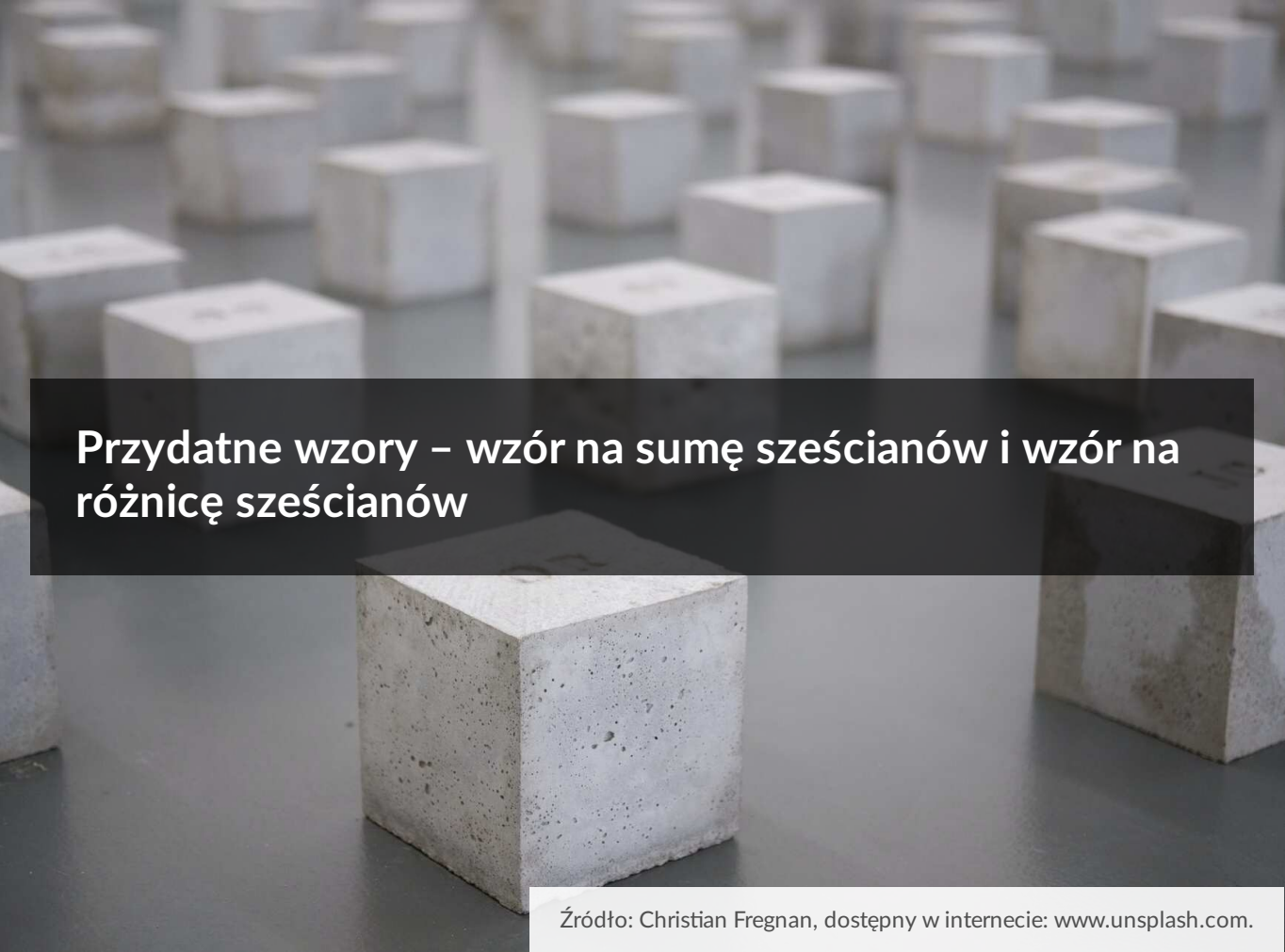




## Przydatne wzory – wzór na sumę sześciątów i wzór na różnicę sześciątów

- [Wprowadzenie](#)
- [Przeczytaj](#)
- [Animacja](#)
- [Sprawdź się](#)
- [Dla nauczyciela](#)



## Przydatne wzory – wzór na sumę sześciątów i wzór na różnicę sześciątów

Źródło: Christian Fregnan, dostępny w internecie: [www.unsplash.com](https://www.unsplash.com).

