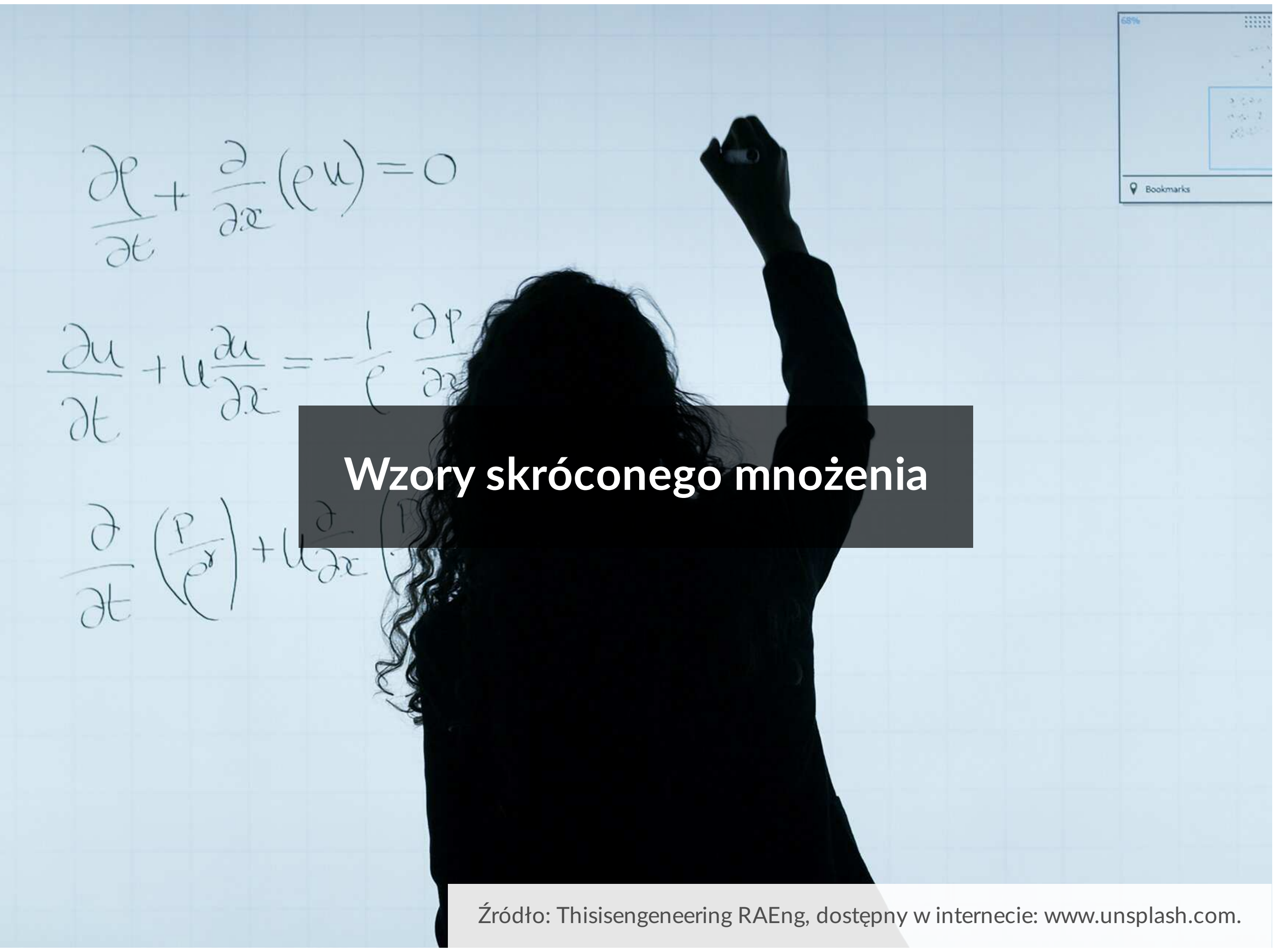
Wzory skróconego mnożenia

Wzory skróconego mnożenia



Źródło: Thisisengeneering RAEng, dostępny w internecie: www.unsplash.com.

W tej lekcji omówimy pewne trzy szczególne wzory wynikające z zastosowania prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania. Należą one do tak zwanych **wzorów skróconego mnożenia**.

