



Interpretacja współczynników liczbowych występujących we wzorze funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Schemat interaktywny](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



Interpretacja współczynników liczbowych występujących we wzorze funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej

Źródło: Marjan Blan, dostępny w internecie: <https://unsplash.com/>.

Postać kanoniczna wzoru funkcji kwadratowej zawsze istnieje. Do zapisania wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej musimy znać współrzędne wierzchołka paraboli, która jest jej wykresem oraz wartość współczynnika, od którego zależy, w którą stronę są skierowane ramiona paraboli. W materiale dokonamy interpretacji współczynników, które występują we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Bazując na części teoretycznej oraz omówionych przykładach, rozwiążemy ćwiczenia interaktywne.

Twoje cele

- Odczytasz współrzędne wierzchołka paraboli na podstawie wykresu.
- Zinterpretujesz współczynniki liczbowe występujące we wzorze postaci kanonicznej funkcji kwadratowej.
- Zastosujesz poznaną wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Przeczytaj

W materiale omówimy, jakie znaczenie mają współczynniki liczbowe występujące we wzorze funkcji kwadratowej, zapisanym w postaci kanonicznej. Interpretację tych współczynników wykorzystamy do określania różnych własności funkcji kwadratowej.

Przypomnijmy twierdzenie o związku między postacią ogólną a postacią kanoniczną wzoru funkcji kwadratowej.

Twierdzenie: o związku między postacią ogólną a kanoniczną wzoru funkcji kwadratowej

Wzór funkcji kwadratowej zapisany w postaci ogólnej $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$ można zapisać za pomocą wzoru

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a},$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a},$$

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Dowód

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x\right) + c = \\ &= a \cdot \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = \\ &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Otrzymujemy wzór $f(x) = a \cdot (x - p)^2 + q$, gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a},$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

Ze wzoru funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ możemy odczytać:

- wartość współczynnika a , który decyduje o tym, czy ramiona paraboli, która jest wykresem tej funkcji są skierowane do góry, czy do dołu,

- współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej:
 $W = (p, q)$.

Jeżeli znamy wartość p , to:

- osią symetrii paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej jest prosta o równaniu $x = p$,
- dla $a > 0$ funkcja jest malejąca w przedziale $(-\infty, p)$ oraz jest rosnąca w przedziale (p, ∞) ,
- dla $a < 0$ funkcja jest rosnąca w przedziale $(-\infty, p)$ oraz jest malejąca w przedziale (p, ∞) ,
- dla $x = p$ funkcja kwadratowa osiąga wartość najmniejszą/największą,
- jeżeli funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 , to $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Jeżeli znamy wartość q , to:

- dla $a > 0$ zbiorem wartości funkcji jest przedział (q, ∞) ,
- dla $a < 0$ zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty, q)$,
- dla argumentu $x = p$ liczba q jest wartością najmniejszą/największą.

Przykład 1

Dla funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = -(x + 4)^2 - 3$ wyznaczmy:

- przedziały monotoniczności funkcji f ,
- zbiór wartości funkcji f .

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja f jest określona **wzorem w postaci kanonicznej**, zatem ze wzoru odczytujemy, że:

$$a = -1, p = -4, q = -3$$

Wobec tego:

- funkcja f jest rosnąca w przedziale $(-\infty, -4)$,
funkcja f jest malejąca w przedziale $(-4, \infty)$,
- zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, -3)$.

Przykład 2

Dana jest funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x) = \sqrt{3}(x - 2)^2 + q$. Do paraboli, będącej wykresem tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(3, 2\sqrt{3})$.

Wyznamy wartość q oraz podamy współrzędne wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f .

Rozwiązanie:

Ponieważ punkt o współrzędnych $(3, 2\sqrt{3})$ należy do paraboli, będącej wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x) = \sqrt{3}(x - 2)^2 + q$, zatem do wyznaczenia wartości q rozwiązujemy równanie:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot (3 - 2)^2 + q, \text{ czyli } q = \sqrt{3}.$$

Wierzchołek paraboli, która jest wykresem funkcji f ma współrzędne $(2, \sqrt{3})$.