Starożytni filozofowie uwielbiali zagadki. Niektóre z nich stanowią do dziś nierozwiązane problemy matematyczne!

Jednym z czołowych twórców zagadek był Diofantos. Oto jedna z nich:

*Czy każdą liczbę całkowitą można zapisać za pomocą sumy sześciątów trzech liczb całkowitych?*

Rozwiązanie tej zagadki prowadzi do równania z trzema niewiadomymi, będącymi liczbami całkowitymi, czyli równania typu zwanego dziś diofantycznym.

Równania takie próbuje się obecnie rozwiązywać za pomocą komputerów, albo ... wzorów skróconego mnożenia stopnia trzeciego. I właśnie te wzory zastosujemy, rozwiązując może mniej ambitne, ale być może ciekawsze problemy matematyczne. Co prawda w tym materiale będziemy opierać się tylko na wzorze na sumę sześciątów i wzorze na różnicę sześciątów, ale i tak pokażemy rozliczne ich wykorzystanie.

### Twoje cele

- Przekształcisz wyrażenia algebraiczne, stosując wzory skróconego mnożenia na sumę sześciątów oraz na różnicę sześciątów.
- Rozwiążesz równania stopnia trzeciego.
- Udowodnisz twierdzenia z teorii liczb, wykorzystując aparat algebraiczny.

- Rozłóżysz na czynniki wielomian, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia.

# Przeczytaj

---

Wzory skróconego mnożenia często są pomocne w dowodzeniu twierdzeń z teorii podzielności, czy rozkładzie wyrażeń algebraicznych na czynniki. W tym materiale przykłady takich zastosowań wzoru na sumę sześciąt oraz wzoru na różnicę sześciąt.

## Przykład 1

Pokażemy najpierw sposób wyprowadzenia [wzoru na sumę sześciąt](#), co pomoże zrozumieć niuanse algebraiczne związane z tym wzorem.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DIE8JECJ4>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący sumy sześciąt.

---

**Wzór na sumę sześciąt:**

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

W podobny sposób, jak w Przykładzie 1, można wyprowadzić wzór na różnicę sześciąt.

**Wzór na różnicę sześciąt:**

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

## Przykład 2

Wykażemy, że wartość wyrażenia  $A = (n - 1)^3 - 2n^3 + (n + 1)^3$  dla każdej liczby naturalnej  $n$  jest liczbą podzielną przez 6.

Przekształcamy wyrażenie tak, aby skorzystać ze wzoru na sumę sześciąt.

$$A = (n - 1)^3 - 2n^3 + (n + 1)^3$$

$$A = (n - 1)^3 + (n + 1)^3 - 2n^3$$

$$A = \left[ (n - 1)^3 + (n + 1)^3 \right] - 2n^3$$

$$A = (n - 1 + n + 1) \cdot \left[ (n - 1)^2 - (n - 1)(n + 1) + (n + 1)^2 \right] - 2n^3$$

W dalszych przekształceniach wykorzystamy wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy oraz wzór na kwadrat różnicy.

$$A = 2n \cdot (n^2 - 2n + 1 - n^2 + 1 + n^2 + 2n + 1) - 2n^3$$

$$A = 2n \cdot (n^2 + 3) - 2n^3$$

$$A = 6n$$

Iloczyn liczby 6 i liczby naturalnej jest liczbą podzielną przez 6, co należało wykazać.