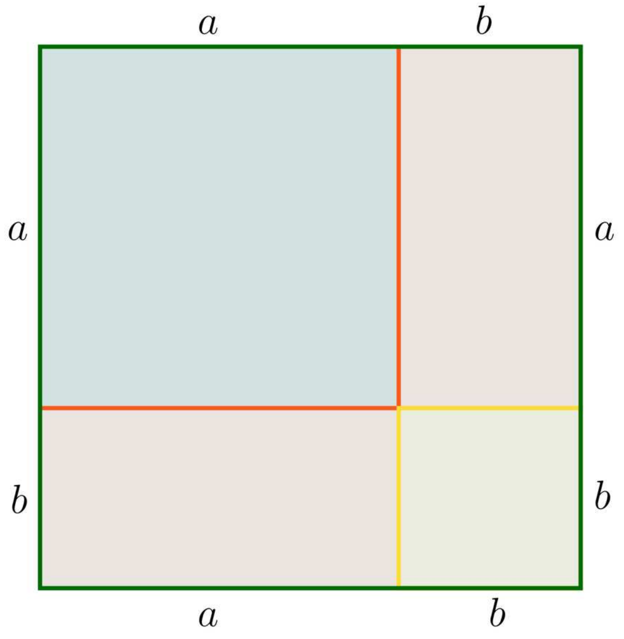
W praktyce szkolnej szczególnie istotne są zastosowania trzech z nich: wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy, wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy i wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

Twoje cele

- Rozwiążesz zadania, wykorzystując wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy oraz wzór na kwadrat różnicy.
- Przekształcisz wyrażenia algebraiczne, wykorzystując wzory skróconego mnożenia.
- Wykonując obliczenia w zadaniach, zastosujesz odpowiedni wzór skróconego mnożenia.

Przeczytaj

Spójrzmy na poniższy rysunek.



Pole dużego kwadratu (o zielonych bokach) jest równe:

$$P = (a + b)^2$$

Jednocześnie jest ono równe sumie pól dwóch kwadratów (o bokach a oraz b) i dwóch prostokątów (o wymiarach $a \times b$), więc:

$$P = a^2 + 2ab + b^2$$

A zatem zachodzi równość:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Powyższa równość jest prawdziwa także wtedy, gdy zamiast b podstawimy $-b$, co prowadzi do twierdzenia, które warto znać na pamięć.

> **Twierdzenie: o kwadracie sumy (różnicy) dwóch wyrażeń**
>
> Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwe są wzory:
>
> $$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
>
> $$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Uwaga!
Pierwszy ze wzorów nazywa się wzorem skróconego mnożenia na **kwadrat sumy**, a drugi - wzorem skróconego mnożenia na **kwadrat różnicy**.

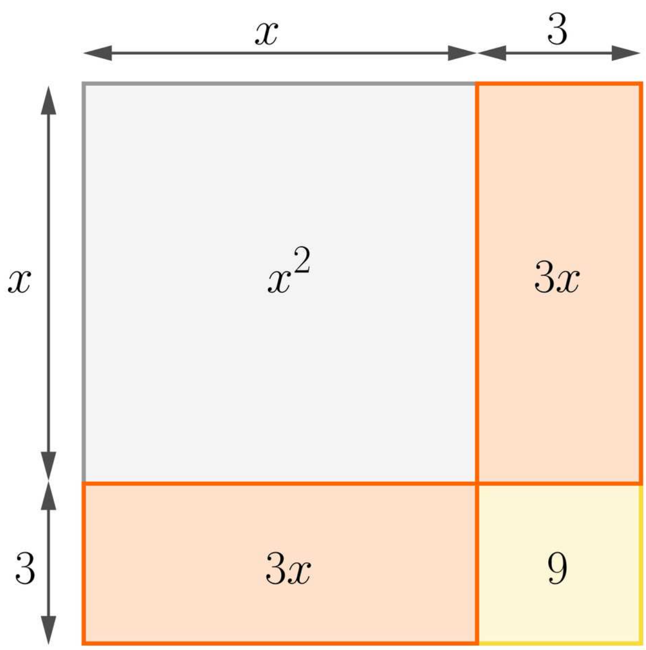
Przykład 1

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(2-y)^2 = 4 - 4y + y^2$

Przykład 2

Geometryczna interpretacja wzoru: $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ przedstawiona jest na rysunku poniżej.



Przykład 3

Aby obliczyć w pamięci 102^2, podstawiamy do wzoru na kwadrat sumy $a = 100$ i $b = 2$.