Przykład 3

Do paraboli, będącej wykresem funkcji f określonej wzorem $f(x) = a(x - p)^2 + q$ należy punkt o współrzędnych $(-4, -4)$, a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt o współrzędnych $(-2, -2)$.

Wyznamy wzór funkcji f , a następnie określimy liczbę rozwiązań równania $f(x) = m$, dla $m \in \mathbb{R}$.

Rozwiązanie:

Jeżeli wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji f jest punkt o współrzędnych $(-2, -2)$, to wzór funkcji f możemy zapisać w postaci kanonicznej $f(x) = a(x + 2)^2 - 2$.

Jeżeli punkt o współrzędnych $(-4, -4)$ należy do paraboli, będącej wykresem funkcji f , to do wyznaczenia wartości a rozwiązujemy równanie:

$$-4 = a(-4 + 2)^2 - 2$$

$$\text{Zatem } a = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Wzór funkcji } f \text{ zapisujemy w postaci } f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)^2 - 2.$$

Ponieważ $a = -\frac{1}{2}$, zatem ramiona paraboli, będącej wykresem funkcji f są skierowane do dołu.

Ponieważ wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji f jest punkt o współrzędnych $(-2, -2)$ oraz ramiona tej paraboli są skierowane do dołu, to równanie $f(x) = m$, dla $m \in \mathbb{R}$:

- ma dwa rozwiązania dla $m \in (-\infty, -2)$,
- ma jedno rozwiązanie dla $m = -2$,

- nie ma rozwiązań dla $m \in (-2, \infty)$.

Przykład 4

Przedstawimy funkcję kwadratową określoną wzorem $f(x) = -5x^2 - 20x - 21$ w postaci kanonicznej, a następnie wyznaczymy:

- a. równanie osi symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji f ,
- b. zbiór wartości funkcji f .

Rozwiązanie

Obliczamy:

$$p = \frac{20}{2 \cdot (-5)} = -2$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-21) = 400 - 420 = -20$$

$$q = \frac{20}{4 \cdot (-5)} = -1$$

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = -5(x + 2)^2 - 1$.

- a. Oś symetrii paraboli, będącej wykresem funkcji f jest prosta o równaniu $x = -2$.
- b. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(-\infty, -1]$.

Przykład 5

Wyznamy wzór funkcji $f(x) = -2x^2 + bx + c$ w postaci kanonicznej, jeżeli miejscami zerowymi tej funkcji są liczby, będące rozwiązaniami równania $|x - 2| = 4$.

Rozwiązanie:

Wyznamy miejsca zerowe funkcji f :

$$|x - 2| = 4$$

$$x - 2 = 4 \vee x - 2 = -4$$

$$x = 6 \text{ oraz } x = -2$$

Wobec tego miejscami zerowymi funkcji f są liczby $x_1 = 6$ oraz $x_2 = -2$.

Do wyznaczenia pierwszej współrzędnej p wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji f wykorzystamy wzór $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

$$\text{Zatem } p = \frac{6 + (-2)}{2} = 2.$$

Wobec tego postać kanoniczna funkcji f wyraża się wzorem $f(x) = -2(x - 2)^2 + q$.

Ponieważ liczba 6 jest miejscem zerowym funkcji f , zatem do paraboli, będącej wykresem tej funkcji należy punkt o współrzędnych $(6, 0)$.

Wobec tego podstawiamy współrzędne punktu $(6, 0)$ do wzoru funkcji

$$f(x) = -2(x - 2)^2 + q:$$

$$0 = -2 \cdot (6 - 2)^2 + q$$

$$0 = -2 \cdot 16 + q, \text{ czyli } q = 32$$

Wzór funkcji f w postaci kanonicznej: $f(x) = -2(x - 2)^2 + 32$

Przykład 6

Wykażemy, że jeśli funkcja kwadratowa f jest określona wzorem w postaci ogólnej

$f(x) = ax^2 + bx$ oraz wzorem w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, to $p + q = -\frac{2b+b^2}{4a}$.