### Przykład 3

Wykażemy, że każda liczba rzeczywista spełnia równanie

$$(x + 3)^3 - 3(x + 2)^3 + 3(x + 1)^3 = 6 + x^3.$$

Przekształcamy równanie, grupując odpowiednio wyrazy.

$$(x + 3)^3 - 3(x + 2)^3 + 3(x + 1)^3 = 6 + x^3$$

$$\left[ (x + 3)^3 - x^3 \right] - \left[ 3(x + 2)^3 - 3(x + 1)^3 \right] = 6$$

$$\left[ (x + 3)^3 - x^3 \right] - 3 \left[ (x + 2)^3 - (x + 1)^3 \right] = 6$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę sześcianów i przekształcamy pierwszy składnik.

$$\left[ (x + 3 - x)(x^2 + 6x + 9 + x^2 + 3x + x^2) \right] - 3 \left[ (x + 2)^3 - (x + 1)^3 \right] = 6$$

$$3(3x^2 + 9x + 9) - 3 \left[ (x + 2)^3 - (x + 1)^3 \right] = 6 \quad | : 3$$

$$(3x^2 + 9x + 9) - \left[ (x + 2)^3 - (x + 1)^3 \right] = 2$$

Korzystamy ze [wzoru skróconego mnożenia na różnicę sześcianów](#) i przekształcamy drugi składnik.

$$(3x^2 + 9x + 9) - \left\{ (x + 2 - x - 1) \cdot \left[ (x + 2)^2 + (x + 2)(x + 1) + (x + 1)^2 \right] \right\} = 2$$

$$(3x^2 + 9x + 9) - \left\{ 1 \cdot \left[ x^2 + 4x + 4 + x^2 + x + 2x + 2 + x^2 + 2x + 1 \right] \right\} = 2$$

$$(3x^2 + 9x + 9) - (3x^2 + 9x + 7) = 2$$

$$2 = 2$$

Otrzymaliśmy równość prawdziwą dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ , co kończy dowód.

Rozwiążemy teraz uwspółcześniony problem związany z rozważaniami Diofantosa na temat rozwiązalności równań w zbiorze liczb całkowitych.

#### Przykład 4

Znajdziemy wszystkie pary liczb całkowitych  $a, b$  spełniających równanie

$$a^3 + b^3 = (a + b)^2.$$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na sumę sześcianów oraz ze wzoru na kwadrat sumy i rozkładamy lewą i prawą stronę równania na czynniki.

$$a^3 + b^3 = (a + b)^2$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)(a + b)$$

Przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę równania i wyłączamy wspólny czynnik przed nawias.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) - (a + b)(a + b) = 0$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2 - a - b) = 0$$

Zatem

$$a + b = 0 \text{ lub } a^2 - ab + b^2 - a - b = 0$$

Z pierwszego otrzymanego równania wnioskujemy, że rozwiązaniem równania są wszystkie pary liczb takich, że  $b = -a$ , czyli pary  $(a, -a)$ .

Założmy teraz, że  $b \neq -a$ .

Przekształcamy drugie z otrzymanych równań.

$$a^2 - ab + b^2 - a - b = 0 \quad | \cdot 2$$

$$2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2a - 2b = 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) - 2 = 0$$

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 2$$

Zauważmy, że składniki lewej strony równania to liczby nieujemne i ich suma jest równa 2.

Wynika stąd, że

$$(a - 1)^2 \leq 1 \text{ i } (b - 1)^2 \leq 1.$$

Czyli

$$a \in \langle 0, 2 \rangle \text{ i } b \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Ponieważ  $a, b$  to liczby całkowite, więc  $a \in \{0, 1, 2\}, b \in \{0, 1, 2\}$ .

Po sprawdzeniu potencjalnych rozwiązań, uzyskujemy pary liczb spełniających rozpatrywane równanie:

$(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ .

Odpowiedź:

Równanie spełniają wszystkie pary liczb  $(a, -a)$ , gdzie  $a$  jest liczbą całkowitą, oraz pary  $(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ .

W następnym przykładzie skorzystamy z twierdzenia, które znakomicie ułatwia rozwiązywanie wielu problemów dotyczących np. rozkładu wielomianów na czynniki.

#### **Twierdzenie: o sumie trzech sześciątów**

Dowolne liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają warunek

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(a + c)$$

#### **Wniosek:**

Jeżeli  $a + b + c = 0$  to

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

#### **Przykład 5**

Liczby  $x, y, z$  spełniają warunek  $\sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y-z} + \sqrt[3]{z-x} = 0$ .

Wykażemy, że co najmniej dwie z tych liczb są równe.

Skorzystamy z powyższego twierdzenia.