Wtedy:

$102^2 = (100+2)^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404.$

Zajmiemy się teraz trzecim ze wzorów skróconego mnożenia.

Twierdzenie: o różnicy kwadratów dwóch wyrażeń

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi wzór:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

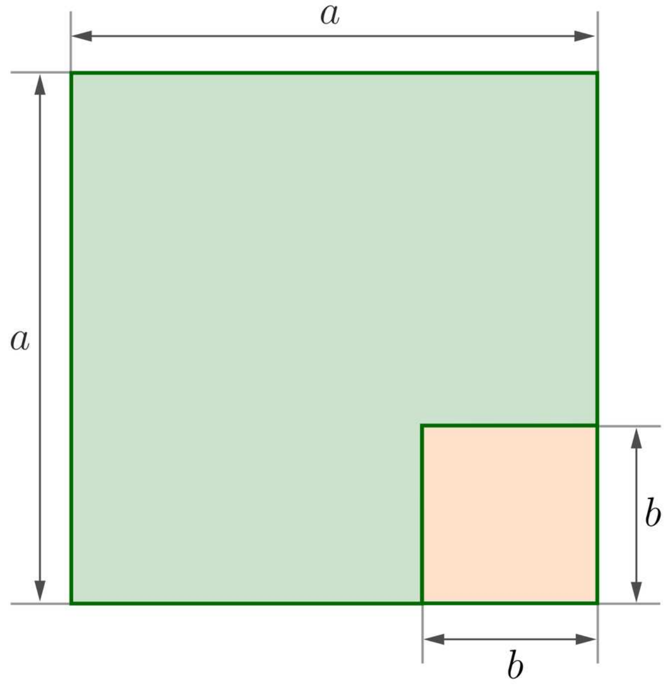
Dowód

Wystarczy zauważyć, że:

$$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Uwaga!
Wyprowadzony wzór nazywa się wzorem skróconego mnożenia na **różnicę kwadratów.**

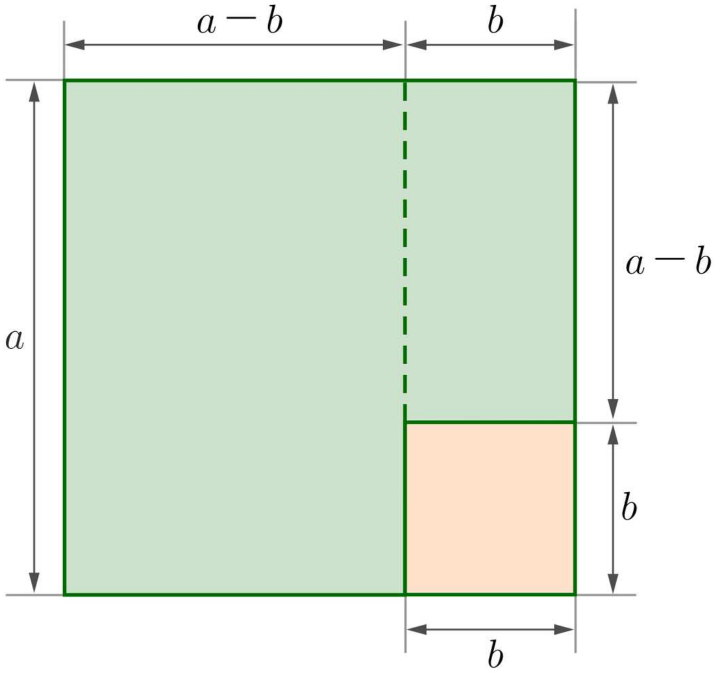
Wzór ten ma także odpowiednią interpretację geometryczną.
Aby ją poznać, obliczymy na dwa sposoby pole P zielonej figury prezentowanej na rysunku poniżej.