Rozwiązanie:

Przekształcimy wzór $f(x) = a(x - p)^2 + q$, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

Zatem

$$f(x) = a \cdot (x - p)^2 + q = a \cdot (x^2 - 2px + p^2) + q =$$

$$= ax^2 - 2apx + ap^2 + q$$

Porównując otrzymany wzór ze wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej otrzymujemy zależności:

$$b = -2ap, \text{ czyli } p = \frac{-b}{2a}$$

$$0 = ap^2 + q, \text{ czyli } q = -ap^2 = -a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 = -a \cdot \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{b^2}{4a}$$

Wobec tego:

$$p + q = -\frac{b}{2a} + \left(-\frac{b^2}{4a}\right) = -\frac{2b+b^2}{4a}$$

Słownik

wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a}$$

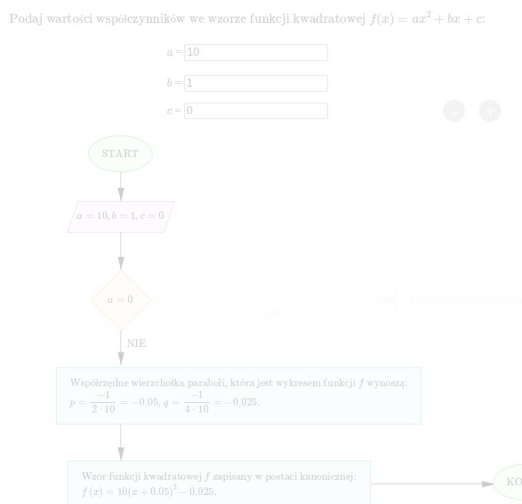
$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Schemat interaktywny

Polecenie 1

Uruchom aplet, a następnie odczytaj współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej.



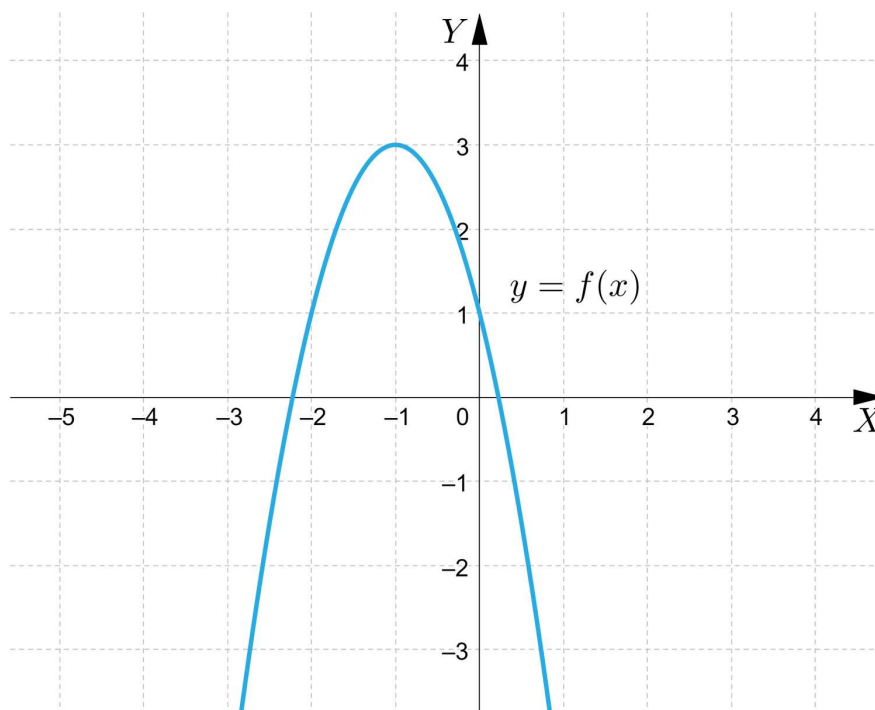
Zasób interaktywny dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/D1DN8dedF>