Oznaczmy:

$$a = \sqrt[3]{x-y}$$

$$b = \sqrt[3]{y-z}$$

$$c = \sqrt[3]{z-x}$$

Wtedy

$$a + b + c = 0, \text{ czyli } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

$$(x - y) + (y - z) + (z - x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x-y} \cdot \sqrt[3]{y-z} \cdot \sqrt[3]{z-x}$$

$$0 = 3 \cdot \sqrt[3]{x-y} \cdot \sqrt[3]{y-z} \cdot \sqrt[3]{z-x}$$

$$x - y = 0 \text{ lub } y - z = 0 \text{ lub } z - x = 0$$

$$x = y \text{ lub } y = z \text{ lub } z = x$$

C.n.d

## Słownik

wzór na sumę sześciąt

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

wzór na różnicę sześciąt

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$



# Animacja

---

## Ćwiczenie 1

Zapoznaj się z animacją, starając się najpierw samodzielnie rozwiązać podane tam przykłady.

Film dostępny pod adresem <https://zpe.gov.pl/a/DARARtoZR>

Film nawiązujący do treści lekcji dotyczący różnicy sześciątów.

---

## Ćwiczenie 2

Rozłóż na czynniki wielomian  $W(x) = x(2x^2 - x) + x - 2$ .

# Sprawdź się

Pokaż ćwiczenia:   

## Ćwiczenie 1



Zaznacz poprawną odpowiedź. Wyrażenie  $a^6 - b^6$  można zapisać w postaci:

☐  $(a^2 - b^2)(a^2 - ab + b^2)^2$

☐  $(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)^2$

☐  $(a^2 - b^2)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

☐  $(a^2 + b^2)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

## Ćwiczenie 2



Zaznacz poprawną odpowiedź. Jeśli  $a, b, c, d, e, f$  są liczbami różnym od 0 i takimi, że  $a + b + c + d + e + f = 0$ , to:

☐  $\frac{d^3+e^3+f^3}{a^3+b^3+c^3} = \frac{d+e+f}{a+b+c}$

☐  $\frac{d^3+e^3+f^3}{a^3+b^3+c^3} = \frac{a+b+c}{d+e+f}$

☐  $\frac{d^3+e^3+f^3}{a^3+b^3+c^3} = \frac{abc}{def}$

☐  $\frac{d^3+e^3+f^3}{a^3+b^3+c^3} = \frac{def}{abc}$

### Ćwiczenie 3



Usuń niewymierność z mianownika każdego ułamka i połącz w pary równe liczby.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{25}}$$

$$\sqrt[3]{2} - 1$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

$$\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$$

$$\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}}$$

$$\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}$$

### Ćwiczenie 4



Zaznacz, która z zapisanych równości jest prawdziwa, a która fałszywa.

| Równość                                      | Równość prawdziwa     | Równość fałszywa      |
|----------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| $x^3 - 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $x + y = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - xy + y^2}$   | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $x^3 + y^3 = (x^2 - y^2)(x - y) + xy(x + y)$ | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| $8 - x^3 = x(2 + x)(x - 2)$                  | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

### Ćwiczenie 5



Rozwiąż równanie i wpisz liczbę, która jest rozwiązaniem tego równania.

$$x(x^2 + 2x + 9) = 2x^2 + 9(x - 3)$$

$$x = \text{[input box]}$$

## Ćwiczenie 6



Rozwiąż równanie i przeciągnij w kolejności rosnącej liczby, które są rozwiązaniami tego równania.

$$x^3 + 8 = (x + 2)^2$$

Rozwiązania równania to: , , .

## Ćwiczenie 7



Niech  $a, b$  będą liczbami rzeczywistymi różnymi od zera i takimi, że  $a \neq b \neq 1$ . Wykaż, że jeśli  $a^3 + b^3 = 2$  to

$$\frac{2}{a^2+ab+b^2} = \frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1}.$$

## Ćwiczenie 8



Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia  $125x^3 - 64y^3$ , jeżeli  $5x - 4y = 6$ .