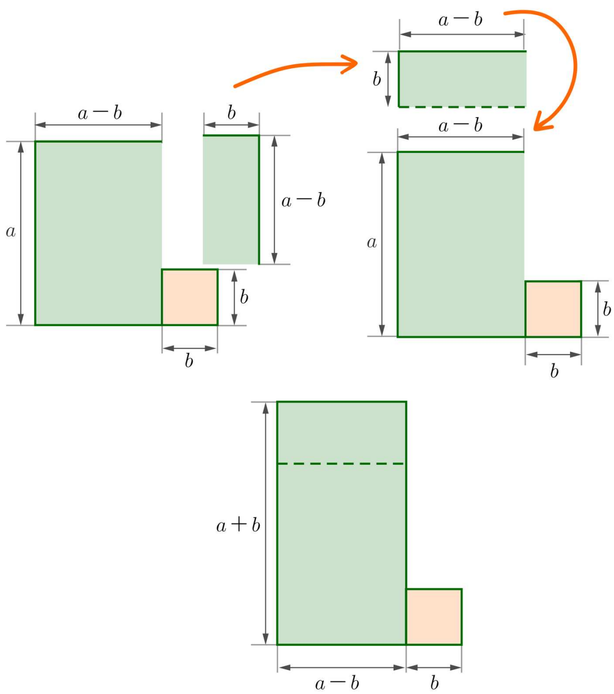
Zielona figura powstaje z dużego kwadratu o boku a przez odcięcie małego kwadratu o boku b, więc:

$$P = a^2 - b^2$$

Zieloną figurę można też rozciąć na dwa prostokąty, z których da się złożyć prostokąt o bokach $a+b$ oraz $a-b$.
Dzielimy ją wzdłuż linii przerywanej, jak na poniższym rysunku.



Jeżeli teraz dwa zielone prostokąty, otrzymane w wyniku proponowanego cięcia:
mniejszy prostokąt, o wymiarach $b \times (a-b)$,
oraz większy prostokąt, o wymiarach $a \times (a-b)$
skleimy bokiem o długości $a-b$, to otrzymamy zielony prostokąt o wymiarach $(a+b) \times (a-b)$:



A zatem prawdziwa jest także równość:

$$P = (a+b)(a-b).$$

W ten sposób powyższe twierdzenie udowodniliśmy także geometrycznie.

Ze wzoru na różnicę kwadratów możemy korzystać „w obydwie strony”. Stosując go od strony lewej do prawej, pozbywamy się nawiasów w iloczynie sumy i różnicy.

Przykład 4

$(x+1)(x-1)=x^2-1$ oraz $(x+3)(x-3)=x^2-9$.

Przykład 5

Wykażemy, że liczba $\left(\sqrt{11}-3\right)\left(\sqrt{11}+3\right)$ jest całkowita.

Ze wzoru skróconego mnożenia mamy:

$$\left(\sqrt{11}-3\right)\left(\sqrt{11}+3\right)=\sqrt{11}^2-3^2=11-9=2,$$

a więc liczba $\left(\sqrt{11}-3\right)\left(\sqrt{11}+3\right)$ jest całkowita.

Przykład 6

Korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów, pozbędziemy się niewymierności w mianowniku liczby $\frac{6}{\sqrt{11}-3}$.

Zauważmy, że przydatny będzie wynik otrzymany w przykładzie 5.
Możemy – wykorzystując wzór skróconego mnożenia – rozszerzyć zadany ułamek tak, aby otrzymać w mianowniku liczbę wymierną.

Pomnóżmy licznik i mianownik zadanego ułamka przez $\sqrt{11}+3$. Otrzymamy wtedy:

$$\frac{6}{\sqrt{11}-3}=\frac{6\cdot\left(\sqrt{11}+3\right)}{\left(\sqrt{11}-3\right)\cdot\left(\sqrt{11}+3\right)}=\frac{6\cdot\left(\sqrt{11}+3\right)}{2}=3\cdot\left(\sqrt{11}+3\right)$$

Ważne!

Zauważmy, że $3\cdot\left(\sqrt{11}+3\right)=3\sqrt{11}+9=\sqrt{9\cdot 11}+9=\sqrt{99}+9\in(18,19)$,

a więc bez trudu możemy oszacować sumę $3\cdot\left(\sqrt{11}+3\right)$ z dokładnością do całości.

Używając prostego kalkulatora sprawdzimy też, że
$3\left(\sqrt{11}+3\right)=\sqrt{99}+9=18.94987437\ldots$.

Natomiast oszacowanie tej samej liczby, ale zapisanej jako $\frac{6}{\sqrt{11}-3}$ nie jest już takie wygodne.

Powyższa umiejętność, czyli usuwanie niewymierności z mianownika, okaże się przydatna w wielu zastosowaniach.

Stosowanie wzoru od strony prawej do lewej pozwala przedstawiać różnicę kwadratów w postaci iloczynu sumy i różnicy.

Przykład 7

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

oraz

$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$.