Polecenie 2

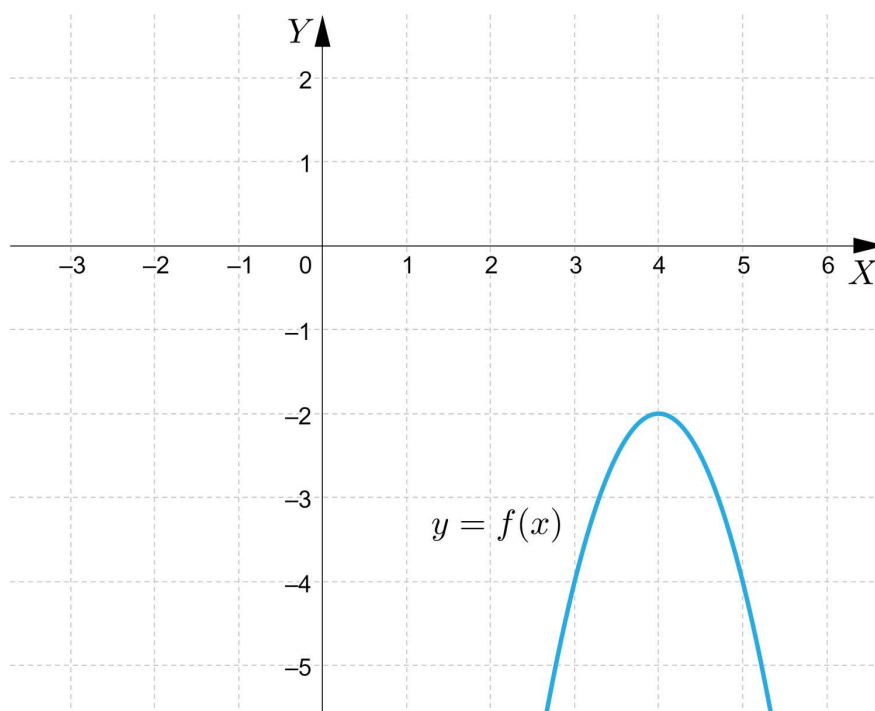
Na rysunkach przedstawiono parabole, będące wykresami funkcji kwadratowych określonych wzorami $f(x) = -2(x - p)^2 + q$.

Odczytaj współrzędne wierzchołka paraboli, a następnie zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

a.



b.



Polecenie 3

W poniższym schemacie przygotuj algorytm zamieniający wzór funkcji kwadratowej postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$ na postać kanoniczną $f(x) = a(x - p) + q$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

Ćwiczenie 1



Ćwiczenie 2



Oceń, czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie stwierdzenia prawdziwe.

☐ Druga współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = -2x^2 - 36x + 18$ wynosi 18.

☐ Suma współrzędnych wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$ wynosi (-2) .

