuje sieć czynności, którą trzeba wykonać, aby wprowadzić pojęcie ciągu arytmetycznego, wzór ogólny ciągu, zależność między wyrazami ciągu.
2. Grupa 1 i 2 wymieniają się pomysłami i wspólnie ustalają jedną sieć. Podobnie grupa 3 i 4.
3. Teraz grupy układają po 3 zadania, którymi się wymieniają. Otrzymane zadania rozwiązują, korzystając z uzyskanych sieci.
4. Uczniowie pracują w parach. Rozwiązują 3 dowolne zadania spośród ćwiczeń sprawdzających.

Faza podsumowująca:

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.

2. Uczniowie na drzewie ewaluacyjnym zaznaczają stopień zrozumienia tematyki zajęć.
3. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia, których nie rozwiązali w czasie lekcji.

Materiały pomocnicze:

[Ciąg arytmetyczny](#)

Wskazówki metodyczne:

Animację można wykorzystać na zajęciach pokazujących zastosowanie wzoru ogólnego ciągu arytmetycznego.