Przykład 8

Obliczymy w pamięci różnicę $996^2 - 4^2$. Otrzymujemy:
$996^2 - 4^2 = (996-4)(996+4) = 992 \cdot 1000$,

więc różnica ta jest równa 992 000.

Przykład 9

Wykażemy, że różnica $245^2 - 155^2$ dzieli się przez 9000. Ponieważ:
$245^2 - 155^2 = (245-155)(245+155) = 90 \cdot 400 = 9000 \cdot 4$,

więc różnica ta jest podzielna przez 9000.

Przykład 10

Wykażemy, że każda z liczb:

$a = \frac{8}{\sqrt{5}-1} - 2\sqrt{5}$ oraz $b = 7\sqrt{2} + \frac{84}{5-3\sqrt{2}+\sqrt{7}} - 5\sqrt{14} - 6\sqrt{7}$

jest całkowita.

Liczbę a przekształcimy dwoma sposobami.

I sposób: usuniemy niewymierności występujące w mianownikach ułamków zapisanych w podanych wyrażeniach.

$$a = \frac{8}{\sqrt{5}-1} - 2\sqrt{5} = \frac{8\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)} - 2\sqrt{5} = \frac{8\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1} - 2\sqrt{5} =$$

$$= \frac{8\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} - 2\sqrt{5} = 2\left(\sqrt{5}+1\right) - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 2 - 2\sqrt{5} = 2,$$

zatem a jest liczbą całkowitą. Koniec dowodu.

II sposób: sprowadzimy wyrażenia do wspólnego mianownika.

$$a = \frac{8}{\sqrt{5}-1} - 2\sqrt{5} = \frac{8}{\sqrt{5}-1} - \frac{2\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5}-1} = \frac{8-2\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{5}-1} =$$

$$= \frac{8-2\cdot 5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\left(\sqrt{5}-1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)} = 2,$$

czyli a jest liczbą całkowitą. Koniec dowodu.

W przypadku liczby b najpierw usuniemy niewymierność z mianownika ułamka $\frac{84}{5-3\sqrt{2}+\sqrt{7}}$.

Zauważmy, że

$$\frac{84}{5-3\sqrt{2}+\sqrt{7}} = \frac{84}{\sqrt{25}-\sqrt{18}+\sqrt{7}} = \frac{84\cdot\left(\sqrt{25}+\left(\sqrt{18}-\sqrt{7}\right)\right)}{\left(\sqrt{25}-\left(\sqrt{18}-\sqrt{7}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{25}+\left(\sqrt{18}-\sqrt{7}\right)\right)} =$$

$$= \frac{84\cdot\left(5+3\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{\sqrt{25}^2-\left(\sqrt{18}-\sqrt{7}\right)^2} = \frac{84\cdot\left(5+3\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{25-\left(\sqrt{18}^2-2\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}^2\right)} = \frac{84\cdot\left(5+3\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{25-\left(25-6\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\right)} =$$

$$= \frac{6\cdot 14\cdot\left(5+3\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{25-25+6\sqrt{14}} = \frac{6\cdot\sqrt{14}^2\cdot\left(5+3\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{6\sqrt{14}} = \sqrt{14}\cdot\left(5+3\sqrt{2}-\sqrt{7}\right) =$$

$$= 5\sqrt{14} + 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{14} - \sqrt{7}\cdot\sqrt{14} = 5\sqrt{14} + 6\sqrt{7} - 7\sqrt{2}.$$

Oznacza to, że $b = 7\sqrt{2} + \left(5\sqrt{14} + 6\sqrt{7} - 7\sqrt{2}\right) - 5\sqrt{14} - 6\sqrt{7} = 0$, a więc b jest liczbą całkowitą. Koniec dowodu.

Przykład 11

Wykażemy, że każda z liczb:

$$x = \sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} \text{ oraz } y = \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{5}$$

jest całkowita.

Liczbę x przekształcimy dwoma sposobami.

I sposób. Zauważmy, że $17-12\sqrt{2} = \sqrt{289} - \sqrt{288} > 0$, a więc $x > 0$, jako suma dwóch liczb dodatnich.