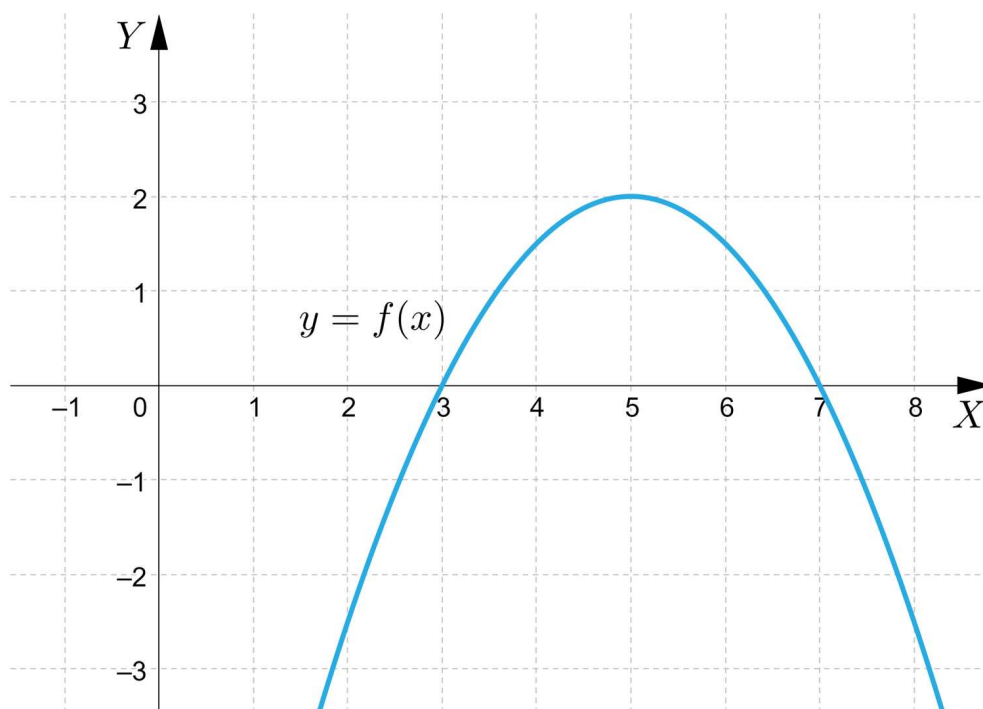
☐ Iloczyn współrzędnych wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ wynosi (-2) .

☐ Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji określonej wzorem $f(x) = -3x^2 - 24x - 50$ wynosi (-4) .

Ćwiczenie 3



Wyznacz postać kanoniczną wzoru funkcji kwadratowej, której wykresem jest parabola przedstawiona na rysunku.



Zaznacz poprawną odpowiedź.

☐ $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 5)^2 - 2$

☐ $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 5)^2 + 2$

☐ $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 5)^2 + 2$

Ćwiczenie 4



Pogrupuj elementy, zgodnie z podanym opisem, przeciągając wzory funkcji we właściwe miejsca.

Wzory funkcji kwadratowych, których wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych $(3, -1)$:

Wzory funkcji kwadratowych, których wykresem jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych $(-3, 1)$:

$$f(x) = -x^2 - 6x - 8$$

$$f(x) = -4x^2 + 24x - 37$$

$$f(x) = 2x^2 + 12x + 19$$

$$f(x) = -4x^2 - 24x - 35$$

$$f(x) = -x^2 + 6x - 10$$

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 17$$

Ćwiczenie 5



Połącz w pary wzór funkcji kwadratowej ze współrzędnymi wierzchołka paraboli, będącej jej wykresem.

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$$

$$(3, -5)$$

$$f(x) = 2(x + 3)^2 + 5$$

$$(-3, -5)$$

$$f(x) = 2(x + 3)^2 - 5$$

$$(-3, 5)$$

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$$

$$(3, 5)$$

Ćwiczenie 6



Zaznacz prawidłowe dokończenie zdania. Wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{6}x + 3\sqrt{3}$ jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne:

☐ $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

☐ $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$.

☐ $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Ćwiczenie 7



Wstaw w tekst odpowiednie liczby

Wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem

$f(x) = -5x^2 + 10x$ jest punkt o współrzędnych (,).

Postać kanoniczna wzoru funkcji wynosi $f(x) = \text{} \cdot (x - 1)^2 + 5$.

Wierzchołkiem paraboli, będącej wykresem funkcji kwadratowej określonej wzorem

$f(x) = 2x^2 + 12x + 14$ jest punkt o współrzędnych (,).

Postać kanoniczna wzoru funkcji wynosi $f(x) = \text{} \cdot (x + 3)^2 - 4$.

-2

-5

1

5

-1

-4

-3

2

Ćwiczenie 8



Wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych $(4, 2)$. Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej, jeżeli wiadomo, że do paraboli, będącej wykresem funkcji f należy punkt o współrzędnych $(0, -2)$.