# Dla nauczyciela

---

**Autor:** Justyna Cybulska

**Przedmiot:** Matematyka

**Temat:** Przydatne wzory – wzór na sumę sześcianów i wzór na różnicę sześcianów

**Grupa docelowa:**

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

**Podstawa programowa:**

II. Wyrażenia algebraiczne. Zakres podstawowy.

Uczeń:

- 1) stosuje wzory skróconego mnożenia na:  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$ ,  $a^2 - b^2$ ,  $(a + b)^3$ ,  $(a - b)^3$ ,  $a^3 - b^3$ ,  $a^n - b^n$ ;
- 2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
- 3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej.

**Kształtowane kompetencje kluczowe:**

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe
- kompetencje osobiste, społeczne i w zakresie umiejętności uczenia się

**Cele operacyjne:**

Uczeń:

- przekształca wyrażenia algebraiczne, stosując wzory skróconego mnożenia na sumę sześcianów oraz na różnicę sześcianów
- rozwiązuje równania stopnia trzeciego
- udowadnia twierdzenia z teorii liczb, wykorzystując aparat algebraiczny
- rozkłada na czynniki wielomian, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia

**Strategie nauczania:**

- konstruktywizm

## **Metody i techniki nauczania:**

- ocena punktowa ważona
- obieg kart

## **Formy pracy:**

- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego
- praca w parach

## **Środki dydaktyczne:**

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każdy uczeń miał do dyspozycji komputer

## **Przebieg lekcji**

### **Faza wstępna:**

1. Uczniowie wspólnie metodą oceny punktowej ważonej przypominają wszystkie wiadomości i umiejętności dotyczące wzorów skróconego mnożenia, jakie do tej pory uzyskali. Jeden z uczniów, na podstawie wypowiedzi pozostałych, tworzy graficzny model zależności między pozyskanymi informacjami. Wynikiem pracy może być konkluzja, które definicje i twierdzenia dotyczące wzorów skróconego mnożenia trzeba znać koniecznie (najlepiej na pamięć), a które są ich pochodnymi.
2. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

### **Faza realizacyjna:**

1. Uczniowie pracują w parach. Zapoznają się z animacją. Najpierw próbują samodzielnie rozwiązać podane tam przykłady, a następnie porównują z przedstawionymi rozwiązaniami. W podobny sposób pracują, analizując przykłady przedstawione w sekcji „Przeczytaj”.
2. Teraz pary uczniów łączą się w grupy 4 osobowe i pracują metodą obiegu kart, rozwiązując zadania z sekcji „Sprawdź się”. Grupa rozpoczynająca rozwiązywanie danego zadania zapisuje początek rozwiązania i podaje następnej grupie kartkę z zapisem. Ta z kolei dopisuje następną część i podaje kartkę dalej, itp. Ostatnia grupa, która kończy rozwiązanie zadania sprawdza interaktywnie poprawność uzyskanego wyniku. Jeśli wynik jest błędny, kartka wędruje do początkowej grupy, która weryfikuje swoje rozwiązanie. Grupa podaje kartkę następnej grupie, itd. Jeśli nadal odpowiedź nie jest poprawna, grupa może poprosić o pomoc nauczyciela.
3. Kończącym elementem tej części zajęć może być dyskusja – czy łatwo jest rozwiązywać zadania, śledząc tok rozumowania innej grupy osób i czy wyodrębnienie na początku

lekcji najważniejszych wzorów i umiejętności pomogło w doborze odpowiednich strategii rozwiązywania zadań.

### **Faza podsumowująca:**

1. Wskazany przez nauczyciela uczeń przedstawia krótko najważniejsze elementy zajęć, poznane wiadomości, ukształtowane umiejętności.  
Lider każdej grupy omawia sposób rozwiązywania problemów przez uczniów, sposób pełnienia ról w grupie.
2. Nauczyciel omawia przebieg zajęć, wskazuje mocne i słabe strony pracy uczniów, ocenia pracę grup i par.

### **Praca domowa:**

Zadaniem uczniów jest opracowanie geometrycznego dowodu wzoru skróconego mnożenia na różnicę sześcianów.

### **Materiały pomocnicze:**

[Wzory skróconego mnożenia na różnicę oraz na sumę sześcianów – zastosowania](#)

### **Wskazówki metodyczne:**

Animację można wykorzystać na zajęciach poświęconych rozkładowi wielomianów na czynniki.