Obliczymy x^2, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy:

$$x^2 = \left(\sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}}\right)^2 =$$

$$= \sqrt{17+12\sqrt{2}}^2 + 2\cdot\sqrt{17+12\sqrt{2}}\cdot\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}}^2 =$$

$$= 17+12\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{\left(17+12\sqrt{2}\right)\cdot\left(17-12\sqrt{2}\right)}+17-12\sqrt{2} =$$

$$= 34+2\cdot\sqrt{17^2-\left(12\sqrt{2}\right)^2} = 34+2\cdot\sqrt{289-288} = 36.$$

Zatem $x=\sqrt{36}=6$, a to jest liczba całkowita. Koniec dowodu.

II sposób.

Zauważmy, że

$$17\pm 12\sqrt{2} = 17\pm 2\cdot\left(6\sqrt{2}\right) = \left(3^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)\pm 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2} = \left(3\pm 2\sqrt{2}\right)^2,$$

skąd

$$x = \sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2} = \left|3+2\sqrt{2}\right|+\left|3-2\sqrt{2}\right| =$$

$= 3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6$, a więc x jest liczbą całkowitą. Koniec dowodu.

W przypadku liczby y skorzystamy z pomysłu przedstawionego powyżej w II sposobie rozwiązania.

Ponieważ $14-6\sqrt{5} = 14-2\cdot 3\sqrt{5} = \left(3^2+\sqrt{5}^2\right)-2\cdot 3\cdot\sqrt{5} = \left(3-\sqrt{5}\right)^2$ oraz $3-\sqrt{5}>0$, więc

$y=\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{5} = \sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{5} = \left(3-\sqrt{5}\right)+\sqrt{5} = 3$, a to oznacza, że y jest liczbą całkowitą. Koniec dowodu.

Słownik

wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, prawdziwy dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b

wzór skróconego mnożenia na kwadrat różnicy

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, prawdziwy dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b

wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, prawdziwy dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b

Prezentacja multimedialna

Polecenie 1

Zapoznaj się z prezentacją multimedialną, w której pokazujemy, jak wykorzystywać wzory skróconego mnożenia w obliczeniach, a następnie wykonaj poniższe polecenia.

Polecenie 2

Zapisz bez użycia nawiasów:

a) $(2x+y)^2$;

b) $(3a-5b)^2$;

c) $(2a-y)(2a+y)-4a^2$.

Polecenie 3

Wykaż, że:

a) różnica 299^2-199^2 dzieli się przez 200,

b) suma $4^{19}+2^{20}+1$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Polecenie 4

Oblicz wartość wyrażenia c^4+d^4, wiedząc, że $c+d=2$ oraz $c^2+d^2=5$.

Polecenie 5

Rozstrzygnij, czy podana liczba jest całkowita.

a) $a = \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{7}+3} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$,

b) $b = \sqrt{32 + 10\sqrt{7}} + \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

Dokończ zdanie, wybierając poprawną odpowiedź.
Dla każdego x wyrażenie $(2x-0,5)^2$ jest równe:

- $4x^2-4x+0,25$
- $4x^2-2x+0,25$
- $4x^2-0,25$
- $4x^2+0,25$

Ćwiczenie 2

Uzupełnij lukę w zdaniu, przeciągając w nią odpowiednie wyrażenie.

Krawędź sześcianu jest równa 1. Jeżeli zwiększymy ją o a, to pole powierzchni sześcianu powiększy się o ______.

$12a^2+6a$ | $6a^2+12a$ | $6a$ | $6a^2$

Ćwiczenie 3

Ćwiczenie 4

Dane są takie liczby x i y, że $x+y=\sqrt{33-8\sqrt{17}}$ oraz $x-17=y+\sqrt{272}$.
Oblicz x^2-y^2.
W poniższe pola wpisz kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Ćwiczenie 5

Dla pewnej liczby rzeczywistej a zachodzi równość $a + \frac{2}{a} = 5$.
Oceń, czy poniższe nierówności są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie nierówności prawdziwe.

- [ ] $a^4 + \frac{16}{a^4} < 500$
- [ ] $a^2 + \frac{4}{a^2} < 25$
- [ ] $a^4 + \frac{16}{a^4} > 433$
- [ ] $a^2 + \frac{4}{a^2} > 21$

Ćwiczenie 6

Poniżej przedstawiono pewne liczby. Połącz w pary te, które są sobie równe.