Dla nauczyciela

Autor: Tomasz Wójtowicz

Przedmiot: Matematyka

Temat: Interpretacja współczynników liczbowych występujących we wzorze funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

Treści nauczania – wymagania szczegółowe:

V. Funkcje. Zakres podstawowy. Uczeń:

8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- wykorzystuje wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej;
- interpretuje współczynniki liczbowe występujące we wzorze funkcji kwadratowej;
- stosuje zdobytą wiedzę do rozwiązywania problemów matematycznych.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja;
- praca z ekspertem;
- giełda pomysłów;
- burza mózgów;

- liga zadaniowa.

Formy pracy:

- praca indywidualna;
- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;
- tablica interaktywna/tablica, pisak/kreda;
- komputery z dostępem do internetu dla uczniów.

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel inicjuje rozmowę wprowadzającą w temat: „Interpretacja współczynników liczbowych występujących we wzorze funkcji kwadratowej zapisanej w postaci kanonicznej”, nawiązuje do wiedzy uczniów z poprzednich lekcji. Przedstawia cel oraz kryteria sukcesu.
2. Uczniowie metodą burzy mózgów przypominają poznane pojęcia związane z tematem lekcji.

Faza realizacyjna:

1. Uczniowie zapoznają się indywidualnie z treścią sekcji „Schemat interaktywny”. Zapisują ewentualne pytania dotyczące napotkanych trudności, po czym następuje dyskusja, w trakcie której nauczyciel wyjaśnia niezrozumiałe elementy z materiału.
2. Przed lekcją nauczyciel wyłania wśród uczniów ekspertów, którzy zapoznają się z materiałem zawartym w sekcji „Przeczytaj”. Na lekcji uczniowie pracują w grupach pod kierunkiem ekspertów. Eksperci proponują grupom rozwiązywanie zadań, które przygotowali w domu (zadania oparte na przykładach z sekcji „Przeczytaj”). W razie problemów – służą pomocą, wyjaśniają niezrozumiałe elementy.
3. Uczniowie w kolejnym kroku rozwiązują ćwiczenia nr 1 i 2 z sekcji „Sprawdź się”. Każdy z uczniów robi to samodzielnie. Po ustalonym czasie wybrani uczniowie przedstawiają rozwiązania. Nauczyciel w razie potrzeby koryguje odpowiedzi, dopowiada istotne informacje, udziela uczniom informacji zwrotnej.
4. Nauczyciel dzieli klasę na 4-osobowe grupy. Uczniowie biorą udział w lidze zadaniowej. Rozwiązują zadania 3-8 z sekcji „Sprawdź się” na czas (od zadania łatwiejszego do trudniejszych). Grupa, która poprawnie rozwiąże zadania jako pierwsza, wygrywa, a nauczyciel nagradza uczniów ocenami za aktywność. Rozwiązania są prezentowane na forum klasy i omawiane krok po kroku.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Wybrany uczeń podsumowuje zajęcia, zwracając uwagę na nabyte umiejętności, odnosząc się do wyświetlonych na tablicy interaktywnej celów z sekcji „Wprowadzenie”.

Praca domowa:

1. Uczniowie dobierają się w pary i opracowują domino matematyczne, składające się z 10 kostek. Na każdej kostce znajduje się wzór funkcji kwadratowej, zapisany w postaci ogólnej i kanonicznej. Na następnej lekcji uczniowie wymieniają się przygotowanymi zestawami i sprawdzają ich poprawność.

Materiały pomocnicze:

- [Zależność między wartościami współczynników występujących we wzorach funkcji kwadratowej zapisanej w postaci ogólnej i kanonicznej](#)

Wskazówki metodyczne:

- Materiał w sekcji „Schemat interaktywny” można wykorzystać do pracy przed lekcją. Uczniowie zapoznają się z jego działaniem i przygotowują do pracy na zajęciach w ten sposób, aby móc samodzielnie rozwiązywać zadania dotyczące postaci kanonicznej funkcji kwadratowej.
- „Schemat interaktywny” można wykorzystać do określania własności funkcji oraz wykresu funkcji kwadratowej na podstawie wzoru tej funkcji zapisanego w postaci kanonicznej.