$\frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} - \sqrt{12}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{17}} - \sqrt{17}$
$\frac{11}{5\sqrt{3}-8}$	$\left(\sqrt{11} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{11} + \sqrt{2}\right)$
$\frac{27}{2\sqrt{11}+\sqrt{17}} + \sqrt{17}$	$3 + \frac{30}{\sqrt{27}-3}$
$\frac{18\sqrt{17}}{7\sqrt{2}+\sqrt{17}-9} - \frac{81}{7\sqrt{2}+\sqrt{17}}$	$\frac{28}{5-\sqrt{11}} - 10$

Ćwiczenie 7

Suma obwodów dwóch kwadratów jest równa $4k$, a pola tych kwadratów różnią się o $k^2 - 50k$, gdzie k jest liczbą całkowitą większą od 50.
Oceń, czy poniższe zdania są prawdziwe, czy fałszywe. Zaznacz wszystkie zdania prawdziwe.

- [ ] Dla każdej wartości $k > 50$ pole większego kwadratu jest mniejsze od $2k^2 - 4375$.
- [ ] Dla każdej wartości $x > 50,4$ suma pól tych kwadratów jest większa od $(k - 86)^2$.
- [ ] Dla każdej wartości $k > 50$ bok większego kwadratu jest większy od 30.
- [ ] Dla każdej wartości $k > 50$ bok mniejszego kwadratu jest większy od 20.

Ćwiczenie 8

Rozpatrujemy wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których suma $n^2 + n + 119$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wyznacz sumę S tych wszystkich liczb. Otrzymaną liczbę wpisz w wyznaczone pole.

$S =$ ______

Dla nauczyciela

Autor: Witold Sadowski, Paweł Kwiatkowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Wzory skróconego mnożenia

Grupa docelowa:

Szkoła ponadpodstawowa, liceum ogólnokształcące, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1. stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n;

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje cyfrowe;
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się;
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii.

Cele operacyjne:

Uczeń:

- przekształca wyrażenia zawierające wzory skróconego mnożenia,
- usuwa niewymierności z mianownika ułamka z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia,
- analizuje problem w zdaniu, opisuje go za pomocą wyrażeń algebraicznych stosując wzory skróconego mnożenia.

Strategie nauczania:

- konstruktywizm;
- konektywizm.

Metody i techniki nauczania:

- odwrócona klasa;

- metoda stolików eksperckich.

Formy pracy:

- praca w grupach;
- praca całego zespołu klasowego.

Środki dydaktyczne:

- komputery z głośnikami, słuchawkami i dostępem do internetu;
- zasoby multimedialne zawarte w e-materiale;

Przebieg lekcji

Przed lekcją:

Nauczyciel prosi uczniów o zapoznanie się w domu z zagadnieniami, które będą poruszane podczas lekcji oraz przeanalizowanie przykładów w części Przeczytaj.

Faza wstępna:

Nauczyciel przedstawia uczniom temat i cele zajęć, następnie wspólnie z uczniami kryteriów sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel dzieli klasę na dwa zespoły. Następnie w obu zespołach wyróżnia po trzy grupy. Każdy uczeń w grupie dostaje kartę pracy grupy, grupy mają przydzielone do rozwiązania różne polecenia (2-5) w sekcji Prezentacji multimedialnej.
2. Uczniowie pracują w grupach, analizują zadania przedstawione w prezentacji multimedialnej. Następnie rozwiązują polecenia, dzięki czemu stają się ekspertami z zakresu zadań znajdujących się na swojej karcie pracy.
3. Po skończonej pracy, zweryfikowanej przez nauczyciela grupy tworzą nowe zespoły odliczając od 1 do 4. Jedynki tworzą nową grupę, dwójki podobnie itd. Każdy zespół składa się z ekspertów, którzy na forum nowej grupy dzielą się swoją wiedzą i rozwiązują ćwiczenia interaktywne 1-6 w sekcji Sprawdź się.

Faza podsumowująca:

1. Omówienie ewentualnych problemów z rozwiązaniem ćwiczeń z sekcji „Sprawdź się”.
2. Nauczyciel podsumowują przebieg zajęć. Wybrani uczniowie z każdego zespołu wskazują mocne i słabe strony pracy uczniów w swoich zespołach.

Praca domowa:

Uczniowie rozwiązują ćwiczenia 7 i 8 w sekcji „Sprawdź się”.

Materiały pomocnicze:

- Wzory skróconego mnożenia. Zadania, zadania generatorowe

Wskazówki metodyczne:

Prezentacja multimedialna może być wykorzystana w tematach związanych z przekształcaniem wyrażeń algebraicznych.